RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

VINCENZO ANCONA

Sui fibrati analitici reali E-principali. II. - Teoremi di classificazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 49-62

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__49_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Sui fibrati analitici reali E-principali.

II. - Teoremi di classificazione.

VINCENZO ANCONA (*)

Introduzione.

Si prosegue lo studio dei fibrati analitici reali E-principali sopra uno spazio analitico reale coerente X cominciato in [1], e si stabiliscono i teoremi di classificazione di tali fibrati, già noti (v. [5]) nel caso in cui ogni componente connessa di X abbia dimensione limitata.

Per le notazioni e le definizioni non richiamate esplicitamente si rinvia a [1].

§ 1. – Sia X uno spazio analitico reale coerente, ridotto, riunione numerabile di compatti, e sia $\tilde{X}$ una complessificazione di Stein di X, di antiinvoluzione α. Se U è un aperto di X, indicheremo con $\Gamma^c(U)$ (risp. $\Gamma(U)$) lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle funzioni continue (risp. analitiche) a valori reali su U; se inoltre K è un compatto di X, indicheremo con $\Gamma^c(K)$ (risp. $\Gamma(K)$) il limite induttivo degli spazi $\Gamma^c(U)$ (risp. $\Gamma(U)$) quando U percorre gl'intorni aperti di X.

È noto (v. [4]) che per ogni $f \in \Gamma(U)$ esiste un aperto $\tilde{U}$ di $\tilde{X}$, α-invariante, tale che $\tilde{U} \cap X = U$, e $\tilde{f} \in {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U})$ che estenda f; inoltre se ogni componente connessa di $\tilde{U}$ incontra U, l'estensione $\tilde{f}$ è unica. Ne segue che se K è un compatto di X, e $(\tilde{U}_i)_{i \in I}$ è un sistema fonda-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Via Savonarola 9 - 44100 Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA (CNR).

mentale d'intorni aperti α-invarianti di K in $\tilde{X}$, si ha:

$$\Gamma(K) = \varinjlim_{i\in I} {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_i)\,.$$

Sia E un fibrato analitico reale in gruppi di Lie su X, il cui gruppo strutturale sia complessificabile, ed $\tilde{E}$ una complessificazione di E, che supporremo definita su $\tilde{X}$, di antiinvoluzione θ. Se U è un aperto di X indicheremo con $\Gamma^c(U, E)$ (risp. $\Gamma(U, E)$) il gruppo delle sezioni continue (risp. analitiche) di E su U; se K è un compatto di X, denoteremo con $\Gamma^c(K, E)$ (risp. $\Gamma(K, E)$) il limite induttivo dei gruppi $\Gamma^c(U, E)$ (risp. $\Gamma(U, E)$) quando U percorre gl'intorni aperti di K.

Per ogni $f \in \Gamma(U, E)$, con U aperto di X, esiste un aperto α-invariante $\tilde{U}$ di $\tilde{X}$, tale che $\tilde{U} \cap X = U$, e $\tilde{f} \in {}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{E})$ che estenda f (v. [5]); inoltre se ogni componente connessa di $\tilde{U}$ incontra U, l'estensione $\tilde{f}$ è unica. Ne segue che se K è un compatto di X, e $(\tilde{U}_i)_{i\in I}$ è un sistema fondamentale d'intorni aperti α-invarianti di K in $\tilde{X}$, si ha:

$$\Gamma(K, E) = \varinjlim_{i\in I} {}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{E})\,.$$

Nel caso in cui si consideri un fibrato vettoriale analitico F su X, $\Gamma(U, F)$ e $\Gamma(K, F)$ sono in maniera naturale spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

§ 2. – Con le notazioni del § 1, sia K un compatto di X, $(\tilde{U}_i)_{i\in I}$ un sistema fondamentale d'intorni aperti α-invarianti di K in $\tilde{X}$; sia F un fibrato vettoriale su X, $\tilde{F}$ una complessificazione di F che supporremo definita su $\tilde{X}$, di antiinvoluzione σ. Per ogni $i \in I$, ${}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{F})$ è uno spazio di Fréchet su $\mathbb{R}$ per la topologia della convergenza uniforme sui compatti; è infatti un sottospazio vettoriale chiuso di $\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{F})$. Inoltre se $\tilde{U}_i \subset \tilde{U}_j$ $(i, j \in I)$, l'applicazione di restrizione ${}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_j, \tilde{F}) \to {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{F})$ è compatta per il teorema di Vitali. Si è visto al § 1 che

$$\Gamma(K, F) = \varinjlim_{i\in I} {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{F})\,.$$

Assegniamo allora a $\Gamma(K, F)$ la topologia limite induttivo delle topologie di Fréchet su ${}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{F})$ (v. [3]); $\Gamma(K, F)$ diviene allora uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, la cui topologia non dipende dalla scelta del sistema fondamentale d'intorni. Poichè K

ammette in $\tilde{X}$ un sistema fondamentale d'intorni α-invarianti numerabile, segue subito che $\Gamma(K, F)$, con la detta topologia, è uno spazio LS (v. [3]); dunque è separato e completo; inoltre un sottoinsieme $k \subset \Gamma(K, E)$ è compatto se e solo se esiste $i \in I$ tale che k sia contenuto in ${}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{F})$ e ivi sia compatto per la topologia indotta.

Nel seguito intenderemo $\Gamma(K, F)$ sempre munito della topologia ora detta; l'iniezione naturale di $\Gamma(K, F)$ in $\Gamma^c(K, F)$ è continua quando $\Gamma^c(K, F)$ sia munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Sia U un aperto di X; è allora:

$$\Gamma(U, F) = \varprojlim_{K \subset U} \Gamma(K, F)$$

ove K percorre i compatti di U. Se assegniamo a $\Gamma(U, F)$ la topologia limite proiettivo delle topologie su $\Gamma(K, E)$, esso diviene uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{R}$ separato e completo. Intenderemo nel seguito $\Gamma(U, F)$ munito di questa topologia. Si ha allora, algebricamente e topologicamente:

$$\Gamma(U, F) = \varinjlim_{\tilde{U} \supset U} {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$$

($\tilde{U}$ aperto α-invariante di $\tilde{X}$ tale che $\tilde{U} \cap X = U$),

$$\Gamma(K, F) = \varinjlim_{U \supset K} \Gamma(U, F)$$

(U aperto di X).

Inoltre l'iniezione naturale di $\Gamma(U, F)$ in $\Gamma^c(U, F)$ è continua quando quest'ultimo spazio vettoriale sia munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Sia ora E (come nel § 1) un fibrato analitico reale in gruppi di Lie su X, con gruppo strutturale complessificabile; sia $\tilde{E}$ una complessificazione di E (di antiinvoluzione θ), che possiamo supporre definita su $\tilde{X}$. Sia F il fibrato in algebre di Lie complesse associato a $\tilde{E}$; $\tilde{F}$ è allora una complessificazione di F, la cui antiinvoluzione σ su ogni fibra $\tilde{F}_x$ è l'applicazione lineare tangente a θ nell'unità della fibra $\tilde{E}_x$ (v. [5], [6]). L'applicazione esponenziale $\tilde{\varrho}\colon \tilde{F} \to \tilde{E}$, che definisce un isomorfismo di un intorno della sezione nulla di $\tilde{F}$ su un intorno della sezione neutra di $\tilde{E}$ soddisfa alla relazione $\tilde{\varrho} \circ \sigma = \theta \circ \tilde{\varrho}$; inoltre la restrizione di $\tilde{\varrho}$ a F applica F in E e coincide con l'applicazione esponenziale reale corrispondente $\varrho: F \to E$, e quindi applica isomorficamente un intorno della sezione nulla di F su un intorno della sezione neutra di E.

Sia K un compatto di X, $(\tilde{U}_i)_{i\in I}$ un sistema fondamentale d'intorni aperti α-invarianti di K in $\tilde{X}$. Per ogni $i \in I$, ${}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{E})$ è un gruppo topologico completo per la topologia della convergenza uniforme sui compatti (v. [5]). Assegniamo allora a $\Gamma(K, E)$ la topologia limite induttivo delle topologie ${}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}_i, \tilde{E})$. È facile allora vedere che $\Gamma(K, E)$, con tale topologia, è un gruppo topologico separato e completo, in cui gl'intorni della sezione neutra si ottengono trasportando in $\Gamma(K, E)$ mediante l'applicazione esponenziale gl'intorni della sezione nulla in $\Gamma(K, F)$.

Nel seguito intenderemo $\Gamma(K, E)$ munito della topologia ora detta; l'iniezione naturale di $\Gamma(K, E)$ in $\Gamma^c(K, E)$ munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti è continua.

Sia U un aperto di X; è allora

$$\Gamma(U, E) = \varprojlim_{K\subset U} \Gamma(K, E)$$

ove K percorre i compatti di U. Se assegniamo a $\Gamma(U, E)$ la topologia limite proiettivo delle topologie su $\Gamma(K, F)$ esso diviene un gruppo topologico, separato e completo. Intenderemo nel seguito $\Gamma(U, E)$ munito di questa topologia. Si ha allora, algebricamente e topologicamente:

$$\Gamma(U, F) = \varinjlim_{\tilde{U}\supset U} {}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{E})$$

($\tilde{U}$ aperto α-invariante di $\tilde{X}$ tale che $\tilde{U} \cap X = U$)

$$\Gamma(K, E) = \varinjlim_{U\supset K} \Gamma(U, E)$$

(U aperto di X).

Inoltre l'iniezione naturale di $\Gamma(U, E)$ in $\Gamma^c(U, E)$ è continua quando quest'ultimo gruppo sia munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Sia C uno spazio topologico compatto, e $N \subset H$ due sottospazi chiusi di C. Chiameremo sezione NHC del fibrato E su un aperto U

di X un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & C \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \Gamma(U, E) & \xrightarrow[j]{} & \Gamma^c(U, E) \end{array}$$

(ove i e j sono le iniezioni naturali), tale che per $t \in N$ $h(t)$ è la sezione neutra di $\Gamma(U, E)$. Brevemente indicheremo una tale sezione con $f(x, t)$. L'insieme delle sezioni NHC di E su U sarà denotato $\Gamma^1_{NHC}(U, E)$; è un sottogruppo chiuso di $\mathcal{C}(H, \Gamma(U, E)) \times \mathcal{C}(C, \Gamma^c(U, E))$, dunque è un gruppo topologico separato e completo.

Se A è un altro spazio compatto, è facile verificare che

$$\mathcal{C}(A, \Gamma_{NHC}(U, E)) = \Gamma_{(N\times A)(H\times A)(C\times A)}(U, E) .$$

Per omotopia NHC fra due elementi $g, f \in \Gamma_{NHC}(U, E)$ intenderemo un elemento $h \in \mathcal{C}(I, \Gamma_{NHC}(U, E))$, ove $I = [0, 1]$, tale che $h(0) = g$ e $h(1) = f$.

Associando a ogni aperto U di X il gruppo $\Gamma_{NHC}(U, E)$ si ottiene su X un fascio di gruppi non abeliani. Denoteremo con $H^1_{NHC}(X, E)$ il primo insieme di coomologia non abeliana di tale fascio.

Analoghe definizioni valgono per il fibrato vettoriale F; in tal caso $\Gamma_{NHC}(U, F)$ e $\Gamma_{NHC}(K, F)$ sono spazi vettoriali topologici separati e completi su $\mathbb{R}$.

LEMMA 2.1. *Sia $f(x, t)$ un'applicazione continua di H in $\Gamma(K, F)$ (K compatto di X), nulla per $t \in N$. Esiste allora un intorno aperto $\tilde{U}$ di K in $\tilde{X}$, α-invariante, e un'applicazione continua $\tilde{f}(x, t)$ di H in ${}^\sigma\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$, nulla per $t \in N$, tale che per ogni $t \in H$, $\tilde{f}(x, t)$ sia un'estensione di $f(x, t)$. Tale estensione è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia k l'immagine di H in $\Gamma(K, F)$; poichè k è un compatto, per quanto osservato sulla topologia di $\Gamma(K, F)$, esiste un intorno aperto α-invariante, $\tilde{U}$ di K in $\tilde{X}$, tale che $k \subset {}^\sigma\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$ ed è ivi compatto. Ne segue che l'applicazione $\tilde{f}$ di H in ${}^\sigma\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$ che si ottiene componendo f con l'iniezione di k in ${}^\sigma\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$ è continua, dato che la topologia indotta su k da ${}^\sigma\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$ coincide con quella indotta da $\Gamma(K, F)$. Si può supporre che ogni componente connessa di $\tilde{U}$ incontri K; l'unicità dell'estensione $\tilde{f}$ segue allora dal fatto che per ogni $t \in H$, $\tilde{f}(x, t)$ è un'estensione di $f(x, t)$. Da ciò segue anche che se per un certo $t \in H$ si ha $f(x, t) \equiv 0$, è pure $\tilde{f}(x, t) \equiv 0$; dunque $\tilde{f}(x, t)$ è nulla per $t \in N$.

COROLLARIO 2.2. *Sia $f(x, t)$ un'applicazione continua di H in $\Gamma(U, F)$ (U aperto di X), nulla per $t \in N$. Esiste allora un intorno aperto $\tilde{U}$ di U in $\tilde{X}$, α-invariante, e un'applicazione continua $\tilde{f}(x, t)$ di H in ${}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$, nulla per $t \in N$, tale che per ogni $t \in H$, $\tilde{f}(x, t)$ sia un'estensione di $f(x, t)$. Tale estensione è unica.*

Il corollario segue subito dal Lemma 2.1 grazie all'unicità della estensione.

Nel caso del fibrato in gruppi di Lie E si ha

LEMMA 2.3. *Sia $f(x, t)$ un'applicazione continua di H in $\Gamma(U, E)$ (U aperto di X), neutra per $t \in N$. Esiste allora un intorno aperto $\tilde{U}$ di U in $\tilde{X}$ α-invariante, e un'applicazione continua $\tilde{f}(x, t)$ di H in ${}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{E})$, neutra per $t \in N$, tale che per ogni $t \in H$, $\tilde{f}(x, t)$ sia un'estensione di $f(x, t)$. Tale estensione è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Grazie all'unicità, l'asserto è locale in t. Si può quindi supporre che esista $t_0 \in H$ tale che la sezione $g(x, t) = f(x, t_0)^{-1} \cdot f(x, t)$ prenda valori sufficientemente prossimi alla sezione neutra di E da potersi vedere, tramite l'applicazione esponenziale, come sezione di F; dal Corollario 2.2 segue che esiste un intorno aperto $\tilde{U}$ di U in $\tilde{X}$, α-invariante, e un'applicazione continua $\tilde{g}(x, t)$ di H in ${}^{\theta}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{E})$, tale che per ogni $t \in H$, $\tilde{g}(x, t)$ sia un'estensione di $g(x, t)$.

Sia inoltre $\tilde{f}(x, t_0)$ un'estensione di $f(x, t_0)$ a un intorno di U in $\tilde{X}$, che si può supporre sia ancora $\tilde{U}$. Poniamo allora $\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}(x, t_0) \cdot \tilde{g}(x, t)$; si ottiene in tal modo un'estensione di f. Se inoltre si prende $\tilde{U}$ in modo che ogni sua componente connessa incontri U, tale estensione è neutra per $t \in N$ e unica.

Ricordiamo il seguente Lemma, dovuto a Cartan ([2], Lemme 3):

LEMMA 2.4. *Sia $i: H \to C$ l'iniezione canonica. Siano M ed M' due spazi di Fréchet (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e $\varphi: M \to M'$ un'applicazione lineare continua surgettiva. Siano $f': C \to M'$* e *$g: H \to M$ due applicazioni continue tali che $f' \circ i = \varphi \circ g$. Esiste allora un'applicazione continua $f: C \to M$ che prolunga g e soddisfa alla relazione $\varphi \circ f = f'$.*

Utilizzando tale Lemma si può provare il seguente:

LEMMA 2.5. *Siano: $\tilde{L}$ un compatto α-invariante di $\tilde{X}$, $\tilde{U}$ un aperto α-invariante di $\tilde{X}$, tale che $\tilde{U} \supset \tilde{L}$, $j: {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F}) \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{U}, \tilde{F})$ l'inclusione,*

$r\colon {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{U}, \tilde{F}) \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{L}, \tilde{F})$ la restrizione, e $j' = r \circ j$. Siano $a\colon H \to {}^{\sigma}\Gamma(\tilde{U}, \tilde{F})$ e $b\colon C \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{L}, \tilde{F})$ due applicazioni continue tali che $b \circ i = j' \circ a$. Esiste allora un'applicazione continua $c\colon C \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{U}, \tilde{F})$ tale che $c \circ i = j \circ a$ e $r \circ c = b$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè r è un'applicazione surgettiva fra spazi di Fréchet, per il Lemma 2.4 (ove si prenda l'insieme vuoto al posto di H), esiste un'applicazione continua $c'\colon C \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{U}, \tilde{F})$ tale che $r \circ c' = b$. Ne segue

$$r \circ (c' \circ i) = (r \circ c') \circ i = b \circ i = j' \circ a = r \circ (j \circ a)$$

da cui

$$r \circ (c' \circ i - j \circ a) = 0 \; .$$

Sia $\beta = c' \circ i - j \circ a\colon H \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{U}, \tilde{F})$. Ancora per il Lemma 2.4 (prendendo come applicazione di C in ${}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{L}, \tilde{F})$ l'applicazione nulla), esiste un'applicazione continua $c''\colon C \to {}^{\sigma}\Gamma^{c}(\tilde{U}, \tilde{F})$ tale che $c'' \circ i = \beta$ e $r \circ c'' = 0$.

Sia allora $c = c' - c''$. Si ha

$$c \circ i = c' \circ i - c'' \circ i = c' \circ i - \beta = c' \circ i - c' \circ i + j \circ a = j \circ a$$

e inoltre

$$r \circ c = r \circ c' - r \circ c'' = r \circ c' = b$$

e ciò dimostra l'asserto.

§ 3. - Un compatto K di X sarà detto *speciale* se esiste un compatto speciale α-invariante $\tilde{K}$ di $\tilde{X}$ tale che $K = \{x \in \tilde{K} : \alpha(x) = x\}$; $\tilde{K}$ sarà detto una *complessificazione speciale α-invariante di K*.

Una terna (K, K', K'') di compatti di X sarà detta *configurazione speciale di X* se esiste una configurazione speciale α-invariante di prima specie $(\tilde{K}, \tilde{K}', \tilde{K}'')$ di $\tilde{X}$ tale che K (risp. K', K'') sia la traccia su X di $\tilde{K}$ (risp. $\tilde{K}'$, $\tilde{K}''$); la terna $(\tilde{K}, \tilde{K}', \tilde{K}'')$ sarà detta *complessificazione α-invariante di* (K, K', K''). È evidente dalla definizione che dati comunque tre intorni $\tilde{U}, \tilde{U}', \tilde{U}''$ di K, K' e K'' rispettivamente in $\tilde{X}$, esiste sempre una complessificazione α-invariante $(\tilde{K}, \tilde{K}', \tilde{K}'')$ di (K, K', K'') tale che $\tilde{U} \supset \tilde{K}$, $\tilde{U}' \supset \tilde{K}'$, $\tilde{U}'' \supset \tilde{K}''$.

Si ha il

TEOREMA 3.1. *Sia N un retratto di deformazione di C. Allora:*

1) *Se K è un compatto speciale di X, il gruppo topologico $\Gamma_{NHC}(K, E)$ è connesso per archi.*

2) *Se K è un compatto speciale di X, ogni $f \in \Gamma_{NHC}(K, E)$ è prodotto di un numero finito di elementi di $\Gamma_{NHC}(K, E)$ prossimi quanto si voglia alla sezione neutra.*

3) *Sia (K, K', K'') una configurazione speciale di X. Per ogni $f \in \Gamma_{NHC}(K' \cap K'', E)$ esistono $f' \in \Gamma_{NHC}(K', E)$ e $f'' \in \Gamma_{NHC}(K'', E)$ tali che*

$$f = f' \cdot (f'')^{-1} .$$

DIMOSTRAZIONE. Se K è un compatto speciale di X e $\tilde{K}$ è una sua complessificazione speciale α-invariante, diciamo che K è k-speciale se $\tilde{K}$ è (k, h)-speciale. Indichiamo allora con $(1)_k$ e $(2)_k$ le affermazioni (1) e (2) quando si riferiscano a un compatto K k-speciale e con $(3)_k$ l'affermazione (3) quando si riferisca al caso in cui $K' \cap K''$ sia un compatto k-speciale. Proviamo allora $(1)_0$, indi la serie d'implicazioni:

$$(1)_k \Rightarrow (2)_k \Rightarrow (3)_k \Rightarrow (1)_{k+1} .$$

PROVA di $(1)_0$. Si adatta facilmente la dimostrazione di $(1)_0$ che si trova in [2], p. 110, per il caso complesso.

$(1)_k \Rightarrow (2)_k$: è ovvio.

$(2)_k \Rightarrow (3)_k$: sia $f \in \Gamma_{NHC}(K' \cap K'', E)$; in base a $(2)_k$ si può scrivere $f = g_1 \dots g_p$ con $g_i \in \Gamma_{NHC}(K' \cap K'', E)$ prossimo alla sezione neutra quanto si voglia; $g_1, \dots, g_p$ si possono guardare come sezioni NHC di F. Utilizzando i Lemmi 2.1 e 2.5 si possono trovare un intorno aperto α-invariante $\tilde{V}$ di $K' \cap K''$ in $\tilde{X}$, e degli elementi $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_p \in {}^0\Gamma_{NHC}(\tilde{V}, \tilde{E})$ che estendono $g_1, \dots, g_p$ rispettivamente. Sia $(\tilde{K}, \tilde{K}', \tilde{K}'')$ una complessificazione α-invariante di (K, K', K'') tale che $\tilde{K}' \cap \tilde{K}'' \subset \tilde{V}$. Posto $\tilde{f} = \tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_p$, si ottiene un elemento $\tilde{f} \in {}^0\Gamma_{NHC}(\tilde{K}' \cap \tilde{K}'', \tilde{E})$ che estende f. Per l'affermazione (3) della dimostrazione del Teorema 4.2 di [1] si può scrivere $\tilde{f} = \tilde{f}' \cdot (\tilde{f}'')^{-1}$ con $\tilde{f}' \in {}^0\Gamma_{NHC}(\tilde{K}, \tilde{E})$ e $\tilde{f}'' \in {}^0\Gamma_{NHC}(\tilde{K}'', \tilde{E})$. Si ha allora $f = f' \cdot (f'')^{-1}$ ove f' (risp. f'') è la restrizione di $\tilde{f}'$ (risp. $\tilde{f}''$) a K' (risp. K'').

$(1)_k + (3)_k \Rightarrow (1)_{k+1}$: anche questa parte della dimostrazione si ottiene agevolmente adattando l'analoga dimostrazione di [2], p. 111.

Osserviamo che nel corso della dimostrazione abbiamo anche provato il seguente

LEMMA 3.2. *Sia K un compatto speciale di X. Se N è retratto di deformazione di C, ogni elemento $f \in \Gamma_{NHC}(K, E)$ ammette un'estensione $\tilde{f} \in {}^{\theta}\Gamma_{NHC}(\tilde{V}, \tilde{E})$, ove $\tilde{V}$ è un opportuno intorno aperto α-invariante di K in $\tilde{X}$.*

Stabiliamo ora il seguente

TEOREMA 3.3. *Sia N un retratto di deformazione di C. Ogni $f \in \Gamma_{NHC} \cdot (X, E)$ ammette un'estensione $\tilde{f} \in {}^{\theta}\Gamma_{NHC}(\tilde{U}, \tilde{E})$ ove $\tilde{U}$ è un opportuno intorno aperto α-invariante di X in $\tilde{X}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Lemma 4.3 di [1] segue che X è riunione di una famiglia numerabile $(K_n)_{n \in N}$ di compatti speciali, tali che $K_n \subset K_{n+1}$. Indicata con f_n la restrizione di f all'intorno di K_n, proveremo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intorno compatto α-invariante, $\tilde{K}_n$, di K_n in $\tilde{X}$, e un'estensione $\tilde{f}_n \in {}^{\theta}\Gamma_{NHC}(\tilde{K}_n, \tilde{E})$, di f_n, in modo che $\left(\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{K}_k\right) \cap \tilde{K}_{n+1} = \tilde{K}_n \cap \tilde{K}_{n+1}$, e le restrizioni di $\tilde{f}_n$ e $\tilde{f}_{n+1}$ a $\tilde{K}_n \cap \tilde{K}_{n+1}$ coincidano.

Procediamo per induzione su n. Si ottengono $\tilde{K}_1$ e $\tilde{f}_1$ grazie al Lemma 3.2.

Supponiamo quindi di aver costruito $\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_n$ e $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$, e costruiamo $\tilde{K}_{n+1}$ e $\tilde{f}_{n+1}$. In base al Teorema 3.1, (2), si può scrivere:

$$f_{n+1}(x, t) = g_1(x, t) \dots g_p(x, t)$$

(per $t \in C$ e x in un intorno di K_{n+1} in X) ove $g_i \in \Gamma_{NHC}(K_{n+1}, E)$ è sufficientemente prossimo alla sezione neutra da potersi vedere come elemento di $\Gamma_{NHC}(K_{n+1}, F)$. Utilizzando il Lemma 2.1, si può trovare un intorno compatto α-invariante $\tilde{W}$ di K_{n+1} in $\tilde{X}$, e delle sezioni $\tilde{g}_1(x, t), \dots, \tilde{g}_p(x, t)$, definite per $t \in H$ e x in un intorno di $\tilde{W}$, di $\tilde{E}$, θ-invarianti, continue in x e t e olomorfe in x, che per $t \in H$ estendano $g_1(x, t), \dots, g_p(x, t)$ rispettivamente.

Si può supporre, restringendo eventualmente $\tilde{W}$, che sia $\left(\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{K}_k\right) \cap \cap \tilde{W} = \tilde{K}_n \cap \tilde{W}$. Per l'unicità delle estensioni olomorfe si avrà allora: $\tilde{f}_n(x, t) = \tilde{g}_1(x, t) \dots \tilde{g}_p(x, t)$ per $t \in H$ e x in un intorno di $\tilde{K}_n \cap \tilde{W}$. Utilizzando il Lemma 2.5, restringendo ancora, se necessario, $\tilde{W}$, estendiamo $\tilde{g}_1(x,t), \dots, \tilde{g}_{\nu-1}(x,t)$ anche per $t \in C$, ottenendo degli elementi di ${}^\theta\Gamma_{NHC}(\tilde{W}, \tilde{E})$ che estendano $g_1(x,t), \dots, g_{\nu-1}(x,t)$.

Poniamo quindi

$$\tilde{g}'_\nu(x,t) = \begin{cases} \tilde{g}_\nu(x,t) \text{ per } x \text{ in un intorno di } \tilde{W}, \text{ e } t \in H; \\ (\tilde{g}_1(x,t) \dots \tilde{g}_{\nu-1}(x,t))^{-1} \tilde{f}_n(x,t) \text{ per } x \text{ in un intorno di} \\ \qquad\qquad \tilde{K}_n \cap \tilde{W} \text{ e } t \in C; \\ g_\nu(x,t) \text{ per } x \text{ in un intorno di } K_{n+1} \text{ in } X \text{ e } t \in C. \end{cases}$$

Si può trovare un intorno compatto α-invariante $\tilde{W}'$ di K_{n+1} in $\tilde{X}$, $\tilde{W}' \subset \tilde{W}$, tale che $\tilde{g}'_\nu(x,t)$ per x in un intorno di $\tilde{W}'$ prenda valori sufficientemente prossimi alla sezione neutra di $\tilde{E}$ da potersi vedere come applicazione a valori in $\tilde{F}$. Posto allora $\tilde{L} = (\tilde{K}_n \cap \tilde{W}') \cup K_{n+1}$, $\tilde{g}'_\nu(x,t)$ definisce, per $t \in H$, un'applicazione continua $a\colon H \to {}^\sigma\Gamma(\tilde{W}', \tilde{F})$ e per $t \in C$ un'applicazione continua $b\colon C \to {}^\sigma\Gamma^c(\tilde{L}, \tilde{F})$ che soddisfano alle ipotesi del Lemma 2.5. Grazie a tale Lemma, si può estendere $\tilde{g}'_\nu(x,t)$ a un elemento di ${}^\sigma\Gamma_{NHC}(\tilde{W}', \tilde{F})$, e quindi, per trasporto tramite l'applicazione esponenziale, a un elemento di ${}^\theta\Gamma_{NHC}(\tilde{W}', \tilde{E})$ che denotiamo $\tilde{g}_\nu(x,t)$. Poniamo allora per $t \in C$ e x in un intorno di $\tilde{W}'$:

$$\tilde{f}_{n+1}(x,t) = \tilde{g}_1(x,t) \dots \tilde{g}_\nu(x,t).$$

Posto $\tilde{K}_{n+1} = \tilde{W}'$, è chiaro dalla costruzione che $\tilde{f}_{n+1}$ e $\tilde{f}_n$ coincidono su $\tilde{K}_n \cap \tilde{K}_{n+1}$.

Con ciò è provato il Teorema.

COROLLARIO 3.4. *Se N è un retratto di deformazione di C, il gruppo topologico $\Gamma_{NHC}(X, E)$ è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \Gamma_{NHC}(X, E)$; per il Teorema 3.3 esiste una estensione $\tilde{f} \in {}^\theta\Gamma_{NHC}(\tilde{U}, \tilde{E})$ di f a un opportuno intorno aperto α-invariante $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$. Si può supporre $\tilde{U}$ di Stein, onde per il Teorema 4.2, (i) di [1], esiste un'omotopia $\tilde{G}(x,t,u) \in {}^\theta\Gamma_{N'H'C'}(\tilde{U}, \tilde{E})$ che lega $\tilde{f}$ alla sezione neutra. La restrizione di $\tilde{G}$ a X fornisce allora una omotopia NHC che lega f alla sezione neutra in $\Gamma_{NHC}(X, E)$.

TEOREMA 3.5. *Sia N un retratto di deformazione di C. Ogni elemento di $H^1_{NHC}(X, E)$ si estende a un elemento di ${}^\theta H^1_{NHC}(\tilde{U}, \tilde{E})$ ove $\tilde{U}$ è un opportuno intorno α-invariante di X in $\tilde{X}$.*

Dimostrazione. Sia (f_{ij}) un cociclo NHC associato a un ricoprimento $(U_i)_{i\in I}$ di X; è allora $f_{ij}\in \Gamma_{NHC}(U_i \cap U_j, E)$. Si può supporre senza restrizione di generalità che $I = \mathbf{N}$, che il ricoprimento (U_i) sia localmente finito, che ogni U_i sia relativamente compatto e che ogni f_{ij} sia definito nell'intorno di $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j$.

Applicando il Lemma 2.3 è possibile trovare un intorno aperto α-invariante $\tilde{V}$ di X in $\tilde{X}$, un ricoprimento aperto di Stein localmente finito $(\tilde{V}_i)_{i\in I}$ di $\tilde{V}$, tale che per ogni $i\in I$ $\tilde{V}_i \supset \overline{U}_i$, e per $i, j \in I$ delle estensioni $\tilde{f}_{ij}(x, t)$, θ-invarianti, di $f_{ij}(x, t)$, definite per $t\in H$ e $x \in \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$, continue in x e t e olomorfe in x, che soddisfano alle condizioni

$$(*) \qquad \tilde{f}_{ij}(x, t) = \tilde{f}_{ik}(x, t)\tilde{f}_{kj}(x, t) \qquad \text{per } x\in \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j \cap \tilde{V}_k \text{ e } t\in H\,.$$

Bisogna allora estendere le $\tilde{f}_{ij}(x, t)$ anche per valori di $t\in C$, restringendo eventualmente $\tilde{V}$, in modo che le $(*)$ rimangano verificate.

Per far ciò, procederemo per induzione. Supponiamo che si siano trovati degl'intorni aperti di Stein e α-invarianti $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n$ di $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n$ rispettivamente, e per $i, j \leqslant n$ delle sezioni $\tilde{f}_{ij}(x, t) \in {}^{\theta}\Gamma_{NHC}(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j, \tilde{E})$ che estendano le $f_{ij}(x, t)$ e che soddisfino alle $(*)$ per $i, j, k \leqslant n$. Cerchiamo allora un intorno aperto di Stein e α-invariante $\tilde{U}_{n+1}$ di $\overline{U}_{n+1}$ e per ogni $j \leqslant n$ una sezione $\tilde{f}_{n+1,j}(x, t) \in {}^{\theta}\Gamma_{NHC}(\tilde{U}_{n+1} \cap \tilde{U}_j, \tilde{E})$ che estenda $f_{n+1,j}(x, t)$ e che soddisfi alle condizioni $(*)$ con $i = n+1$ e $j, k \leqslant n$. Su $\tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_j$ è definita, per $t\in H$, la sezione $\tilde{f}_{n+1,j}(x, t)$. Supponiamo di aver trovato $\tilde{f}_{n+1,j}(x, t)$ per $t \in C$ e per $j \leqslant k$ $(k < n)$ e cerchiamo $\tilde{f}_{n+1,k+1}(x, t)$ per $t\in C$ (¹).

Come conseguenza del Corollario 3.4 si può scrivere:

$$f_{n+1,k+1}(x, t) = g_1(x, t) \ldots g_p(x, t)$$

ove $g_1, \ldots, g_p \in \Gamma_{NHC}(\overline{U}_{n+1} \cap \overline{U}_{k+1}, E)$ sono sufficientemente prossimi alla sezione neutra da potersi vedere come sezioni NHC di F. Restringendo, se necessario, $\tilde{V}_{n+1}$ e $\tilde{U}_{k+1}$ (²), mediante il Lemma 2.1 si possono tro-

(¹) Si fa cioè un'induzione all'interno della prima induzione. Si noti che i passi iniziali delle due induzioni sono implicitamente contenuti nei passi successivi.

(²) Qui e nel seguito si presenta la necessità di restringere, oltre che $\tilde{V}_{n+1}$, anche quelli tra gli $\tilde{U}_j$ $(j \leqslant k+1)$ che incontrano $\tilde{V}_{n+1}$. Ma poichè il ricoprimento $(\tilde{V}_i)_{i\in I}$ è localmente finito, in realtà ogni $\tilde{U}_j$ $(j \in I)$ viene, in definitiva, ristretto solo un numero finito di volte.

vare delle sezioni $\tilde{g}_1(x, t), \ldots, \tilde{g}_p(x, t)$, definite per $t \in H$ e $x \in \tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1}$, θ-invarianti, continue in x e t e olomorfe in x, che per $t \in H$ estendano $g_1(x, t), \ldots, g_p(x, t)$ rispettivamente. Per l'unicità delle estensioni olomorfe si avrà

$$\tilde{f}_{n+1,k+1}(x, t) = \tilde{g}_1(x, t) \ldots \tilde{g}_p(x, t)$$

per $t \in H$ e $x \in \tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1}$.

Restringendo ancora se necessario $\tilde{V}_{n+1}$ e $\tilde{U}_{k+1}$, estendiamo mediante il Lemma 2.5 $\tilde{g}_1(x, t), \ldots, \tilde{g}_{p-1}(x, t)$ anche per $t \in C$, ottenendo degli elementi di ${}^\theta\Gamma_{NHC}(\tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1}, \tilde{E})$ che estendono $g_1(x, t), \ldots, g_{p-1}(x, t)$.

Posto, per semplificare le notazioni

$$\tilde{F}(x, t) = (\tilde{g}_1(x, t) \ldots \tilde{g}_{p-1}(x, t))^{-1}$$

sia

$$\tilde{g}'_p(x, t) = \begin{cases} \tilde{F}(x, t) \cdot \tilde{f}_{n+1,1}(x, t) \cdot \tilde{f}_{1,k+1}(x, t) \\ \qquad\qquad \text{per } t \in C \text{ e } x \in \tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1} \cap \tilde{U}_1 ; \\ \vdots \\ \tilde{F}(x, t) \cdot \tilde{f}_{n+1,k}(x, t) \cdot \tilde{f}_{k,k+1}(x, t) \\ \qquad\qquad \text{per } t \in C \text{ e } x \in \tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1} \cap \tilde{U}_k ; \\ \tilde{g}_p(x, t) \text{ per } t \in H \text{ e } x \in \tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1} ; \\ g_p(x, t) \text{ per } t \in C \text{ e } x \in \overline{U}_{n+1} \cap \overline{U}_{k+1} . \end{cases}$$

Restringendo eventualmente $\tilde{V}_{n+1}$ e $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_k$ (3) si può supporre che $\tilde{g}'_p(x, t)$ prenda valori sufficientemente prossimi alla sezione neutra di $\tilde{E}$ da potersi considerare a valori in $\tilde{F}$. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 3.3 (servendosi del Lemma 2.5) e salvo un ulteriore restringimento, si può estendere $\tilde{g}'_p(x, t)$ a una sezione $\tilde{g}_p(x, t) \in {}^\theta\Gamma_{NHC}(\tilde{V}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1}, \tilde{E})$. Si può porre allora $\tilde{U}_{n+1} = \tilde{V}_{n+1}$ e $\tilde{f}_{n+1,k+1}(x, t) = \tilde{g}_1(x, t) \ldots \tilde{g}_p(x, t)$ ottenendo la sezione $\tilde{f}_{n+1,k+1} \in {}^\theta\Gamma_{NHC}(\tilde{U}_{n+1} \cap \tilde{U}_{k+1}, \tilde{E})$ cercata.

Corollario 3.6. *Se N è un retratto di deformazione di C, si ha*

$$H^1_{NHC}(X, E) = (e) .$$

(3) Vedi nota precedente.

DIMOSTRAZIONE. Ogni elemento di $H^1_{NHC}(X, E)$ si estende per il teorema precedente a un elemento di ${}^{\theta}H^1_{NHC}(\tilde{U}, \tilde{E})$ con $\tilde{U}$ intorno aperto α-invariante di X in $\tilde{X}$. Si può supporre che $\tilde{U}$ sia di Stein. Il corollario è allora conseguenza del Teorema 4.2, (iii), di [1].

§ **4.** – Sia P uno spazio fibrato E-principale su X (per la definizione si veda [2], p. 100). Si ha allora, come nel caso complesso:

TEOREMA 4.1. *Ogni sezione continua di P su X è omotopa a una sezione analitica.*

DIMOSTRAZIONE. Si procede esattamente come in [2], dimostrazione del Théorème 1 bis, utilizzando il Corollario 3.6.

TEOREMA 4.2. *Sia (U_i) un ricoprimento aperto di X. Siano due cocicli analitici $f_{ij}\colon U_{ij} \to E$ e $g_{ij}\colon U_{ij} \to E(U_{ij} = U_i \cap U_j)$. Se esistono delle sezioni continue $c_i\colon U_i \to E$ tali che $g_{ij} = (c_i)^{-1} f_{ij} c_j$ in U_{ij}, esistono anche delle sezioni analitiche che soddisfano alle stesse relazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Il teorema risulta dal precedente come in [2] il Théorème A si deduce dal Théorème 1 bis (v. [2], p. 102).

TEOREMA 4.3. *Sia X ricoperto da aperti U_i tali che $\overline{U}_i$ sia un compatto speciale. Sia un cociclo continuo $f_{ij}\colon U_{ij} \to E$. Esistono allora delle sezioni continue $c_i\colon U_i \to E$ tali che il cociclo $g_{ij} = (c_i)^{-1} f_{ij} c_j$ sia analitico.*

DIMOSTRAZIONE. Come in [2], p. 106-109, dimostrazione del Théorème B, utilizzando il Teorema 4.1.

Indicando con ξ^a (risp. ξ^c) il fascio dei germi di sezioni analitiche (risp. continue) di E, i Teoremi 4.2 e 4.3 si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 4.4. *L'applicazione naturale $H^1(X, \xi^a) \to H^1(X, \xi^c)$ è bigettiva.*

REFERENCES

[1] V. ANCONA, *Sui fibrati analitici reali E-principali - I: Alcuni teoremi sulle matrici olomorfe invertibili*, Annali di Mat. pura e appl., **107** (1976), **343-357.**

[2] H. CARTAN, *Espaces fibrés analytiques*, Symposium international de topologia algebraica, Universidad National Autonoma de Mexico, 1958.

[3] K. FLORET - J. WLOKA, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Raüme*, Lecture Notes in Math. no. 56, Springer-Verlag.

[4] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, Annali di Mat. pura e appl., **75** (1967), 143-218.

[5] A. TOGNOLI, *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, **21** (1967), 709-744.

[6] A. TOGNOLI, *L'analogo del teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso analitico reale*, Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, **22** (1968), 528-558.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 gennaio 1975.