RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO FRANCHI

Su un teorema di R. H. Martin Jr.

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 275-288

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__275_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Su un teorema di R. H. Martin Jr.

BRUNO FRANCHI (*)

SUMMARY - Let X be a real Banach space, T a positive real number and, $\forall t \in [0, T]$, let $A(t)$ be a dissipative subset of $X \times X$. For a fixed $u_0 \in D(A(0))$, the initial value problem

$$u'(t) \in A(t)u(t)$$

$$u(0) = u_0$$

has been the subjet of several papers: see, for exemple, the references in [3] and [4]. The hypotheses in these papers differ essentially with regards to two points: the time-dependence of the domains (which in many cases are assumed to be time-independent) and the time-dependence of the operators. Thinking along these lines, paper [3] may be applied, with suitable modification, in dealing with cases of domains which expand and contract with « unilateral » conditions of t-dependence of $A(t)$, and therefore may be applied in dealing with, for exemple, semilinear parabolic equations where maximal monotone sets of $R \times R$ with a variable domain appear. In the present paper (theorem M) we give a more general version of the theorem I of [8], which, on the one hand, since functions of bounded variation are present, connects [8] and [6], and, on the other hand, seems suitable for dealing with semilinear cases of the type described above, cases in which, due to the very nature of the problem, the operators are not usually Lipschitz-continuous in t in the space where the problem is posed, whereas the operators are Lipschitz-continuous in t in a suitable space which is, somehow, « characteristic » of the problem. We then give two results, theorem I and II, which show how the results of [8] may be used in this setting, and a simple example; we note that

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Piazza di Porta S. Donato 5 - 40127 Bologna.

also the method of [1] and [2] may be used in the case dealt with in the example (see also [7]), but it seems that it is easier to verify our hypotheses in application and, moreover, we use a general result which does not presuppose the hypothesis that $A(t)$ is the sub-differential of a convex function.

Per notazioni e risultati generali sugli operatori dissipativi rimandiamo a [3]. Nel seguito X designerà uno spazio di Banach reale. Ricordiamo che:

(0.1) *Siano X e X' uniformemente convessi; sia $A \subseteq X \times X$ tale che:*

i) *esiste $c \geq 0$ tale che $A - cI$ è dissipativo;*

ii) *A è chiuso;*

iii) $\overline{\operatorname{conv} D(A)} \subseteq R(I - \lambda A)$ *per* $\lambda \in]0, 1/c[$;

allora per ogni $u \in D(A)$:

1) *l'insieme Au ha un unico elemento di norma minima $A^0 u$;*

2) *esiste una ed una sola funzione $S(\cdot)u\colon [0, +\infty[\to D(A)$, localmente lipschitziana (e quindi derivabile q.d.), derivabile ovunque a destra tale che*

$$(D^+ S(\cdot)u)(t) = A^0 S(t)u\,, \quad S(0)u = u\,, \quad \|(D^+ S(\cdot)u)(t)\| \leq e^{ct}\|A^0 u\|$$

(è, sostanzialmente, [3], III, th. 1.6; cfr. anche l'osservazione alla fine di III, 1.2).

Ci riferiremo alla applicazione $S(\cdot)\colon [0, +\infty[\times \overline{D(A)} \to X$ così ottenuta come al semigruppo (di tipo c) su $D(A)$ generato da A nel senso della definizione 1.3 di [3], cap. III.

(0.2) DEFINIZIONE. Per ogni $t \in [0, T]$ sia $A(t) \subseteq X \times X$; sia $u_0 \in D(A(0))$.

Diremo soluzione forte del problema di Cauchy

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} u'(t) \in A(t)\,u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

una funzione $u: [0, T] \to X$ tale che:

i) $u(\cdot)$ è assolutamente continua e derivabile q.d. su $[0, T]$;

ii) $u(t) \in D(A(t))$ q.d. su $[0, T]$;

iii) $u'(t) \in A(t)u(t)$ q.d. su $[0, T]$ e $u(0) = u_0$.

* * *

Facciamo le seguenti ipotesi:

(A.1) X è uno spazio di Banach reale, X e X' sono uniformemente convessi;

(A.2) esiste $c \geqslant 0$ tale che $A(t) - cI$ è un sottoinsieme dissipativo di $X \times X$ per ogni $t \in [0, T]$. Poniamo $D(t) = D(A(t))$;

(A.3) se $t_n \to t_0$, $(u_n, v_n) \in A(t_n)$, $u_n \xrightarrow{\text{fort.}} u_0$, $v_n \xrightarrow{\text{deb.}} v_0$, allora $(u_0, v_0) \in A(t_0)$;

(A.4) $\operatorname{conv} D(t) \subseteq R(1 - \lambda A(t))$ per ogni $\lambda \in]0, 1/c[$, per ogni $t \in [0, T]$.

Lemma. *Sotto le ipotesi* (A.1)-(A.4), *risulta* $\overline{\operatorname{conv} D(t)} \subseteq R(I - \lambda A(t))$ *per ogni* $\lambda \in]0, 1/c[$, *per ogni* $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. In forza di (A.4), basterà provare che $R(I - \lambda A(t))$ è chiuso per ogni $\lambda \in]0, 1/c[$ e per ogni $t \in [0, T]$. Sia $y_0 \in \overline{R(I - \lambda A(t))}$; allora esiste una successione $(y_n)_{n \in N}$ tale che $y_n \xrightarrow{\text{fort.}} y_0$, $y_n \in R(I - \lambda A(t))$ per ogni $n \in N$; posto $x_n = (I - \lambda A(t))^{-1} y_n$, $(x_n)_{n \in N}$ è una successione di Cauchy in $D(t)$ per [5], lemma 1.2.

Dunque $x_n \xrightarrow{\text{fort.}} x_0$, ed essendo $(x_n, (1/\lambda)(x_n - y_n)) \in A(t)$, in quanto $y_n \in (I - \lambda A(t)) x_n$ implica $(1/\lambda)(x_n - y_n) \in A(t) x_n$, per (A.3) segue che $(x_0, (1/\lambda)(x_0 - y_0)) \in A(t)$; dunque $(x_0, y_0) \in (I - \lambda A(t))$ e quindi $y_0 \in R(I - \lambda A(t))$, cioè $R(I - \lambda A(t))$ è chiuso.

Osservazione. Da (A.3) discende

(1.1) $A(t)$ è chiuso per ogni $t \in [0, T]$.

Dunque per (A.1) e per il lemma precedente segue che $A^0(t)$ è a un solo valore e $D(A^0(t)) = D(t)$ per ogni $t \in [0, T]$ (per (0.1)).

Teorema M. *Siano soddisfatte* (A.1)-(A.4); *esistano* $\alpha \in R^+$, $m \in N$, $q \geqslant 1$, $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$ *funzioni da* $[0, T]$ *a* X *continue e a variazione limitata tali che*:

se $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T[$ *e* $u \in D(A(t))$, *allora esistono* $\delta = \delta(\varepsilon, t, u) > 0$

tale che $\delta < \min\{T-t, \varepsilon\}$, *e* $u_\delta \in D(t+\delta)$ *tale che*

i) $\|u + \delta A^0(t)u - u_\delta\| \leqslant \delta\varepsilon$,

ii) $\|A^0(t+\delta)u_\delta\|^q \leqslant \exp\Big((\alpha+\varepsilon)\sum_{j=1}^m \|\bar g_j(t+\delta) - \bar g_j(t)\|\Big)\cdot$

$$\cdot\Big(\|A^0(t)u\|^q + \sum_{j=1}^m \|\bar g_j(t+\delta) - \bar g_j(t)\|\Big).$$

Sotto tali ipotesi, per ogni $u_0 \in D(0)$ *esiste una ed una sola soluzione forte di (P).*

Di più tale soluzione verifica $u'(t) = A^0(t)u(t)$ q.d. su $[0, T]$.

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema I di [8] riposa sul lemma 4.1; questo si può estendere come segue:

Siano $n \in N$ e $u_0 \in D(0)$; per ogni $t \in [0, T]$ poniamo:

$$L_n(t) = \exp\Big((\alpha + 1/n)\sum_{j=1}^m V_j(t)\Big)\Big(\|A^0(0)u_0\|^q + \sum_{j=1}^m V_j(t)\Big). \quad (1)$$ [1]

Allora esiste una funzione $u(\cdot\,; u_0, n)\colon [0, T] \to X$ tale che:

i) $u(0; u_0, n) = u_0$;

ii) $\|u(t; u_0, n) - u(s; u_0, n)\| \leqslant |t-s|\big(L_n(T)^{1/q} + 1/n\big)$;

iii) $u(T; u_0, n) \in D(T)$ e $\|A^0(T)u(T; u_0, n)\|^q \leqslant L_n(T)$;

iv) per ogni $t \in [0, T[$, $u'_+(t; u_0, n)$ esiste ed esistono $\sigma_{t,n} \in [0, T[$ e $\varrho_{t,n} \in]0, 1/n]$ tali che

$$\sigma_{t,n} \leqslant t \leqslant \sigma_{t,n} + \varrho_{t,n} \leqslant T, \qquad u(\sigma_{t,n}; u_0, n) \in D(\sigma_{t,n}),$$

$$\|A^0(\sigma_{t,n})u(\sigma_{t,n}; u_0, n)\|^q \leqslant L_n(\sigma_{t,n})$$

e

$$\|u'_+(t; u_0, n) - A^0(\sigma_{t,n})u(\sigma_{t,n}; u_0, n)\| \leqslant 1/n;$$

v) se $t \in [0, T[$ e $\sigma_{t,n}$, $\varrho_{t,n}$ sono come in iv), allora $\sigma_{s,n} = \sigma_{t,n}$ quando $s \in [\sigma_{t,n}, \sigma_{t,n} + \varrho_{t,n}[$ e $\sigma_{s,n} = s$ quando $s = \sigma_{t,n} + \varrho_{t,n}$ e $s < T$;

---

[1] Indichiamo con $V_j(t)$ la variazione di $\bar g_j$ su $[0, t]$.

vi) se $t \in [0, T[$, $\sigma_{t,n}$, $\varrho_{t,n}$ sono come in iv), allora per ogni $s \in \in [\sigma_{t,n}, \sigma_{t,n} + \varrho_{t,n}[$ e per ogni $y \in D(s)$ tale che

$$\|y - u(\sigma_{t,n};\, u_0, n)\| < \varrho_{t,n}(L_n(T)^{1/q} + 1/n)$$

e

$$\|A^0(s)y\|^q \leqslant \exp\Big((\alpha + 1/n)\sum_{j=1}^{m}[V_j(\sigma_{t,n} + \varrho_{t,n}) - V_j(\sigma_{t,n})]\Big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\|A^0(\sigma_{t,n})u(\sigma_{t,n};\, u_0, n)\|^q + \sum_{j=1}^{m}[V_j(\sigma_{t,n} + \varrho_{t,n}) - V_j(\sigma_{t,n})]\Big),$$

allora

$$\|A^0(s)y - A^0(\sigma_{t,n})u(\sigma_{t,n};\, u_0, n)\| \leqslant 1/n\,.$$

La prova di questo si consegue ripetendo, con le opportune varianti, quella del lemma 4.1 di [8].

Successivamente si trasportano i ragionamenti della dimostrazione del teorema I di [8] per provare il teorema M.

TEOREMA I. *Sia X uno spazio di Banach reale verificante* (A.1). *Per ogni $t \in [0, T]$ sia $A(t) \subseteq X \times X$ verificante* (A.2), (A.3), (A.4) *e*

(A.5) *per ogni $t \in [0, T[$, posto $S_t(\cdot)$ il semigruppo generato su $\overline{D(t)}$ da $A(t)$ (nel senso di* (0.1) *in forza di* (A.1)-(A.4)), *per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $u \in D(t)$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, t, u) > 0$, $\delta < \min\{T - t, \varepsilon\}$ tale che $S_t(\delta)u \in D(t + \delta)$.*

Di più supponiamo

(A.6) *esistono $g_1, \ldots, g_n$ funzioni da $[0, T]$ a X continue e a variazione limitata, esiste $q \geqslant 1$ tali che, se $t \leqslant \tau$, $u \in D(t) \cap D(\tau)$,*

$$\|A^0(\tau)u\|^q \leqslant \|A^0(t)u\|^q + \sum_{j=1}^{n}\|g_j(\tau) - g_j(t)\|(1 + \|A^0(t)u\|^q)\,.$$

Allora per ogni $u_0 \in D(0)$ esiste una ed una sola soluzione forte di (P). *Di più tale soluzione verifica $u'(t) = A^0(t)u(t)$ q.d. su* $[0, T]$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che le ipotesi (A.1)-(A.6) implicano le ipotesi del teorema M. Ora, (A.1)-(A.4) sono soddisfatte per ipotesi. Proviamo che è soddisfatta l'ipotesi rimanente.

Sia $t \in [0, T]$, $u \in D(t)$, $\varepsilon > 0$.

Per [3], III, th 1.2, sarà $s \to A^0(t) S_t(s) u$ continua a destra su $[0, +\infty[$; dunque esisterà $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t, u)$ tale che

$$\|A^0(t) S_t(s) u - A^0(t) u\| < \varepsilon \qquad \text{per } 0 \leqslant s < \delta_1 .$$

D'altra parte, per (A.5), esiste $\delta < \min\{\varepsilon, \delta_1, T - t\}$ tale che $S_t(\delta) u \in \in D(t + \delta)$; scegliamo $u_\delta = S_t(\delta) u$.

Sarà

$$\|u_\delta - u - \delta A^0(t) u\| = \left\| \int_0^\delta \big(A^0(t) S_t(s) u - A^0(t) u\big)\, ds \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\delta \|A^0(t) S_t(s) u - A^0(t) u\|\, ds < \delta\varepsilon .$$

Questo prova che i) è soddisfatta.

D'altra parte

$$\|A^0(t+\delta) u_\delta\|^q \leqslant \|A^0(t) u_\delta\|^q + \sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| \cdot (1 + \|A^0(t) u_\delta\|^q) =$$
$$= \|A^0(t) u_\delta\|^q \Big(1 + \sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\|\Big) + \sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big(\sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\|\Big) \cdot \|A^0(t) u_\delta\|^q + \sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big(\sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| + cq\delta\Big) \cdot \|A^0(t) u\|^q + \sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\,(1+\varepsilon)\Big(\sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| + \big\|cq(t+\delta) x_0/\|x_0\| - cqt x_0/\|x_0\|\big\|\Big) \cdot$$
$$\cdot \Big(\|A^0(t) u\|^q + \sum_{j=1}^n \|g_j(t+\delta) - g_j(t)\| + \big\|cq(t+\delta) x_0/\|x_0\| - cqt x_0/\|x_0\|\big\|\Big) .$$

per un fissato $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$.

Sono soddisfatte dunque le ipotesi del teorema M e quindi l'affermazione del teorema I segue per il teorema M.

Osservazione. Diamo ora l'esempio di un caso in cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema M con $q > 1$ ma non con $q = 1$. Ciò assicura che il nostro risultato non rientra in quello di [8].

Sia X uno spazio di Hilbert; poniamo $f(t) = t|\sin(1/t)|$, $t \in [0, 1]$. È $f(t) \geqslant 0$, f è continua e derivabile eccettuata una infinità numerabile di punti. Di più, per ogni $\delta > 0$, f è assolutamente continua su $[\delta, 1]$ (essendo ivi lipschitziana), e quindi per ogni $\delta > 0$, per ogni $t \geqslant \delta$, è $f(t) - f(\delta) = \int_\delta^t f'(s)\, ds$.

Sia ora $M > 0$ fissato; poniamo

$$I_M x = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| \leqslant M \\ +\infty & \text{altrove}. \end{cases}$$

I_M è un funzionale convesso proprio semicontinuo inferiormente su X; indicato con ∂I_M il subdifferenziale di I_M, per [4], prop. 2.19. — $\big(f(t) \cdot I + \partial I_M\big)$ è massimale dissipativo su $\overline{S(0, M)}$ e, per ogni $x \in \overline{S(0, M)}$ risulta $\big(-(f(t)I + \partial I_M)\big)^0 x \in \{-f(t)x\}$, cioè $\big(-(f(t)I + \partial I_M)\big)^0 x = -f(t)x$. Poniamo $A(t) = -\big(f(t)I + \partial I_M\big)$, $D(t) = \overline{S(0, M)}$.

L'ipotesi (A.1) è soddisfatta essendo X un Hilbert; l'ipotesi (A.2) è soddisfatta ovviamente; l'ipotesi (A.4) è soddisfatta in quanto, essendo X un Hilbert, $A(t)$ è m-dissipativo ([4], prop. 2.2) (2).

Proviamo ora che è verificata la (A.3). Sia $t_n \to t_0$, $x_n \in \overline{S(0, M)}$, $x_n \xrightarrow{\text{fort.}} x_0$, $(x_n, y_n) \in A(t_n)$, $y_n \xrightarrow{\text{deb.}} y_0$; è $y_n \in -f(t_n)x_n - \partial I_M x_n$ se e solo se $y_n + f(t_n)x_n \in -\partial I_M x_n$; ma, per la continuità di f, $y_n + f(t_n)x_n \xrightarrow{\text{deb.}} y_0 + f(t_0)x_0$. Ora $-\partial I_M$ è m-dissipativo ([4], Ex. 2.3.4), e quindi $y_0 + f(t_0)x_0 \in -\partial I_M x_0$, cioè $y_0 \in -\big(f(t_0)I + \partial I_M\big)x_0$. Così è verificata (A.3). L'ipotesi (A.5) è poi soddisfatta perchè $D(t)$ è costante.

Proviamo ora che non è soddisfatta l'ultima ipotesi del teorema M con $q = 1$, mentre è soddisfatta (A.6) con $q = 2$. Ragioniamo per assurdo. Sia $t \in [0, 1[$ tale che esistano $V_j'(t)$ e $f'(t)$ per $j = 1, 2, \ldots, m$ (quindi q.d.). Sia $u \in X$, $u \neq 0$; per ogni $n \in N$ esisteranno $\delta_n \in]0, 1/n[$, $u_n \in \overline{S(0, M)}$ tali che

$$\|u - u_n - \delta_n f(t) u\| < \delta_n / n$$

---

(2) Si osservi che, per l'essere $A(t)$ massimale dissipativo, per $q = 1$ si avrebbero esattamente le ipotesi di [8].

e

$$f(t+\delta_n)\|u_n\| \leqslant \exp\Big((\alpha+1/n)\sum_{j=1}^m \|\bar g_j(t+\delta_n)-\bar g_j(t)\|\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(f(t)\|u\|+\sum_{j=1}^m \|\bar g_j(t+\delta_n)-\bar g_j(t)\|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Big(C_0\sum_{j=1}^m [V_j(t+\delta_n)-V_j(t)]\Big)\Big(f(t)\|u\|+\sum_{j=1}^m [V_j(t+\delta_n)-V_j(t)]\Big),$$

in quanto $A^0(s)u=-f(s)u$ per ogni $u\in\overline{S(0, M)}$; d'altra parte

$$\|u-u_n\| \leqslant \|u-u_n+\delta_n f(t)u\|+\delta_n f(t)\|u\| \leqslant (C+1/n)\,\delta_n\,;$$

si conclude che

$$\Big[\exp\Big(-C_0\sum_{j=1}^m [V_j(t+\delta_n)-V_j(t)]\Big)f(t+\delta_n)-f(t)\Big]\|u\| \leqslant$$

$$\leqslant C_1\delta_n+\sum_{j=1}^m [V_j(t+\delta_n)-V_j(t)]\,.$$

Dividendo per δ_n al limite per $n\to+\infty$

$$\Big(-C_0\sum_{j=1}^m V_j'(t)f(t)+f'(t)\Big)\|u\| \leqslant C_1+\sum_{j=1}^m V_j'(t)\,;$$

dunque q.d. su $]0,1[$

$$f'(t) \leqslant C_2\Big(1+\sum_{j=1}^m V_j'(t)\Big)\,.$$

Ma $t\to V_j(t)$ è non decrescente; dunque il secondo membro è sommabile su $[0,1]$; sia ora $\delta>0$; sarà anche f' sommabile su $[\delta,1]$, e quindi, se $\delta\leqslant t<\tau\leqslant 1$

$$f(\tau)-f(t) \leqslant C_2\Big((\tau-t)+\sum_{j=1}^m [V_j(\tau)-V_j(t)]\Big)\,;$$

essendo $t\to V_j(t)$ una funzione continua e crescente.

Sia ora $n \in N$ fissato. Prendiamo coppie di punti del tipo $\tau_k = 2/(\pi(4k+1))$, $t_k = 2/(\pi(4k+2))$, $k \leqslant n$, $k \in N$. Allora si ha:

$$2/(\pi(4k+1)) \leqslant C_2\Big((\tau_k - t_k) + \sum_{j=1}^{m}[V_j(\tau_k) - V_j(t_k)]\Big)\,.$$

Sommando in k da 1 a n

$$\sum_{k=1}^{n} 2/(\pi(4k+1)) \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{n}\Big((\tau_k - t_k) + \sum_{j=1}^{m}[V_j(\tau_k) - V_j(t_k)]\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_2\Big(1 + \sum_{j=1}^{m} V_j(1)\Big)\,,$$

il che è assurdo perchè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2/(\pi(4k+1))$ diverge.

D'altra parte $f^2(\cdot)$ è lipschitziana; dunque

$$\|A^0(\tau)u\|^2 - \|A^0(t)u\|^2 = (f^2(\tau) - f^2(t))\,\|u\| \leqslant C_3|t-\tau|\,\|u\|^2 \leqslant CM^2\,|t-\tau|$$

e sono soddisfatte le ipotesi del teorema I e dunque, a più forte ragione, quelle del teorema M con $q = 2$.

Teorema II. *Sia X uno spazio di Hilbert reale; indichiamo con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto interno e con $\|\cdot\|$ la norma associata. Supponiamo di più*

(A.7) *esistono due spazi normati V e W tali che $V \subseteq X \subseteq W$ con iniezione continua in modo che sia $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_W \cdot \|y\|_V$ per ogni $x \in X$, per ogni $y \in Y$;*

per ogni $t \in [0, T]$ siano $L(t)$, $B(t)$, $G(t)\colon D(t) \to X$ operatori, $A(t) \subseteq X \times X$, $D(A(t)) = D(t)$, $A(t)$ verificante (A.2), (A.3), (A.4), (A.5), *tali che*

$$A^0(t) = L(t) + B(t) + G(t)\,.$$

Supponiamo inoltre che:

(A.8) *esista f da $[0, T]$ a X continua e a variazione limitata tale che, se $t \leqslant \tau$, $u \in D(t) \cap D(\tau)$, allora*

$$\|B(t)u - B(\tau)u\|_W \leqslant \|f(t) - f(\tau)\|\,(1 + \|B(t)u\|^2)\,;$$

(A.9) *se* $t \leqslant \tau$, $u \in D(t) \cap D(\tau)$, *allora*

$$\langle B(\tau)u - B(t)u, L(\tau)u \rangle \leqslant 0 \ ;$$

(A.10) *esista* $N \in R^+$ *tale che, per ogni* $t \in [0, T]$, *per ogni* $u \in D(t)$,

$$G(t)u \in V \quad e \quad \|G(t)u\|_V \leqslant N;$$

(A.11) *se* $t \in [0, T]$, $u \in D(t)$, *allora*

$$\langle B(t)u, L(t)u \rangle \geqslant 0 \ ;$$

(A.12) *esistano* $f_1, \dots, f_n$ *funzioni da* $[0, T]$ *a* X *continue e a variazione limitata tali che, se* $t \leqslant \tau$, $u \in D(t) \cap D(\tau)$, *allora*

$$\|(L+G)(\tau)u - (L+G)(t)u\| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} \|f_j(\tau) - f_j(t)\|\Big) \cdot \big(1 + \|L(t)u\| + \|G(t)u\|\big) \ ;$$

(A.13) *se* $t \leqslant \tau$ *e* $u \in D(t) \cap D(\tau)$, *risulti*

$$\|B(\tau)u\| \leqslant \|B(t)u\| \,.$$

Allora per ogni $u_0 \in D(0)$ *esiste una ed una sola soluzione forte di* (P).

Di più tale soluzione verifica $u'(t) = \big(L(t) + B(t) + G(t)\big)u(t)$ *q.d. su* $[0, T]$.

Dimostrazione. È un corollario del teorema I.

Premettiamo alcune stime; conveniamo di scrivere talora $H(t)$ per $L(t) + G(t)$.

(2.1) Se $u \in D(t)$, allora

$$\|B(t)u\| \leqslant C'\big(1 + \|B(t)u + H(t)u\|\big) = C'\big(1 + \|A^0(t)u\|\big) \,.$$

Infatti

$$\|B(t)u + H(t)u\|^2 = \|B(t)u\|^2 + \|H(t)u\|^2 +$$
$$+ 2\langle B(t)u, H(t)u \rangle \geqslant \|B(t)u\|^2 + 2\langle B(t)u, L(t)u \rangle +$$
$$+ 2\langle B(t)u, G(t)u \rangle \geqslant \|B(t)u\|^2 + 2\langle B(t)u, G(t)u \rangle \ \ (\text{per (A.11)}) \,.$$

Dunque

$$\|B(t)u\|^2 \leqslant \|B(t)u + H(t)u\|^2 + 2|\langle B(t)u, G(t)u\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|B(t)u + H(t)u\|^2 + 2\|B(t)u\|_W \cdot \|G(t)u\|_V \text{ (per (A.7))} \leqslant$$
$$\leqslant \|B(t)u + H(t)u\|^2 + C_1\|B(t)u\|_W \text{ (per (A.10))} \leqslant$$
$$\leqslant \|B(t)u + H(t)u\|^2 + C_2\|B(t)u\|$$
$$\text{(per (A.7) in quanto l'iniezione di } X \text{ in } W \text{ è continua)}\,.$$

Di qui segue l'affermazione.

(2.2) Se $u \in D(t)$, allora

$$\|L(t)u\| + \|G(t)u\| \leqslant C''(1 + \|A^0(t)u\|)\,.$$

Infatti

$$\|A^0(t)u\|^2 = \|B(t)u\|^2 + \|L(t)u\|^2 + \|G(t)u\|^2 +$$
$$+ 2\langle B(t)u, L(t)u\rangle + 2\langle B(t)u, G(t)u\rangle + 2\langle L(t)u, G(t)u\rangle \geqslant \|L(t)u\|^2 +$$
$$+ \|G(t)u\|^2 + 2\langle B(t)u, G(t)u\rangle + 2\langle L(t)u, G(t)u\rangle \text{ (per (A.11))}\,.$$

Dunque

$$(\|L(t)u\| + \|G(t)u\|)^2 \leqslant 2(\|L(t)u\|^2 + \|G(t)u\|^2) \leqslant 2\|A^0(t)u\|^2 +$$
$$+ 4\|B(t)u\| \cdot \|G(t)u\| + 4\|L(t)u\| \cdot \|G(t)u\| \leqslant 2\|A^0(t)u\|^2 +$$
$$+ 4C_3(1 + \|A^0(t)u\|) \cdot \|G(t)u\| + 4\|L(t)u\| \cdot \|G(t)u\| \text{ (per (2.1))} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|A^0(t)u\|^2 + 4C_3(1 + \|A^0(t)u\|)\|G(t)u\| + C_4\|L(t)u\|$$
$$\text{(per (A.10) e (A.7), in quanto l'iniezione di } V \text{ in } X \text{ è continua)} \leqslant$$
$$\leqslant C_5(1 + \|A^0(t)u\|)(\|L(t)u\| + \|G(t)u\|) + 2\|A^0(t)u\|^2\,.$$

Di qui segue l'affermazione.

Ne consegue che (A.12) può essere rinforzata con

(A.12′) esistono $g_1, \ldots, g_n$ funzioni da $[0, T]$ a X continue e a variazione limitata tali che, se $t \leqslant \tau$, $u \in D(t) \cap D(\tau)$, allora

$$\|H(\tau)u - H(t)u\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|g_j(\tau) - g_j(t)\|(1 + \|A^0(t)u\|)\,.$$

(2.3) Sia $u \in D(t) \cap D(\tau)$, $t \leqslant \tau$; allora

$$\|B(\tau)u + H(\tau)u\|^2 - \|B(t)u + H(\tau)u\|^2 \leqslant C''' \|f(\tau) - f(t)\| \left(1 + \|A^0(t)u\|^2\right).$$

Infatti

$$\begin{aligned}
&\|B(\tau)u + H(\tau)u\|^2 - \|B(t)u + H(\tau)u\|^2 = \|B(\tau)u\|^2 + \\
&\quad + 2\langle B(\tau)u, H(\tau)u\rangle - \|B(t)u\|^2 - 2\langle B(t)u, H(\tau)u\rangle \leqslant \\
&\quad \leqslant 2\langle B(\tau)u - B(t)u, H(\tau)u\rangle \ \ (\text{per (A.13)}) = \\
&\quad = 2\langle B(\tau)u - B(t)u, L(\tau)u\rangle + 2\langle B(\tau)u - B(t)u, G(\tau)u\rangle \leqslant \\
&\quad \leqslant 2\langle B(\tau)u - B(t)u, G(\tau)u\rangle \ \ (\text{per (A.9)}) \leqslant 2\|B(\tau)u - B(t)u\|_W \cdot \\
&\quad \cdot \|G(\tau)u\|_V \ \ (\text{per (A.7)}) \leqslant C_6 \|B(\tau)u - B(t)u\|_W \ \ (\text{per (A.10)}) \leqslant \\
&\quad \leqslant C_7 \|f(\tau) - f(t)\| \left(1 + \|B(t)u\|^2\right) \ \ (\text{per (A.8)}) \leqslant \\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant C''' \|f(\tau) - f(t)\| \left(1 + \|A^0(t)u\|^2\right) \ \ (\text{per (2.1)}).
\end{aligned}$$

Ora, se $u \in D(t) \cap D(\tau)$ e $t \leqslant \tau$, risulta

$$\begin{aligned}
\|A^0(\tau)u\|^2 - \|A^0(t)u\|^2 &= \left(\|B(\tau)u + H(\tau)u\|^2 - \|B(t)u + H(\tau)u\|^2\right) + \\
&\quad + \left(\|B(t)u + H(\tau)u\|^2 - \|B(t)u + H(t)u\|^2\right) = E_1(t, \tau) + E_2(t, \tau).
\end{aligned}$$

Per (2.3)

$$E_1(t, \tau) \leqslant C''' \|f(t) - f(\tau)\| \left(1 + \|A^0(t)u\|^2\right);$$

ma

$$\begin{aligned}
E_2(t, \tau) &= \|H(\tau)u\|^2 - \|H(t)u\|^2 + 2\langle B(t)u, H(\tau)u - H(t)u\rangle = \\
&= \left(\|H(\tau)u\| - \|H(t)u\|\right) \cdot \left(\|H(\tau)u\| + \|H(t)u\|\right) + \\
&\quad + 2\langle B(t)u, H(\tau)u - H(t)u\rangle \leqslant \\
&\leqslant \|H(\tau)u - H(t)u\| \left(2\|B(t)u\| + \|H(\tau)u\| + \|H(t)u\|\right) \leqslant \\
&\leqslant \|H(\tau)u - H(t)u\| \left(2\|B(t)u\| + 2\|H(t)u\| + \|H(t)u - H(\tau)u\|\right) \leqslant \\
&\quad \leqslant C_8 \sum_{j=1}^{n} \|g_j(\tau) - g_j(t)\| \cdot \left(1 + \|A^0(t)u\|^2\right) \ \ (\text{per (A.12}'), (2.1), (2.2)).
\end{aligned}$$

Dunque è soddisfatta l'ipotesi (A.6) del teorema I con $q = 2$ e quindi l'affermazione segue.

Un semplice esempio di una situazione in cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema II è la seguente:

Siano $T > 0$, $\varphi\colon [0, T] \to R^+$ crescente e continua,

$$\beta\colon \{(t, \xi) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ -\varphi(t) < \xi < \varphi(t)\} \to \mathbf{R}$$

continua e tale che

1) per ogni $t \in [0, T]\, \xi \to \beta(t, \xi)$ è non crescente di classe $C^{(1)}$;

2) $\lim_{\xi \to -\varphi(t)+0} \beta(t, q) = +\infty$, $\lim_{\xi \to \varphi(t)-0} \beta(t, \xi) = -\infty$ per ogni $t \in [0, T]$;

3) $\beta(t, 0) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$;

4) esiste $f\colon [0, T] \to R$ continua e a variazione limitata tale che, se $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T$ e $|\xi| < \varphi(t)$, allora

$$|\beta(t, \xi) - \beta(\tau, \xi)| \leqslant |f(t) - f(\tau)|\bigl(1 + (\beta(t, \xi))^2\bigr)\ ;$$

5) $|\beta(\tau, \xi)| \leqslant |\beta(t, \xi)|$ per $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T$;

6) $(\partial/\partial\xi)\beta(t, \xi) \leqslant (\partial/\partial\xi)\beta(\tau, \xi)$ per $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T$;

sia $\psi\colon [0, T] \times R \to R$ tale che:

7) esiste $C > 0$ tale che

$$|\psi(t, \xi) - \psi(t, \eta) \leqslant C|\xi - \eta| \qquad \text{per ogni } t \in [0, T]\,,$$

per ogni $\xi, \eta \in R$;

8) per ogni $t, \tau \in [0, T]\, t \leqslant \tau$,

$$|\psi(t, \xi) - \psi(\tau, \xi)| \leqslant |g(t) - g(\tau)|(1 + |\xi|)\,,$$

dove g è continua a variazione limitata su $[0, T]$.

Sia ora Ω un aperto limitato di R^n con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare; posto $X = L^2(\Omega)$, $V = L^\infty(\Omega)$, $W = L^1(\Omega)$, $D(t) = \{u \in L^2(\Omega)$ tali che $|u(x)| < \varphi(t)$ q.d. su Ω e $\beta(t, u(\cdot)) \in L^2(\Omega)\} \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, se $u \in D(t)$, $L(t)u = \Delta u$, $(B(t)u)(x) = \beta(t, u(x))$, $(G(t)u)(x) = \psi(t, u(x))$, si verifica allora che sono soddisfatte le ipotesi del teorema II; ne consegue che, se $u_0 \in D(0)$, esiste una ed una sola $u\colon [0, T] \to X$ assolutamente continua « soluzione » di

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = (\Delta u)(t, x) + \beta(t, u(t, x)) + \psi(t, u(t, x))$$

$$u(0, x) = u(x) \qquad \text{su } \Omega$$

$$u(t, \cdot)/\partial\Omega = 0 \, .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Attouch - P. Benilan - A. Damlamian - C. Picard, *Equations d'évolution avec condition unilatérale*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **279** (1974), 607-609.

[2] H. Attouch - A. Damlamian, *Problèmes d'évolution dans les hilberts et applications*, J. Math. pure et appl., **54** (1975), 53-74.

[3] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Bucuresti, 1976.

[4] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Amsterdam, 1973.

[5] M. Crandall - T. Liggett, *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math., **93** (1971), 265-298.

[6] M. Crandall - A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, Israel J. Math., **11** (1972), 57-94.

[7] N. Kenmochi - T. Nagai, *Weak solutions for certain nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities*, Hiroshima Math. J., **5** (1975), 525-535.

[8] R. H. Martin jr., *Generating an evolution system in a class of uniformly convex Banach spaces*, J. Funct. Analysis, **11** (1972), 62-76.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 settembre 1976.