RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO OBRECHT

Un problema ai limiti ben posto per l'equazione differenziale $u''' = Au + f$ in uno spazio di Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 243-274

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__243_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Un problema ai limiti ben posto per l'equazione differenziale $u''' = Au + f$ in uno spazio di Banach.

ENRICO OBRECHT (*)

SUMMARY - In this paper, we study a well posed boundary value problem for the differential equation in a Banach space $u''' = Au + f$, assuming that $-A$ generates an analytic semigroup and has a bounded inverse. Splitting the differential operator in a product of a forward parabolic operator of the second order and of a backward parabolic operator of the first order, we prove a uniqueness theorem and an existence one for classical solutions of the problem, under natural hypotheses on f and on boundary values.

1. Introduzione.

In [10], Hille ha dimostrato che il problema di Cauchy in $\boldsymbol{R}^+$ per l'equazione differenziale in uno spazio di Banach

$$u^{(n)} = B^n u ,$$

dove B è il generatore infinitesimale di un semigruppo, fortemente continuo in zero, di operatori limitati, non è ben posto se $n \geqslant 3$ e B non è limitato.

Successivamente, Fattorini [3] ha provato che, in uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff, localmente convesso, completo e

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Piazza di Porta San Donato 5, Bologna.

« tonnelé », se il problema di Cauchy in $\boldsymbol{R}^+$ per l'equazione

$$u^{(n)} = Au, \tag{1}$$

dove A è un operatore lineare con insieme risolvente non vuoto, è « uniformemente ben posto » e $n \geqslant 3$, allora A è limitato. Nel caso di uno spazio di Banach, egli ha dimostrato lo stesso risultato, supponendo il problema di Cauchy per la (1) solamente « ben posto » e $n \geqslant 3$.

Questi risultati hanno portato allo studio, per l'equazione (1), di problemi diversi da quello di Cauchy. Già Hille, nel lavoro citato, dette delle condizioni di risolubilità per il problema di Cauchy « ridotto », consistente nell'assegnare un numero di condizioni iniziali inferiore all'ordine dell'equazione.

Altri autori (Dubinskii ([1], [2]), Gasymov [8], Fattorini-Radnitz [6]) hanno studiato questo problema in $\boldsymbol{R}^+$, imponendo anche condizioni di comportamento della soluzione all'infinito. In [1], [2], [8], vengono studiate equazioni più generali della (1), mentre in [6] si fanno ipotesi molto deboli sull'operatore A, sostanzialmente le stesse che in [3]. Inoltre, in [6], si studiano delle condizioni necessarie su A affinchè i problemi studiati siano ben posti.

Sono stati poco studiati, invece, problemi ai limiti per l'equazione (1) in un intervallo limitato. Se ne sono occupati, nel caso di uno spazio di Hilbert, Friedman [7], che ha considerato un'equazione più generale della (1) e ha supposto A autoaggiunto, e Yurčuk ([15], [16]), che ha studiato soluzioni in L^2 a valori nello spazio di Hilbert considerato, facendo ipotesi sulla positività di $\mathrm{Re}\,(Ax, x)$ o di $\mathrm{Im}\,(Ax, x)$.

Inoltre, Fattorini ([4], [5]) ha studiato delle condizioni necessarie affinchè un problema ai limiti per l'equazione (1) sia ben posto, ottenendo delle condizioni sulla disposizione dello spettro di A e sul numero dei dati iniziali e finali.

Infine, rileviamo che, se n è pari, problemi ai limiti molto generali per l'equazione (1) possono essere studiati coi metodi di Grisvard [9].

In questo lavoro, studiamo il problema ai limiti

$$\left\{\begin{aligned} &u'''(t) = Au(t) + f(t)\,, \qquad \text{in }]0, T[\,, \\ &u(0) = u_0\,, \\ &u'(0) = u_1\,, \\ &u(T) = u_T\,, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

in uno spazio di Banach, supponendo che $-A$ sia il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico e che A sia invertibile con inverso limitato.

I metodi utilizzati consistono, essenzialmente, nel pensare l'operatore differenziale $d^3/dt^3 - A$ come prodotto di un operatore parabolico del secondo ordine e di un operatore parabolico retrogrado del primo ordine, definiti per mezzo delle potenze frazionarie di A. A questi applichiamo le tecniche classiche dei semigruppi analitici e quelle, sviluppate in [14], per lo studio di operatori parabolici astratti di ordine superiore.

Vogliamo osservare come, con modifiche solo formali, avremmo potuto studiare il problema

$$\begin{cases} u'''(t) = Bu(t) + f(t)\,, & \text{in }]0, T[\,, \\ u(0) = u_0\,, \\ u(T) = u_T\,, \\ u'(T) = u_1\,, \end{cases}$$

dove B è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico ed è invertibile con inverso limitato.

Diamo, ora, un breve riassunto del lavoro.

In 2. richiamiamo risultati noti sui semigruppi analitici e sugli operatori parabolici di ordine superiore, che saranno costantemente utilizzati nel seguito, e dimostriamo alcuni semplici lemmi.

In 3. dimostriamo una formula di rappresentazione delle soluzioni, nel senso della Definizione 1, dell'equazione

$$u'''(t) = Au(t) + f(t)$$

supponendo f continua su $[0, T]$. Questa rappresentazione, però, contiene non solo i dati del problema, ma anche $u'(T)$ e $u''(T)$.

In 4. mostriamo che, se T è maggiore di un'opportuna costante, che dipende solo dal tipo del semigruppo generato da $-A^{1/3}$, è possibile eliminare la dipendenza da $u'(T)$ e da $u''(T)$ nella formula di rappresentazione ottenuta in 3. Questo prova, in particolare, che il problema (2) ammette, almeno per i T considerati, al più una soluzione.

In 5., infine, supponendo T come in 4. e f hölderiana su $[0, T]$, dimostriamo che la formula ottenuta in 4. fornisce effettivamente una soluzione del problema (2).

2. Alcuni richiami.

Siano X uno spazio di Banach complesso e A un operatore lineare da X in sè, con dominio denso, soddisfacente l'ipotesi seguente, che supporremo sempre verificata nel seguito.

IPOTESI. *Esistono* $M \in \mathbf{R}^+$ *e* $\theta_0 \in]0, \pi/2[$, *tali che*:

1) $\{z \in \mathbf{C};\ |\arg z| \geqslant \theta_0\} \subset \varrho(A)$, *dove con* $\varrho(A)$ *abbiamo indicato l'insieme risolvente dell'operatore* A;

2) $\|(A + \lambda)^{-1}\| \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\arg \lambda| < \pi - \theta_0$.

Qui e nel seguito, conveniamo di scegliere l'argomento di un numero complesso fra $-\pi$ e π.

OSSERVAZIONE 1. È noto che, sotto questa ipotesi, $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico, che A è invertibile e che $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Qui e nel seguito, con $\mathcal{L}(X)$ intendiamo lo spazio di Banach delle applicazioni lineari limitate di dominio X e a valori in X, con la norma usuale.

OSSERVAZIONE 2. È noto (cfr. [12], n. 10) che, sotto questa ipotesi, è possibile definire la potenza frazionaria $A^{1/3}$ dell'operatore A e che $-A^{1/3}$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico nel settore $\{z \in \mathbf{C};\ |\arg z| < \pi/2 - \theta_0/3\}$. Inoltre, $A^{1/3}$ è invertibile, $A^{-1/3} = (A^{1/3})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e risulta $\|(A^{1/3} + \lambda)^{-1}\| \leqslant M'(1 + |\lambda|)^{-1}$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\arg \lambda| < \pi - \theta_0/3$, dove M' è un'opportuna costante positiva.

Con $\mathcal{D}(A^{k/3})$ indicheremo il dominio dell'operatore $A^{k/3}$, $k \in N$.

Poniamo, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$:

$$P(\lambda)\colon \mathcal{D}(A^{2/3}) \to X\,, \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda A^{1/3} + A^{2/3}\,.$$

Si ha il risultato seguente.

LEMMA 1. *L'operatore differenziale*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} + A^{1/3}\frac{d}{dt} + A^{2/3}$$

è parabolico, cioè esistono $M_1 \in \mathbf{R}^+$, $\theta_1 \in]\pi/2, \pi[$, *tali che*:

a) $\{z \in \boldsymbol{C};\ |\arg z| \leqslant \theta_1\} \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C};\ \exists P^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{L}(X)\}$, *dove abbiamo posto* $P^{-1}(\lambda) = [P(\lambda)]^{-1}$;

b) $\|A^{k/3}P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M_1[1 + |\lambda|]^{k-2}$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{C}$, $|\arg \lambda| \leqslant \theta_1$ *e per* $k = 0, 1, 2$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè

$$P^{-1}(\lambda) = (A^{1/3} - \exp[(2\pi i)/3]\,\lambda)^{-1}(A^{1/3} - \exp[(-2\pi i)/3]\,\lambda)^{-1},$$

$P^{-1}(\lambda)$ esiste ed è limitato se, e solo se, $\exp[(2\pi i)/3]\,\lambda$ e $\exp[(-2\pi i)/3]\,\lambda$ appartengono a $\varrho(A^{1/3})$. Questo si verifica sicuramente se

$$|\arg \lambda + (2\pi)/3| \geqslant \theta_0/3 \qquad \text{e} \qquad |\arg \lambda - (2\pi)/3| \geqslant \theta_0/3\,.$$

Pertanto, $\forall \lambda \in \boldsymbol{C}$, tale che $|\arg \lambda| \leqslant (2\pi)/3 - \theta_0/3$, $P^{-1}(\lambda)$ esiste ed è limitato. Per questi λ, si ha:

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leqslant \|(A^{1/3} - \lambda \exp[(2\pi i)/3])^{-1}\| \cdot \\ \cdot \|(A^{1/3} - \lambda \exp[(-2\pi i)/3])^{-1}\| \leqslant M'^2(1 + |\lambda|)^{-2},$$

$$\|A^{1/3}P^{-1}(\lambda)\| \leqslant [1 + \|\lambda(A^{1/3} - \lambda \exp[(2\pi i)/3])^{-1}\|] \cdot \\ \cdot \|(A^{1/3} - \lambda \exp[(-2\pi i)/3])^{-1}\| \leqslant M_2(1 + |\lambda|)^{-1},$$

$$\|A^{2/3}P^{-1}(\lambda)\| \leqslant [1 + \|\lambda(A^{1/3} - \lambda \exp[(2\pi i)/3])^{-1}\|] \cdot \\ \cdot [1 + \|\lambda(A^{1/3} - \lambda \exp[(-2\pi i)/3])^{-1}\|] \leqslant M_3\,.$$

Questo prova l'affermazione.

Enunciamo, ora, una serie di risultati noti che ci serviranno sistematicamente nel seguito.

LEMMA 2. *Sia* $\{\exp(-tA^{1/3});\ t \geqslant 0\}$ *il semigruppo generato da* $-A^{1/3}$. *Si ha*:

a) *la funzione* $t \to \exp(-tA^{1/3})$ *è prolungabile analiticamente nel settore* $S = \{z \in \boldsymbol{C};\ |\arg z| < \pi/2 - \theta_0/3\}$ *e, per questi* z, $\exp(-zA^{1/3}) \in \mathfrak{L}(X)$;

b) $\exp(-zA^{1/3})x \in \mathfrak{D}(A^{k/3})$, $\forall k \in N$, $\forall z \in S$ *e* $\forall x \in X$;

c) $d^k/dz^k \exp(-zA^{1/3})x = (-1)^k A^{k/3} \exp(-zA^{1/3})$, $\forall z \in S$ *e* $\forall k \in N$;

d) *esistono delle costanti* M_k, $k \in N$, *tali che*

$$\left\| \frac{d^k}{dz^k} \exp(-zA^{1/3}) \right\| \leqslant M_k |z|^{-k} \exp(\delta \operatorname{Re} z) , \qquad \forall k \in \bar{I}^+ = I^+ \cup \{0\}$$

e $\forall z \in S$, *dove* δ *è il tipo* (*negativo*) *del semigruppo*;

e) $\exp(-zA^{1/3})x \xrightarrow[z\to 0]{} x$, $\forall x \in X$;

f) $A^{1/3}\exp(-zA^{1/3})x = \exp(-zA^{1/3})A^{1/3}x$, $\forall x \in \mathfrak{D}(A^{1/3})$ *e* $\forall z \in S$.

Questi risultati sono classici; si veda, per esempio, [13].

Abbiamo provato in [14] che, se $P(d/dt)$ è un operatore parabolico, si possono definire gli operatori

$$U_k(t) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \lambda^k \exp(\lambda t) P^{-1}(\lambda)\, d\lambda , \tag{3}$$

$\forall k \in \bar{I}^+$ e $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$, dove Γ è una curva orientata contenuta nell'insieme $\{\lambda \in \boldsymbol{C};\ \exists P^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{L}(X)\}$, che va all'infinito nel semipiano $\operatorname{Re}\lambda < 0$ « contornando » in verso positivo il complementare dell'insieme $\{\lambda \in \boldsymbol{C};\ \exists P^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{L}(X)\}$. In [14] abbiamo provato i seguenti risultati.

Lemma 3. *Sia* $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda A^{1/3} + A^{2/3}$ *e siano* $U_k(t)$, $k \in \bar{I}^+$, *gli operatori definiti dalla* (3). *Allora*:

a) $U_k(t) \in \mathfrak{L}(X)$, $\forall t \in R^+$, *e si prolunga analiticamente in un settore di* $\boldsymbol{C}$ *contenente* $\boldsymbol{R}_+$;

b) $U_k(t)x \in \mathfrak{D}(A^{2/3})$, $\forall k \in \bar{I}^+$, $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$ *e* $\forall x \in X$;

c) $\dfrac{d^h}{dt^h} U_k(t) = U_{k+h}(t)$, $\forall k \in \bar{I}^+$, $\forall h \in N$ *e* $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$;

d) *esistono delle costanti* $M_{k,h}$, *tali che*

$$\|A^{h/3}U_k(t)\| \leqslant M_{k,h}t^{1-k-h} , \qquad \textit{per } k,\ h = 0, 1, 2 \ \textit{ e } \forall t \in \boldsymbol{R}^+;$$

e) $U_1(t)x \xrightarrow[t\to 0+]{} x$, $\forall x \in X$;

f) $U_{k+2}(t) + A^{1/3}U_{k+1}(t) + A^{2/3}U_k(t) = 0$, $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$ *e* $\forall k \in \bar{I}^+$.

Nel seguito, avremo anche bisogno dei risultati seguenti.

Lemma 4. *Si ha*:

a) $A^{h/3}P^{-1}(\lambda)x = P^{-1}(\lambda)A^{h/3}x$, $\forall h \in N$ *e* $\forall x \in \mathfrak{D}(A^{h/3})$;

b) $A^{h/3}\, U_k(t)\, x = U_k(t)\, A^{h/3} x$, $\forall h \in N$, $\forall x \in \mathfrak{D}(A^{h/3})$, $\forall k \in \bar{I}^+$ *e* $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$.

DIMOSTRAZIONE. È immediata.

LEMMA 5. $A^{1/3}\, U_0(t)\, x \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, $\forall x \in X$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $y \in \mathfrak{D}(A^{1/3})$. Allora, per i Lemmi 4*b*) e 3*d*), $A^{1/3}\, U_0(t)\, y = U_0(t)\, A^{1/3} y \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$. Inoltre, sempre per il Lemma 3*d*), $\|A^{1/3}\, U_0(t)\| \leqslant C$, $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$. Poichè $\mathfrak{D}(A^{1/3})$ è denso in X, essendo il dominio del generatore infinitesimale di un semigruppo analitico, $A^{1/3}\, U_0(t)\, x \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, $\forall x \in X$.

LEMMA 6. *Si ha,* $\forall t, s \in \boldsymbol{R}^+$, $\forall x \in X$ *e* $\forall k \in \bar{I}^+$:

$$U_k(t) \exp(-sA^{1/3})\, x = \exp(-sA^{1/3})\, U_k(t)\, x\,.$$

DIMOSTRAZIONE. È immediata.

LEMMA 7. *Siano* $T \in \boldsymbol{R}^+$, $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$. *Poniamo,* $\forall n \in N$: $f_n(t) = n(A^{1/3} + n)^{-1} f(t)$, $t \in [0, T]$. *Allora, si ha*:

a) $f_n \in \mathcal{C}([0, T]; X)$, $\forall n \in N$;

b) $f_n(t) \in \mathfrak{D}(A^{1/3})$, $\forall t \in [0, T]$ *e* $\forall n \in N$;

c) la funzione $t \to A^{1/3} f_n(t)$ *è continua su* $[0, T]$, $\forall n \in N$;

d) esiste $C \in \boldsymbol{R}^+$, *tale che* $\|f_n(t)\| \leqslant C$, $\forall n \in N$ *e* $\forall t \in [0, T]$;

e) $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

DIMOSTRAZIONE. *a*), *b*), *c*), *d*) sono immediate. Inoltre, *e*) è ben nota (cfr. [11], Teorema 10.6.1).

3. La formula di rappresentazione.

Siano $T \in \boldsymbol{R}^+$ fissato, $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ e A soddisfacente l'ipotesi formulata in 2.

DEFINIZIONE 1. Diremo che la funzione $u\colon [0, T] \to X$ è soluzione, in $[0, T]$, dell'equazione differenziale

$$u''' = Au + f\,, \tag{4}$$

se verifica le condizioni seguenti:

a) $u \in \mathcal{C}^{(3)}(]0, T[; X)$;

b) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $\forall t \in]0, T[$;

c) esistono, nella topologia di X, i limiti

$$\lim_{t\to 0+} u^{(k)}(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to T-} u^{(k)}(t)\,, \qquad k = 0, 1, 2;$$

d) per ogni $t \in]0, T[$, si ha $u'''(t) = Au(t) + f(t)$.

OSSERVAZIONE 3. Dalla definizione precedente e dalla continuità di f segue che la funzione $t \to Au(t)$ è continua in $]0, T[$.

TEOREMA 1. *Sia u una soluzione dell'equazione differenziale* (4). *Allora,* $\forall t \in]0, T[$, *si ha:*

$$(5) \qquad u(t) = [U_1(t) + A^{1/3} U_0(t)]u(0) + U_0(t)u'(0) + \\ + \sum_{k=0}^{2} \int_0^t U_0(t-\tau)A^{k/3} \exp[-(T-\tau)A^{1/3}]u^{(2-k)}(T)\,d\tau - \\ - \int_{\Delta_t} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau\,,$$

dove $\Delta_t = \{(s, \tau) \in \boldsymbol{R}^2;\ \tau \in [0, t],\ s \in [\tau, T]\}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $t \in]0, T[$, $\varepsilon, \delta \in]0, T-t[$, $\eta \in]0, t[$ e poniamo

$$\Delta_{t,\eta,\varepsilon} = \{(s, \tau) \in \boldsymbol{R}^2;\ \tau \in [0, t-\eta],\ s \in [\tau + \varepsilon, T]\}\,,$$

$$\Delta_{t,\eta,\varepsilon,\delta} = \{(s, \tau) \in \Delta_{t,\eta,\varepsilon};\ s \leqslant T - \delta\}\,.$$

Poichè u è soluzione in $[0, T]$ dell'equazione (4), si ha:

$$\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon,\delta}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]\,u'''(s)\,ds\,d\tau = \\ = \int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon,\delta}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}][Au(s) + f(s)]\,ds\,d\tau\,.$$

Effettuando un'integrazione per parti, l'integrale al primo membro risulta uguale a

$$\int_0^{t-\eta} U_0(t-\tau)\exp[-(T-\tau-\delta)A^{1/3}]u''(T-\delta)\,d\tau -$$
$$-\exp(-\varepsilon A^{1/3})\int_\varepsilon^{t+\varepsilon-\eta} U_0(t-s+\varepsilon)u''(s)\,ds +$$
$$+\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon,\delta}} A^{1/3}U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]u''(s)\,ds\,d\tau \xrightarrow[\delta\to 0+]{}$$
$$\xrightarrow[\delta\to 0+]{} \int_0^{t-\eta} U_0(t-\tau)\exp[-(T-\tau)A^{1/3}]u''(T)\,d\tau -$$
$$-\exp(-\varepsilon A^{1/3})\int_\varepsilon^{t+\varepsilon-\eta} U_0(t-s+\varepsilon)u''(s)\,ds +$$
$$+\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon}} A^{1/3}U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]\,u''(s)\,ds\,d\tau\,,$$

per il teorema di convergenza dominata, qualora si tengano presenti i Lemmi 2*a*), 2*d*) e 3*d*). D'altra parte, poichè evidentemente

$$\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon,\delta}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau \xrightarrow[\delta\to 0+]{}$$
$$\xrightarrow[\delta\to 0+]{} \int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau\,,$$

esiste l'integrale generalizzato

$$\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]\,Au(s)\,ds\,d\tau\,,$$

inteso come limite, per $\delta\to 0+$, dell'integrale esteso a $\Delta_{t,\eta,\varepsilon,\delta}$. Pertanto,

$$\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}][Au(s)+f(s)]\,ds\,d\tau =$$
$$=\int_0^{t-\eta} U_0(t-\tau)\exp[-(T-\tau)A^{1/3}]\,u''(T)\,d\tau -$$
$$-\exp(-\varepsilon A^{1/3})\int_\varepsilon^{t+\varepsilon-\eta} U_0(t-s+\varepsilon)\,u''(s)\,ds +$$
$$+\int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon}} A^{1/3}U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]\,u''(s)\,ds\,d\tau\,.$$

Integrando ripetutamente per parti gli ultimi due integrali scritti e tenendo presenti i Lemmi $2f$) e $3f$), si arriva alla seguente relazione:

$$(6)\qquad \int_{\Delta_{t,\eta,\varepsilon}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau =$$

$$= \sum_{j=0}^{2}\int_0^{t-\eta} U_0(t-\tau)A^{j/3}\exp[-(T-\tau)A^{1/3}]u^{(2-j)}(T)\,d\tau - \exp(-\varepsilon A^{1/3})\cdot$$

$$\cdot\big([U_1(\eta)+A^{1/3}U_0(\eta)]u(t+\varepsilon-\eta)+U_0(\eta)\,u'(t+\varepsilon-\eta)\big)+$$

$$+\exp(-\varepsilon A^{1/3})\big([U_1(t)+A^{1/3}U_0(t)]u(\varepsilon)+U_0(t)\,u'(\varepsilon)\big)\,.$$

Poniamo, ora, $\Delta_{t,\eta}=\{(s,\tau)\in \boldsymbol{R}^2;\ \tau\in[0,t-\eta],\ s\in[\tau,T]\}$ e facciamo tendere ε a zero nella (6). Tenendo presente il Lemma $2e$), otteniamo la seguente relazione:

$$(7)\qquad \int_{\Delta_{t,\eta}} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau =$$

$$= [U_1(t)+A^{1/3}U_0(t)]u(0)+U_0(t)u'(0)-$$

$$-[U_1(\eta)+A^{1/3}U_0(\eta)]u(t-\eta)-U_0(\eta)\,u'(t-\eta)+$$

$$+\sum_{j=0}^{2}\int_0^{t-\eta}U_0(t-\tau)A^{j/3}\exp[-(T-\tau)A^{1/3}]\,u^{(2-j)}(T)\,d\tau\,.$$

Infine, facendo tendere η a zero nella (7) e servendosi dei Lemmi $3d$), $3e$) e 5, si ottiene la (5).

4. Il teorema di unicità.

Poniamo, $\forall t\in\,]0,T[$ e $\forall p\in \bar{I}^+$:

$$H_p(t)=A^{p/3}\exp[-(T-t)A^{1/3}]\int_0^t U_0(s)\exp(-sA^{1/3})\,ds\,.$$

È immediato verificare che $H_p\in \mathcal{C}(]0,T[;\mathcal{L}(X))$ e che

$$H_p(t)=\int_0^t U_0(t-\tau)A^{p/3}\exp[-(T-\tau)A^{1/3}]\,d\tau\,,\qquad \forall t\in\,]0,T[\ \ e\ \ \forall p\in\bar{I}^+\,.$$

DEFINIZIONE 2. Siano $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$, u_0, u_1, $u_T \in X$. Diremo che una funzione $u: [0, T] \to X$ è soluzione del problema ai limiti

$$(8) \qquad \begin{cases} u''' = Au + f, & \text{in }]0, T[, \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ u(T) = u_T \end{cases}$$

se u è soluzione in $[0, T]$, nel senso della Definizione 1, dell'equazione differenziale (4) e se

$$\lim_{t \to 0+} u(t) = u_0, \qquad \lim_{t \to 0+} u'(t) = u_1, \qquad \lim_{t \to T-} u(t) = u_T.$$

In questo paragrafo e nel successivo, useremo la convenzione seguente: se I è un intervallo di $\boldsymbol{R}$ e $g: I \to X$, indicheremo con χ_I la funzione caratteristica di I e con $\chi_I g$ la funzione da $\boldsymbol{R}$ a X, uguale a g in I e nulla fuori di I.

TEOREMA 2. *Siano* $T \in \big]\big(-2\log(4/\sqrt{3}+1)\big)/(3\delta), +\infty\big[$, *dove* δ *è il tipo* (*negativo*) *del semigruppo generato da* $-A^{1/3}$, $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$, u_0, $u_1 \in X$, $u_T \in \mathcal{D}(A^{2/3})$. *Allora, se* u *è una soluzione del problema* (8), *tale che* $\lim_{t \to T-} u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/3})$, *si ha*, $\forall t \in]0, T[$:

$$(9) \qquad \begin{aligned} u(t) = {} & [U_1(t) + A^{1/3}U_0(t)]u_0 + U_0(t)u_1 - \\ & - \int_{\Delta_t} U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau + \\ & + H_0(t)[H_2(T)]^{-1}\big(A^{1/3}U_2(T)u_0 + A^{2/3}u_T + \\ & + [A^{1/3}U_1(T) + U_2(T)]u_1 - \\ & - \tfrac{1}{3}[2A^{1/3}U_0(T) + U_1(T)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds + \\ & \qquad + \tfrac{1}{3}\int_0^T [2A^{1/3}U_0(T-s) + U_1(T-s)]f(s)\,ds\big), \end{aligned}$$

dove si è posto $H_2(T)x = \lim_{t \to T-} H_2(t)x$, $\forall x \in X$.

Pertanto, il problema (8) *ammette al più una soluzione nella classe delle funzioni appartenenti a* $\mathcal{C}^{(3)}(]0, T[; X) \cap \mathcal{C}^{(2)}([0, T]; X)$ *e tali che* $u(T) \in \mathcal{D}(A^{2/3})$, $u'(T) \in \mathcal{D}(A^{1/3})$.

Premettiamo alcuni lemmi alla dimostrazione del Teorema.

LEMMA 8.

a) *Si ha* $H_p \in \mathcal{C}^{(\infty)}(]0, T[; \mathcal{L}(X))$, $\forall p \in \bar{I}^+$, *e risulta,* $\forall p \in \bar{I}^+$, $\forall r \in N$ *e* $\forall t \in]0, T[$,

$$H_p^{(r)}(t) = H_{p+r}(t) + \sum_{j=0}^{r-1} A^{(p+j)/3} \exp(-TA^{1/3})\, U_{r-j-1}(t); \tag{10}$$

b) $H_p^{(r)}(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, *nella topologia di* $\mathcal{L}(X)$, $\forall p \in \bar{I}^+$ *e per* $r = 0, 1$, *mentre* $H_p''(t)x \xrightarrow[t\to 0+]{} A^{p/3} \exp(-TA^{1/3})x$, *nella topologia di* X, $\forall x \in X$ *e* $\forall p \in \bar{I}^+$;

c) $H_p(t) \xrightarrow[t\to T-]{} \int_0^T A^{p/3}\, U_0(s) \exp(-sA^{1/3})\, ds = H_p(T)$ *nella topologia di* $\mathcal{L}(X)$, *se* $p = 0, 1$, *e*

$$H_p(t)x \xrightarrow[t\to T-]{} \int_0^T A^{p/3}\, U_0(s) \exp(-sA^{1/3})\, x\, ds = H_p(T)x\,,$$

nella topologia di X, $\forall p \in N$, $p \geqslant 2$, *e* $\forall x \in \mathcal{D}(A^{(p-2)/3})$. *In particolare,* $H_0(T)x \in \mathcal{D}(A^{2/3})$, $\forall x \in X$, *e* $H_2(T) \in \mathcal{L}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. È pressochè immediato che $H_p \in \mathcal{C}^{(1)}(]0, T[; \mathcal{L}(X))$, $\forall p \in \bar{I}^+$ e che valga la (10) per $r = 1$. Il resto dell'affermazione *a*) si prova con un semplice ragionamento induttivo rispetto a r.

L'affermazione *b*) è una conseguenza immediata di *a*) e dei Lemmi 3*d*) e 3*e*).

Proviamo, ora, *c*). Se $p = 0$ oppure $p = 1$, l'affermazione è evidente. Supponiamo, dunque, $p \geqslant 2$ e cominciamo col provare che esistono, nella topologia di X, gli integrali generalizzati

$$\int_0^T A^{p/3}\, U_0(s) \exp(-sA^{1/3})\, x\, ds\,, \tag{11}$$

$\forall x \in \mathcal{D}(A^{(p-2)/3})$. Infatti, siano $p = 2$ e $x \in X$. Allora, per il Lemma 3*f*), si ha, $\forall \varepsilon \in]0, T[$:

$$\int_\varepsilon^T A^{2/3}\, U_0(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) x\, ds =$$
$$= -\int_\varepsilon^T A^{1/3}\, U_1(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) x\, ds - \int_\varepsilon^T U_2(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) x\, ds\,.$$

Integrando per parti gli integrali al secondo membro di questa uguaglianza, otteniamo

$$\int_\varepsilon^T A^{2/3}\, U_0(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) x\, ds = -(1/3)\left[U_1(T) + 2A^{1/3}\, U_0(T)\right]\cdot$$
$$\cdot \exp\left(-TA^{1/3}\right) x + (1/3)\left[U_1(\varepsilon) + 2A^{1/3}\, U_0(\varepsilon)\right] \exp\left(-\varepsilon A^{1/3}\right) x\,.$$

Per i Lemmi 2*e*), 3*d*), 3*e*) e 5,

$$\left[U_1(\varepsilon) + 2A^{1/3}\, U_0(\varepsilon)\right] \exp\left(-\varepsilon A^{1/3}\right) x \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} x\,, \qquad \forall x \in X\,.$$

Pertanto, esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^T A^{2/3}\, U_0(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) x\, ds =$$
$$= -\tfrac{1}{3}\left[U_1(T) + 2A^{1/3}\, U_0(T)\right] \exp\left(-TA^{1/3}\right) x + \tfrac{1}{3} x\,, \qquad \forall x \in X\,.$$

Poichè $A^{2/3}$ è chiuso, ne viene che $H_0(T)x \in \mathcal{D}(A^{2/3})$, $\forall x \in X$, e, quindi, $H_2(T) \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre, se $p > 2$ e se $x \in \mathcal{D}(A^{(p-2)/3})$, per i Lemmi 2*f*) e 4*b*), si ha

$$A^{p/3}\, U_0(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) x = A^{2/3}\, U_0(s) \exp\left(-sA^{1/3}\right) A^{(p-2)/3} x\,, \qquad \forall s \in \boldsymbol{R}^+\,.$$

Da questa uguaglianza e da quanto già dimostrato, segue l'esistenza degli integrali (11).

Ciò premesso, dimostriamo la seconda affermazione di *c*). Se $p \geqslant 2$

e $x \in \mathfrak{D}(A^{(p-2)/3})$, si ha:

$$\|H_p(t)x - H_p(T)x\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int_t^T U_0(s) A^{p/3} \exp[-(T-t+s)A^{1/3}]x\,ds \right\| +$$
$$+ \|\exp[-(T-t)A^{1/3}]H_p(T)x - H_p(T)x\| \xrightarrow[t \to T-]{} 0\,,$$

in quanto la funzione integranda nel primo termine è limitata per i Lemmi $2d$) e $3d$), mentre il secondo termine tende a zero per il Lemma $2e$).

LEMMA 9. *Sia* $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$. *Poniamo*

$$h(t) = \int_{\Delta_t} U_0(t-\tau) \exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\,ds\,d\tau\,, \qquad t \in]0, T[\,.$$

Allora si ha:

a) $h \in \mathcal{C}^{(2)}(]0, T[; X)$ *e*, $\forall t \in]0, T[$,

$$h'(t) = \int_{\Delta_t} U_1(t-\tau) \exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\,ds\,d\tau\,, \tag{12}$$

$$h''(t) = (1/3)\int_t^T \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(s)\,ds + \tag{13}$$
$$+ (1/3)[A^{1/3}U_0(t) + 2U_1(t)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\,ds -$$
$$- (1/3)\int_0^t [A^{1/3}U_0(t-s) + 2U_1(t-s)] f(s)\,ds;$$

inoltre, $h'(t) \in \mathfrak{D}(A^{1/3})$, $\forall t \in]0, T[$ *e*

$$A^{1/3}h'(t) = (1/3)\int_0^t [U_1(t-s) - A^{1/3}U_0(t-s)] f(s)\,ds + \tag{14}$$
$$+ (1/3)\int_t^T \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(s)\,ds -$$
$$- (1/3)[U_1(t) - A^{1/3}U_0(t)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\,ds;$$

$b)$ $h(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, $\quad h'(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$,

$$h''(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} \int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds;$$

$c)$ $$h(t) \xrightarrow[t\to T-]{} \int_{\Delta_T} U_0(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau\,,$$

$$h'(t) \xrightarrow[t\to T-]{} \int_{\Delta_T} U_1(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau\,,$$

dove $\Delta_T = \{(s, \tau) \in \boldsymbol{R}^2;\ \tau \in [0, T],\ s \in [\tau, T]\}$, *e*

$$h''(t) \xrightarrow[t\to T-]{} (1/3)[A^{1/3} U_0(T) + 2U_1(T)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds -$$
$$- (1/3)\int_0^T [A^{1/3} U_0(T-s) + 2U_1(T-s)] f(s)\, ds\,,$$

$$A^{1/3} h'(t) \xrightarrow[t\to T-]{} (1/3)\int_0^T [U_1(T-s) - A^{1/3} U_0(T-s)] f(s)\, ds -$$
$$- (1/3)[U_1(T) - A^{1/3} U_0(T)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo $a)$. È pressochè immediato riconoscere che $h \in C^{(1)}(]0, T[; X)$ e che vale la (12). Sia, poi, F un intervallo compatto di $]0, T[$. Con le notazioni del Teorema 1, poniamo, $\forall \varepsilon \in]0, \min\{\min F,\ T - \max F\}[$:

$$w_\varepsilon(t) = \int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} U_1(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau\,, \qquad t \in F\,.$$

È immediato riconoscere che $w_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} h'(t)$, $\forall t \in F$, che $w_\varepsilon \in C^{(1)}(F; X)$ e che

$$w'_\varepsilon(t) = U_1(\varepsilon)\int_t^T \exp[-(s-t+\varepsilon)A^{1/3}] f(s)\, ds +$$
$$+ \int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} U_2(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau\,, \qquad \forall t \in F\,.$$

Per il Lemma 3f), l'ultimo integrale scritto è uguale a

$$-\int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} A^{1/3}U_1(t-\tau)\exp\left[-(s-\tau)A^{1/3}\right]f(s)\,ds\,d\tau -$$
$$-\int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} A^{2/3}U_0(t-\tau)\exp\left[-(s-\tau)A^{1/3}\right]f(s)\,ds\,d\tau;$$

integrando per parti questi integrali, si ottiene

$$\text{(15)}\qquad w'_\varepsilon(t) = (1/3)[A^{1/3}U_0(t) + 2U_1(t)]\int_\varepsilon^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds -$$
$$-(1/3)\exp(-\varepsilon A^{1/3})\int_\varepsilon^t [A^{1/3}U_0(t-s+\varepsilon) + 2U_1(t-s+\varepsilon)]f(s)\,ds -$$
$$-(1/3)[A^{1/3}U_0(\varepsilon) - U_1(\varepsilon)]\int_t^T \exp\left[-(s-t+\varepsilon)A^{1/3}\right]f(s)\,ds = \sum_{j=1}^{3} I_j(t,\varepsilon)\,.$$

Proviamo, ora, che $w'_\varepsilon(t)$ converge, per $\varepsilon \to 0+$, uniformemente su F. Tenendo presente il Lemma 3d), è immediato che

$$I_1(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} (1/3)[A^{1/3}U_0(t) + 2U_1(t)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\,,$$

uniformemente su F. Si ha, poi, tenendo presenti i Lemmi 2d) e 3d):

$$\left\|I_2(t,\varepsilon) + (1/3)\int_0^t [A^{1/3}U_0(t-s) + 2U_1(t-s)]f(s)\,ds\right\| \leqslant$$
$$\leqslant C\left\|\int_0^t \big(\chi_{[\varepsilon,t]}(s)[A^{1/3}U_0(t-s+\varepsilon) + 2U_1(t-s+\varepsilon)] -\right.$$
$$\left. - A^{1/3}U_0(t-s) - 2U_1(t-s)\big)f(s)\,ds\right\| + C\int_0^T \left\|\exp(-\varepsilon A^{1/3})f(s) - f(s)\right\|ds\,.$$

Il secondo termine tende a zero, per $\varepsilon \to 0+$, per il teorema di convergenza dominata, mentre il primo si maggiora con

$$C\int^{T}\|A^{1/3}U_0(\sigma+\varepsilon)-A^{1/3}U_0(\sigma)+2U_1(\sigma+\varepsilon)-2U_1(\sigma)\|\,d\sigma\cdot\sup_{[0,T]}\|f(s)\|$$

che tende a zero, per $\varepsilon\to 0+$, ancora per il teorema di convergenza dominata, perchè la funzione integranda, per i Lemmi 3*a*) e 3*d*), è limitata in σ ed ε e tende a zero, per $\varepsilon\to 0+$, $\forall\sigma\in]0,T[$. Pertanto,

$$I_2(t,\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}-(1/3)\int_0^t[A^{1/3}U_0(t-s)+2U_1(t-s)]f(s)\,ds\,,$$

uniformemente su F. Consideriamo, ora, $I_3(t,\varepsilon)$. Si ha, tenendo presenti i Lemmi 3*d*) e 2*d*):

$$\left\|U_1(\varepsilon)\int_t^T\exp[-(s-t+\varepsilon)A^{1/3}]f(s)\,ds-\int_t^T\exp[-(s-t)A^{1/3}]f(s)\,ds\right\|\leqslant$$
$$\leqslant C\int_0^T\|\exp(-\sigma A^{1/3})-\exp[-(\sigma+\varepsilon)A^{1/3}]\|\,d\sigma\cdot\sup_{[0,T]}\|f(s)\|+$$
$$+\,C\int_0^T\|U_1(\varepsilon)f(s)-f(s)\|\,ds\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}0\,,$$

per il teorema di convergenza dominata, perchè le funzioni integrande sono limitate e tendono a zero, per $\varepsilon\to 0+$, $\forall\sigma$, $s\in]0,T]$. Sia, poi, $(f_n)_{n\in N}$ la successione di funzioni definita nel Lemma 7. Si ha, tenendo presenti i Lemmi 2*d*) e 3*d*):

$$\left\|A^{1/3}U_0(\varepsilon)\int_t^T\exp[-(s-t+\varepsilon)A^{1/3}]f(s)\,ds\right\|\leqslant$$
$$\leqslant C_1\|U_0(\varepsilon)\|\int_0^T\|A^{1/3}f_n(s)\|\,ds+C_2\int_0^T\|f_n(s)-f(s)\|\,ds\,,\qquad\forall n\in N\,.$$

Fissato $\delta\in\boldsymbol{R}^+$, poichè, per i Lemmi 7*d*) e 7*e*), la funzione integranda nel secondo termine è limitata in n e in s e tende a zero, quando

$n \to \infty$, $\forall s \in [0, T]$, esiste $\bar{n} \in N$, tale che $C_2 \int_0^T \| f_{\bar{n}}(s) - f(s) \| \, ds < \delta/2$. D'altra parte, per il Lemma 3*d*), esiste $\varepsilon_\delta \in \boldsymbol{R}^+$, tale che

$$C_1 \| U_0(\varepsilon) \| \int_0^T \| A^{1/3} f_{\bar{n}}(s) \| \, ds < \delta/2 \,, \qquad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_\delta[\,.$$

Perciò,

$$A^{1/3} U_0(\varepsilon) \int_t^T \exp[-(s - t + \varepsilon) A^{1/3}] f(s) \, ds \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 0 \,,$$

uniformemente su F. Quindi,

$$w'_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} (1/3)[A^{1/3} U_0(t) + 2 U_1(t)] \int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s) \, ds -$$

$$- (1/3) \int_0^t [A^{1/3} U_0(t - s) + 2 U_1(t - s)] f(s) \, ds +$$

$$+ (1/3) \int_t^T \exp[-(s - t) A^{1/3}] f(s) \, ds \,,$$

uniformemente su F. Ne segue che h' è derivabile su F e si ha $h''(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} w'_\varepsilon(t)$, $\forall t \in F$. L'arbitrarietà di F assicura, poi, la validità del risultato su tutto $]0, T[$. Infine, dall'espressione di h'', è immediato riconoscere che $h \in \mathcal{C}^{(2)}(]0, T[; X)$.

Proviamo, ora, che $h'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/3})$, $\forall t \in]0, T[$, e che vale la (14). Ragionando come quando si è calcolato $w'_\varepsilon(t)$, si ottiene, $\forall t \in]0, T[$ e $\forall \varepsilon \in]0, \min\{t, T - t\}[$:

$$\int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} A^{1/3} U_1(t - \tau) \exp[-(s - \tau) A^{1/3}] f(s) \, ds \, d\tau =$$

$$= (1/3) \exp(-\varepsilon A^{1/3}) \int_\varepsilon^t [U_1(t - s + \varepsilon) - A^{1/3} U_0(t - s + \varepsilon)] f(s) \, ds +$$

$$+ (1/3) [U_1(\varepsilon) - A^{1/3} U_0(\varepsilon)] \int_t^T \exp[-(s - t + \varepsilon) A^{1/3}] f(s) \, ds -$$

$$- (1/3) [U_1(t) - A^{1/3} U_0(t)] \int_\varepsilon^T \exp(-sA^{1/3}) f(s) \, ds \,.$$

Poichè

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} U_1(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau = h'(t)\,,$$

$$\int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} U_1(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau \in \mathfrak{D}(A^{1/3})\,,$$

$$\forall \varepsilon \in \,]0, \min\{t, T-t\}[$$

e $A^{1/3}$ è chiuso, è sufficiente provare che

$$\int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} A^{1/3}U_1(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} (1/3)\int_0^t [U_1(t-s) - A^{1/3}U_0(t-s)]f(s)\,ds +$$

$$+ (1/3)\int_t^T \exp[-(s-t)A^{1/3}]f(s)\,ds -$$

$$-(1/3)[U_1(t) - A^{1/3}U_0(t)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\,.$$

Per dimostrare ciò, si ragiona in maniera analoga a quando si è calcolato $h''(t)$, ma prescindendo dalla convergenza uniforme.

Proviamo, ora, *b*). Le affermazioni relative a h e alla sua derivata prima sono immediate. Indicando con $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ i termini che compaiono al secondo membro della (13) e tenendo presenti i Lemmi 3*d*), 3*e*) e 5, è immediato che

$$J_2(t) + J_3(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} (2/3)\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\,.$$

Inoltre,

$$\left\|J_1(t) - (1/3)\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\right\| =$$

$$= (1/3)\left\|\int_0^T \left(\chi_{[t,T]}(s)\exp[-(s-t)A^{1/3}] - \exp(-sA^{1/3})\right)f(s)\,ds\right\|$$

che tende a zero per il teorema di convergenza dominata, qualora si si tengano presenti i Lemmi 2*a*) e 2*d*).

Proviamo, ora, c). Per il teorema di convergenza dominata, tenendo presenti i Lemmi 3a) e 3d), si ha:

$$\left\|h(t) - \int_{\Delta_T} U_0(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau\right\| =$$

$$= \left\| \int_{\Delta_T} [\chi_{[0,t]}(\tau)\,U_0(t-\tau) - U_0(T-\tau)]\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau \right\| \xrightarrow[t\to T-]{} 0$$

e

$$\left\|h'(t) - \int_{\Delta_T} U_1(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau\right\| =$$

$$= \left\| \int_{\Delta_T} [\chi_{[0,t]}(\tau)U_1(t-\tau) - U_1(T-\tau)]\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau \right\| \xrightarrow[t\to T-]{} 0\,.$$

Usando le notazioni precedenti, è immediato che

$$J_1(t) + J_2(t) \xrightarrow[t\to T-]{} (1/3)[A^{1/3}U_0(T) + 2U_1(T)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\,.$$

Inoltre,

$$\left\|J_3(t) + (1/3)\int_0^T [A^{1/3}U_0(T-s) + 2U_1(T-s)]f(s)\,ds\right\| =$$

$$= (1/3)\left\| \int_0^T \Big(-\chi_{[0,t]}(s)[A^{1/3}U_0(t-s) + 2U_1(t-s)] + \right.$$

$$\left. + A^{1/3}U_0(T-s) + 2U_1(T-s)\Big) f(s)\,ds \right\| \xrightarrow[t\to T-]{} 0\,,$$

per il teorema di convergenza dominata, qualora si tengano presenti i Lemmi 3a) e 3d). Questo prova l'affermazione relativa a h''; quella relativa a $A^{1/3}h'(t)$ si prova in modo analogo. Con ciò, il Lemma è completamente dimostrato.

LEMMA 10. *L'operatore $H_2(T)$ è invertibile e*

$$[H_2(T)]^{-1} \in \mathcal{L}(X)\,, \qquad \forall T > \big(-2\log(4/\sqrt{3} + 1)\big)/(3\delta)\,,$$

dove δ è il tipo (negativo) del semigruppo generato da $-A^{1/3}$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto provato nel corso della dimostrazione del Lemma 8*c*), si ha, $\forall x \in X$:

$$H_2(T)x = (1/3)x - (1/3)[2A^{1/3}U_0(T) + U_1(T)]\exp(-TA^{1/3})x .$$

Pertanto, è sufficiente provare che esiste $T_0 \in \boldsymbol{R}^+$, tale che si abbia $\|[2A^{1/3}U_0(T) + U_1(T)]\exp(-TA^{1/3})\| < 1$, $\forall T > T_0$.

Cominciamo con l'osservare che è possibile munire X di una norma $\|\cdot\|_1$, equivalente a quella iniziale, tale che

$$\|\exp(-zA^{1/3})\| \leqslant \exp(\delta\,\mathrm{Re}\,z) , \qquad \forall z \in S , \tag{16}$$

dove δ è il tipo (negativo) del semigruppo generato da $-A^{1/3}$ (cfr. [13], cap. I, par. 2, n. 1). Se poniamo

$$\|x\|_1 = \sup_{z\in S} \|\exp(-\delta\,\mathrm{Re}\,z)\exp(-zA^{1/3})x\| ,$$

dal Lemma 2*d*) segue $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant C\|x\|$. Inoltre, $\forall w \in S$ e $\forall x \in X$, si ha:

$$\|\exp(-wA^{1/3})x\|_1 = \sup_{z\in S}\|\exp(-\delta\,\mathrm{Re}\,z)\exp(-zA^{1/3})\exp(-wA^{1/3})x\| =$$

$$= \exp(\delta\,\mathrm{Re}\,w)\sup_{z\in S}\|\exp[-\delta\,\mathrm{Re}\,(z+w)]\exp[-(z+w)A^{1/3}]x\| \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\delta\,\mathrm{Re}\,w)\|x\|_1 ,$$

come volevasi. Nel seguito di questa dimostrazione, supporremo sempre che X sia munito di una norma soddisfacente la (16).

Rappresentando $\exp(-TA^{1/3})$ e $U_1(T)$ come integrali di Dunford estesi a curve orientate opportune (per esempio, quelle che ammettono come parametrizzazioni, rispettivamente, le funzioni

$$\varphi(t) = -t\exp[i(-\pi+\theta)] , \qquad \text{se} \quad t \in \left]-\infty, \delta/(2\cos\theta)\right[,$$

$$\varphi(t) = \delta/2 + it\,\mathrm{sen}\,\theta , \qquad \text{se} \quad t \in [\delta/(2\cos\theta), (-\delta)/(2\cos\theta)] ,$$

$$\varphi(t) = t\exp[i(\pi-\theta)] , \qquad \text{se} \quad t \in \left](-\delta)/(2\cos\theta), +\infty\right[,$$

e

$$\psi(t) = -t \exp\big(i[(-7\pi)/12 + \theta/2]\big)\,, \qquad \text{se } t \in \boldsymbol{R}^-\,,$$

$$\psi(t) = t \exp\big(i[(7\pi)/12 - \theta/2]\big)\,, \qquad \text{se } t \in \boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}\,,$$

con $\theta \in \left]\theta_0/3, \pi/6\right[$ e utilizzando tecniche standard basate essenzialmente sull'equazione risolvente, si ottiene

$$U_1(T) \exp(-TA^{1/3}) = (i\sqrt{3})^{-1}\big(\exp[(\pi i)/3]\cdot$$
$$\cdot \exp\big[-T\big(1 + \exp[(\pi i)/3]\big) A^{1/3}\big] +$$
$$+ \exp[(2\pi i)/3] \exp\big[-T\big(1 + \exp[(-\pi i)/3]\big) A^{1/3}\big]\big)\,,$$

onde $\|U_1(T)\exp(-TA^{1/3})\| \leqslant (2/\sqrt{3}) \exp[(3\delta T)/2]$. D'altra parte,

$$A^{1/3} U_0(T) = \exp[(2\pi i)/3]\, U_1(T) -$$
$$- \exp[(-\pi i)/3] \exp\big[-T \exp\big([-\pi i]/3\big) A^{1/3}\big]\,.$$

Perciò,

$$\|A^{1/3} U_0(T) \exp(-TA^{1/3})\| \leqslant (2/\sqrt{3} + 1) \exp[(3\delta T)/2]$$

e, quindi, l'affermazione è provata se si sceglie

$$T_0 = \big(-2\log(4/\sqrt{3} + 1)\big)/(3\delta)\,.$$

Dimostrazione del Teorema 2. Tenendo presenti i Lemmi $3f)$, $8c)$ e $9c)$, dalla (5) segue

$$A^{1/3}u'(T) + u''(T) = A^{1/3} U_2(T)\, u_0 + [A^{1/3} U_1(T) + U_2(T)]\, u_1 +$$
$$+ [I - H_2(T)][A^{1/3}u'(T) + u''(T) + A^{2/3}u_T] -$$
$$- (1/3)[2A^{1/3} U_0(T) + U_1(T)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds +$$
$$+ (1/3)\int_0^T [2A^{1/3} U_0(T-s) + U_1(T-s)]\, f(s)\, ds\,.$$

Ricavando da questa uguaglianza, per il Lemma 10, $A^{1/3}u'(T)+u''(T)$ e sostituendo l'espressione ottenuta nella (5), si ottiene la (9).

5. Il teorema di esistenza.

TEOREMA 3. *Siano* $T\in\big]\big(-2\log(4/\sqrt{3}+1)\big)/(3\delta),+\infty\big[$, $f\colon[0,T]\to X$ *hölderiana,* $u_0,\ u_T\in\mathfrak{D}(A^{2/3})$, $u_1\in\mathfrak{D}(A^{1/3})$. *Allora, la funzione*

$$\begin{aligned}
u(t) &= [U_1(t)+A^{1/3}U_0(t)]u_0+U_0(t)u_1-\\
&-\int_{\Delta_t}U_0(t-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau+\\
&+H_0(t)[H_2(T)]^{-1}\Big(A^{1/3}U_2(T)u_0+A^{2/3}u_T+[A^{1/3}U_1(T)+U_2(T)]u_1-\\
&-(1/3)[2A^{1/3}U_0(T)+U_1(T)]\int_0^T\exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds+\\
&\qquad+(1/3)\int_0^T[2A^{1/3}U_0(T-s)+U_1(T-s)]f(s)\,ds\Big)\,,\qquad t\in\,]0,T[\,,
\end{aligned}$$

$$u(0)=u_0\,,\qquad u(T)=u_T\,,$$

è soluzione, nel senso della Definizione 2, *del problema ai limiti* (8).

Premettiamo alcuni lemmi alla dimostrazione di questo teorema.

LEMMA 11. *Siano* $u_0\in\mathfrak{D}(A^{2/3})$, $u_1\in\mathfrak{D}(A^{1/3})$. *Poniamo*

$$v_1(t)=[U_1(t)+A^{1/3}U_0(t)]u_0+U_0(t)u_1\,,\qquad t\in\boldsymbol{R}^+\,.$$

Si ha:

1) v_1 *è prolungabile analiticamente in un settore del piano complesso contenente* $\boldsymbol{R}^+$;

2) $v_1(t)\in\mathfrak{D}(A)\,,\qquad\forall t\in\boldsymbol{R}^+$;

3) $v_1'''(t)=Av_1(t)\,,\qquad\forall t\in\boldsymbol{R}^+$;

4) $v_1(t)\xrightarrow[t\to0+]{}u_0\,,\qquad v_1'(t)\xrightarrow[t\to0+]{}u_1$;

5) *Esiste il limite* $\lim\limits_{t\to0+}v_1''(t)$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è contenuta nel Lemma 3a). Poichè, per il Lemma 3b), $U_k(t) \in \mathfrak{D}(A^{2/3})$, $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$ e $\forall k \in \bar{I}^+$, tenendo presente che u_0, $u_1 \in \mathfrak{D}(A^{1/3})$ e il Lemma 4b), si ha 2). La terza affermazione segue dal fatto che, $\forall t \in \boldsymbol{R}^+$,

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} - A\right) v_1(t) = \left(\frac{d}{dt} - A^{1/3}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} + A^{1/3}\frac{d}{dt} + A^{2/3}\right) v_1(t)$$

e dal Lemma 3f). La quarta affermazione è stata provata in [14]. Infine, per i Lemmi 3f), 4b), 3e) e 5, si ha:

$$[U_3(t) + A^{1/3}U_2(t)]u_0 = -A^{2/3}U_1(t)u_0 = -U_1(t)A^{2/3}u_0 \xrightarrow[t\to 0+]{} -A^{2/3}u_0\,,$$

$$\begin{aligned} U_2(t)u_1 &= -[A^{1/3}U_1(t) + A^{2/3}U_0(t)]u_1 = \\ &= -[U_1(t) + A^{1/3}U_0(t)]A^{1/3}u_1 \xrightarrow[t\to 0+]{} -A^{1/3}u_1\,. \end{aligned}$$

LEMMA 12. *Sia* $x \in X$. *Poniamo* $v_2(t) = H_0(t)x$, $t \in]0, T[$. *Si ha*:

1) v_2 *è prolungabile analiticamente in un aperto di* $\boldsymbol{C}$ *contenente* $]0, T[$;

2) $v_2(t) \in \mathfrak{D}(A)\,, \quad \forall t \in]0, T[$;

3) $v_2'''(t) = Av_2(t)\,, \quad \forall t \in]0, T[$;

4) $v_2(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0\,, \quad v_2'(t) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0\,, \quad v_2(t) \xrightarrow[t\to T-]{} H_0(T)x$;

5) *Esistono i limiti*

$$\lim_{t\to 0+} v_2''(t)\,, \qquad \lim_{t\to T-} v_2'(t)\,, \qquad \lim_{t\to T-} v_2''(t)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che $\exp[-(T-t)A^{1/3}]$ è analitica in un settore di $\boldsymbol{C}$ contenente $]-\infty, T[$, mentre $U_0(s)\exp(-sA^{1/3})x$ e, quindi, $\int_0^t U_0(s)\exp(-sA^{1/3})x\,ds$ è analitica in un settore di $\boldsymbol{C}$ contenente $\boldsymbol{R}^+$. La seconda affermazione è immediata. Per i Lemmi 8a) e 3f), si ha poi:

$$\begin{aligned} v_2'''(t) &= H_3(t)x + \exp(-TA^{1/3})[U_2(T) + A^{1/3}U_1(T) + A^{2/3}U_0(T)]x = \\ &= H_3(t)x = AH_0(t)x\,, \qquad \forall t \in]0, T[\,. \end{aligned}$$

Infine, 4) e 5) sono state provate nei Lemmi 8b) e 8c).

LEMMA 13. *Sia* $f\colon [0, T] \to X$, *tale che esistano* $\alpha \in]0, 1[$, $K \in \boldsymbol{R}^+$, *per i quali* $\|f(t') - f(t'')\| \leqslant K|t' - t''|^\alpha$, $\forall t', t'' \in [0, T]$. *Allora, posto*

$$h(t) = \int_{\Delta_t} U_0(t - \tau) \exp[-(s - \tau) A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau\,, \qquad t \in]0, T[\,,$$

risulta:

1) $h \in \mathcal{C}^{(3)}(]0, T[; X)$;
2) $h(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $\quad \forall t \in]0, T[$;
3) $h'''(t) - Ah(t) = -f(t)$, $\quad \forall t \in]0, T[$;
4) $h(t) \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$, $\quad h'(t) \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$,
$$h(t) \xrightarrow[t \to T-]{} \int_{\Delta_T} U_0(T - \tau) \exp[-(s - \tau) A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau\,;$$
5) *Esistono i limiti* $\lim\limits_{t \to 0+} h''(t)$, $\lim\limits_{t \to T-} h'(t)$, $\lim\limits_{t \to T-} h''(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Le affermazioni 4) e 5) sono state provate nei Lemmi 9*b*) e 9*c*). Cominciamo col provare 1). Sia F un intervallo compatto di $]0, T[$ e, $\forall \varepsilon \in]0, \min\{\min F, T - \max F\}[$, poniamo

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) = {} & (1/3) \int_{t+\varepsilon}^{T} \exp[-(s - t) A^{1/3}] f(s)\, ds + \\ & + (1/3)[A^{1/3} U_0(t) + 2U_1(t)] \int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds - \\ & - (1/3) \int_0^{t-\varepsilon} [A^{1/3} U_0(t - s) + 2U_1(t - s)] f(s)\, ds\,, \qquad t \in F\,. \end{aligned}$$

Dal Lemma 9*a*) segue che $z_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} h''(t)$, $\forall t \in F$. È poi immediato che $z_\varepsilon \in \mathcal{C}^{(1)}(F; X)$ e risulta, $\forall t \in F$:

$$\begin{aligned} z'_\varepsilon(t) = {} & -(1/3) \exp(-\varepsilon A^{1/3}) f(t + \varepsilon) + \\ & + (1/3) \int_{t+\varepsilon}^{T} A^{1/3} \exp[-(s - t) A^{1/3}] f(s)\, ds - (1/3)[A^{1/3} U_0(\varepsilon) + \\ & + 2U_1(\varepsilon)] f(t - \varepsilon) - (1/3) \int_0^{t-\varepsilon} [A^{1/3} U_1(t - s) + 2U_2(t - s)] f(s)\, ds + \\ & + (1/3)[A^{1/3} U_1(t) + 2U_2(t)] \int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds\,. \end{aligned}$$

Se dimostriamo che $z'_\varepsilon(t)$ converge, per $\varepsilon \to 0+$, uniformemente su F, risulterà h derivabile tre volte su F e $h'''(t) = \lim_{\varepsilon\to 0+} z'_\varepsilon(t)$, $\forall t \in F$.

Innanzitutto, risulta

$$\exp(-\varepsilon A^{1/3}) f(t+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} f(t)\,, \tag{17}$$
$$[A^{1/3} U_0(\varepsilon) + 2U_1(\varepsilon)] f(t-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 2f(t)\,,$$

uniformemente su F. Proviamo solo la prima affermazione, in quanto la seconda si dimostra in modo del tutto analogo. Si ha:

$$\|\exp(-\varepsilon A^{1/3}) f(t+\varepsilon) - f(t)\| \leqslant C\|f(t+\varepsilon) - f(t)\| + \\ + \|\exp(-\varepsilon A^{1/3}) f(t) - f(t)\| = I_1(t,\varepsilon) + I_2(t,\varepsilon)\,.$$

Dalla uniforme continuità di f su $[0, T]$ segue subito che $I_1(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$, uniformemente su F. Fissiamo, poi, $\delta \in \boldsymbol{R}^+$. Allora, per il Lemma 3$e$), $\forall t \in F$, $\exists \varepsilon_0(t,\delta) \in \boldsymbol{R}^+$, tale che $I_2(t,\varepsilon) < \delta/3$, $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0(t,\delta)[$, mentre, per la uniforme continuità di f su F, $\exists \eta(\delta) \in \boldsymbol{R}^+$, tale che

$$\|f(t) - f(\tau)\| < \delta/3\,, \qquad \forall t, \tau \in F\,, \quad |t-\tau| < \eta(\delta)\,.$$

Sia $\{]t_j - \eta(\delta), t_j + \eta(\delta)[;\ j = 1, \dots, p\}$ un sottoricoprimento finito di $\{]t - \eta(\delta), t + \eta(\delta)[;\ t \in F\}$. Posto $\bar{\varepsilon}_0(\delta) = \min\{\varepsilon_0(t_j,\delta);\ j = 1, \dots, p\}$, si ha, $\forall t \in F$ e per un opportuno $j \in \{1, \dots, p\}$:

$$I_2(t,\varepsilon) \leqslant \|\exp(-\varepsilon A^{1/3})\|\,\|f(t) - f(t_j)\| + \\ + \|\exp(-\varepsilon A^{1/3}) f(t_j) - f(t_j)\| + \|f(t_j) - f(t)\| < \delta\,, \qquad \forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}_0(\delta)[\,,$$

purchè la norma di X soddisfi la (16). Questo prova la (17). Si ha poi

$$\int_{t+\varepsilon}^{T} A^{1/3} \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(s)\,ds \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \\ \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \int_{t}^{T} A^{1/3} \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(s)\,ds\,, \tag{18}$$

$$\int_{0}^{t-\varepsilon} [A^{1/3} U_1(t-s) + 2U_2(t-s)] f(s)\,ds \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \\ \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \int_{0}^{t} [A^{1/3} U_1(t-s) + 2U_2(t-s)] f(s)\,ds\,,$$

uniformemente su F. Proviamo solo la prima affermazione, in quanto la seconda si dimostra in modo del tutto analogo. Se $0 < \varepsilon' < \varepsilon''$, si ha:

$$\left\| \int_{t+\varepsilon'}^{t+\varepsilon''} A^{1/3} \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(s)\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t+\varepsilon'}^{t+\varepsilon''} A^{1/3} \exp[-(s-t)A^{1/3}][f(s)-f(t)]\, ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t+\varepsilon'}^{t+\varepsilon''} A^{1/3} \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(t)\, ds \right\| \leqslant C \int_{t+\varepsilon'}^{t+\varepsilon''} |s-t|^{\alpha-1} ds +$$

$$+ \|\exp(-\varepsilon' A^{1/3}) f(t) - \exp(-\varepsilon'' A^{1/3}) f(t)\| \xrightarrow[\varepsilon',\varepsilon''\to 0+]{} 0 ,$$

uniformemente su F, in quanto l'integrale è uguale a $\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} \sigma^{\alpha-1} d\sigma \xrightarrow[\varepsilon',\varepsilon''\to 0+]{} 0$, mentre il secondo termine tende a zero, per ε', $\varepsilon'' \to 0+$, uniformemente su F, per quanto detto nel dimostrare la (17).

Pertanto, per l'arbitrarietà di F, h è derivabile tre volte su $]0, T[$ e risulta

$$h'''(t) = -f(t) + (1/3) \int_t^T A^{1/3} \exp[-(s-t)A^{1/3}] f(s)\, ds +$$

$$+ (1/3)[A^{1/3} U_1(t) + 2U_2(t)] \int_0^T \exp(-sA^{1/3}) f(s)\, ds -$$

$$-(1/3) \int_0^t [A^{1/3} U_1(t-s) + 2U_2(t-s)] f(s)\, ds , \qquad \forall t \in]0, T[.$$

È poi immediato riconoscere che $h''' \in \mathcal{C}(]0, T[; X)$. Questo prova 1).

Sia ancora F un intervallo compatto di $]0, T[$. Per ogni $\varepsilon \in]0, \min\{\min F, T - \max F\}[$, poniamo

$$y_\varepsilon(t) = \int_{\Delta_{t,\varepsilon,\varepsilon}} U_0(t-\tau) \exp[-(s-\tau)A^{1/3}] f(s)\, ds\, d\tau , \qquad t \in F ,$$

dove abbiamo usato le notazioni del Teorema 1. È evidente che $y_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} h(t)$, $\forall t \in F$. Poichè A è chiuso e $y_\varepsilon(t) \in \mathcal{D}(A)$, $\forall t \in F$ e $\forall \varepsilon \in]0, \min\{\min F, T - \max F\}[$, per provare 2) è sufficiente far vedere che $Ay_\varepsilon(t)$ converge, per $\varepsilon \to 0+$, $\forall t \in F$. Ragionando in maniera analoga a come si è fatto per provare la (15), si ottiene:

$$Ay_\varepsilon(t) = -(1/3)[2A^{2/3}U_0(t) + A^{1/3}U_1(t)]\int_\varepsilon^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds +$$

$$+ (1/3)\exp(-\varepsilon A^{1/3})\int_\varepsilon^t [2A^{2/3}U_0(t-s+\varepsilon) + A^{1/3}U_1(t-s+\varepsilon)]f(s)\,ds +$$

$$+ (1/3)[2A^{1/3}U_0(\varepsilon) + U_1(\varepsilon)]\int_t^T A^{1/3}\exp[-(s-t+\varepsilon)A^{1/3}]f(s)\,ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} M_j(t,\varepsilon)\,.$$

È immediato che

$$M_1(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} -(1/3)[2A^{2/3}U_0(t) + A^{1/3}U_1(t)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\,.$$

Si ha, poi, $\forall t \in F$:

$$M_2(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} (1/3)\int_0^t [2A^{2/3}U_0(t-s) + A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds\,, \tag{19}$$

$$M_3(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} (1/3)\int_t^T A^{1/3}\exp[-(s-t)A^{1/3}]f(s)\,ds\,,$$

dove gli integrali vanno intesi in senso generalizzato. Proviamo solo la prima affermazione, in quanto la seconda si dimostra in modo analogo. Innanzitutto, l'integrale generalizzato

$$\int_0^t [A^{2/3}U_0(t-s) + 2A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds \tag{20}$$

è convergente, perchè, per il Lemma 3*f*), risulta, $\forall \eta \in]0, T[$,

$$\int_0^{t-\eta} [A^{2/3}U_0(t-s) + 2A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds =$$

$$= \int_0^{t-\eta} [A^{1/3}U_1(t-s) - U_2(t-s)]f(s)\,ds\,.$$

L'ultimo integrale scritto è convergente, per $\eta \to 0+$, come si vede ragionando in maniera analoga a come abbiamo fatto per provare la (18). Si ha poi:

$$\left\| M_2(t,\varepsilon) - (1/3)\int_0^t [2A^{2/3}U_0(t-s) + A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C\left\| \int_0^t \big(\chi_{[\varepsilon,t]}(s)[2A^{2/3}U_0(t-s+\varepsilon) + A^{1/3}U_1(t-s+\varepsilon)] - \right.$$

$$\left. - [2A^{2/3}U_0(t-s) + A^{1/3}U_1(t-s)]\big) f(s)\,ds \right\| +$$

$$+ (1/3)\left\| \exp(-\varepsilon A^{1/3}) \int_0^t [2A^{2/3}U_0(t-s) + A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^t [2A^{1/3}U_0(t-s) + A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds \right\| .$$

Il secondo termine tende a zero, per $\varepsilon \to 0+$, in virtù del Lemma 3*e*), $\forall t \in F$. Inoltre, per i Lemmi 3*f*) e 3*d*), il primo termine si maggiora con

$$C\int_0^t \big\| \big(\chi_{[\varepsilon,t]}(s)[A^{1/3}U_1(t-s+\varepsilon) + 2U_2(t-s+\varepsilon)] -$$

$$- A^{1/3}U_1(t-s) - 2U_2(t-s)\big)[f(s) - f(t)]\big\|\,ds +$$

$$+ C\left\| \int_0^t \big(\chi_{[\varepsilon,t]}(s)[A^{1/3}U_1(t-s+\varepsilon) + 2U_2(t-s+\varepsilon)] - \right.$$

$$\left. - A^{1/3}U_1(t-s) - 2U_2(t-s)\big) f(t)\,ds \right\| = N_1(t,\varepsilon) + N_2(t,\varepsilon) .$$

La liceità di questa scomposizione è assicurata dal ragionamento fatto per provare la convergenza dell'integrale generalizzato (20). La funzione integranda in $N_1(t,\varepsilon)$ tende a zero, per $\varepsilon \to 0+$, $\forall t \in F$, e si maggiora, per il Lemma 3*d*) e per l'hölderianità di f, con $C_1|t-s|^{\alpha-1}$ che è sommabile su $[0, t[$; perciò, per il teorema di convergenza dominata, $N_1(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0$, $\forall t \in F$. D'altra parte, per i Lemmi 3*c*), 3*d*) e 5,

$N_2(t, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 0$, $\forall t \in F$. Pertanto, $h(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $\forall t \in F$, e risulta

$$Ah(t) = -(1/3)[2A^{2/3}U_0(t) + A^{1/3}U_1(t)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds +$$
$$+ (1/3)\int_0^t [2A^{2/3}U_0(t-s) + A^{1/3}U_1(t-s)]f(s)\,ds +$$
$$+ (1/3)\int_t^T A^{1/3}\exp[-(s-t)A^{1/3}]f(s)\,ds\,.$$

Questo prova 2), per l'arbitrarietà di F, e, tenendo presente quanto già provato e il Lemma 3f), si ha 3). Con ciò, il Lemma è completamente dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3. Per i Lemmi 11, 12 e 13, la funzione u, definita nell'enunciato del Teorema, è soluzione in $[0, T]$ dell'equazione differenziale (4), nel senso della Definizione 1, e, inoltre, soddisfa le condizioni ai limiti per $t = 0$. Sempre per gli stessi Lemmi, si ha, poi:

$$\lim_{t \to T-} u(t) = [U_1(T) + A^{1/3}U_0(T) + H_0(T)[H_2(T)]^{-1}A^{1/3}U_2(T)]u_0 +$$
$$+ [U_0(T) + H_0(T)[H_2(T)]^{-1}[A^{1/3}U_1(T) + U_2(T)]]\,u_1 +$$
$$+ H_0(T)[H_2(T)]^{-1}A^{2/3}u_T - \Big(\int_{\Delta_T} U_0(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau +$$
$$+ (1/3)H_0(T)[H_2(T)]^{-1}\Big([2A^{1/3}U_0(T) + U_1(T)]\int_0^T \exp(-sA^{1/3})f(s)ds -$$
$$-\int_0^T [2A^{1/3}U_0(T-s) + U_1(T-s)]f(s)\,ds\Big)\Big) = \sum_{j=1}^{4} B_j\,.$$

Risulta, tenendo presente il Lemma 3f):

$$B_1 = A^{-(1/3)}[A^{1/3}U_1(T) + A^{2/3}U_0(T) + U_2(T)]\,u_0 = 0\,,$$

$$B_2 = A^{-(2/3)}[A^{2/3}U_0(T) + A^{1/3}U_1(T) + U_2(T)]\,u_1 = 0\,,$$

$$B_3 = u_T\,.$$

Infine, per quanto provato nel corso della dimostrazione del Lemma 9c), si ha:

$$\int_{\Delta_T} U_0(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\Delta_{T,\varepsilon,\varepsilon}} U_0(T-\tau)\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]f(s)\,ds\,d\tau =$$

$$= -A^{-(2/3)}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\Delta_{T,\varepsilon,\varepsilon}}[A^{1/3}U_1(T-\tau)+U_2(T-\tau)]\exp[-(s-\tau)A^{1/3}]\cdot$$

$$\cdot f(s)\,ds\,d\tau = (1/3)A^{-(2/3)}\Bigl(\int_0^T[2A^{1/3}U_0(T-s)+U_1(T-s)]f(s)\,ds -$$

$$-[2A^{1/3}U_0(T)+U_1(T)]\int_0^T\exp(-sA^{1/3})f(s)\,ds\Bigr).$$

Pertanto, $B_4 = 0$.

In tal modo, il Teorema è completamente provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] Yu. Dubinskii, *Su un teorema astratto e sue applicazioni a problemi ai limiti per equazioni non classiche* (in russo), Mat. Sb., **79** (121) (1969), pp. 91-117; trad. ingl.: Math. USSR-Sb., **8** (1969), pp. 87-113.

[2] Yu. Dubinskii, *Su alcune equazioni differenziali operatoriali di ordine arbitrario* (in russo), Mat. Sb., **90** (132) (1973), pp. 3-22; trad. ingl.: Math. USSR-Sb., **19** (1973), pp. 1-21.

[3] H. O. Fattorini, *Ordinary differential equations in linear topological spaces I*, J. Differential Equations, **5** (1969), pp. 72-105.

[4] H. O. Fattorini, *The underdetermined Cauchy problem in Banach spaces*, Math. Ann., **200** (1973), pp. 103-112.

[5] H. O. Fattorini, *Two point boundary value problems for operational differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4), **1** (1974), pp. 63-79.

[6] H. O. Fattorini - A. Radnitz, *The Cauchy problem with incomplete initial data in Banach space*, Michigan Math. J., **18** (1971), pp. 291-320.

[7] A. Friedman, *Singular perturbations for the Cauchy problem and for boundary value problems*, J. Differential Equations, **5** (1969), pp. 226-261.

[8] M. G. Gasymov, *Sulla teoria delle equazioni di evoluzione di ordine superiore* (in russo), Dokl. Akad. Nauk SSSR, **206** (1972), pp. 780-783; trad. ingl.: Soviet Math. Dokl., **13** (1972), pp. 1280-1284.
[9] P. Grisvard, *Équations différentielles abstraites*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) **2** (1969), pp. 311-395.
[10] E. Hille, *Une généralisation du problème de Cauchy*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **4** (1952), pp. 31-48.
[11] E. Hille - R. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 31, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1957).
[12] H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pacific J. Math., **19** (1966), pp. 285-346.
[13] S. G. Krein, *Equazioni differenziali lineari in uno spazio di Banach* (in russo), Nauka, Mosca (1967); trad. ingl.: Transl. Math. Monographs, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1971).
[14] E. Obrecht, *Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche astratte di ordine n*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **53** (1975), pp. 231-256.
[15] N. I. Yurčuk, *Sui problemi ai limiti per le equazioni che contengono nella parte principale un operatore della forma* $d^{2m+1}/dt^{2m+1} + A$ (in russo), Differencial'nye Uravnenija, **10** (1974), pp. 759-762.
[16] N. I. Yurčuk, *Sui problemi ai limiti per equazioni operatoriali della forma* $d^{2m}/dt^{2m} + A$ (in russo), Differencial'nye Uravnenija, **10** (1974), pp. 950-952.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 giugno 1976.

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze.

Cogliamo l'occasione per segnalare che, nel Lemma 6 di [14], l'indice j può assumere anche il valore n (la dimostrazione essendo ancora valida) e, in questa forma, lo abbiamo utilizzato sia in [14], sia nel presente lavoro (Lemma 3d)).