Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Antonio Claudio Grioli

Sul principio di indifferenza materiale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 209-217

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__209_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Sul principio di indifferenza materiale.

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI (*)

Nella meccanica dei continui una delle prime informazioni sulla struttura analitica delle equazioni costitutive proviene dal principio di indifferenza materiale. Tale principio esprime l'invarianza delle equazioni costitutive per composizione con un moto rigido del sistema di riferimento.

Ciò non implica in generale come conseguenza l'annullarsi del lavoro delle forze interne in corrispondenza a un qualunque spostamento rigido infinitesimo di insieme, circostanza questa che nella formulazione delle equazioni costitutive risulta altrettanto importante che il principio di indifferenza materiale.

In questo lavoro si mostra come le due proprietà si possano sintetizzare in un unico enunciato che impone una condizione di tipo energetico alle equazioni costitutive, con riferimento al caso molto generale dei continui con struttura con deformazioni finite, i quali fenomenologicamente derivano da sistemi particellari con particelle elementari deformabili intrinsecamente in modo omogeneo.

Nel corrispondente schema matematico del continuo la deformazione viene caratterizzata dalla solita matrice classica del gradiente dello spostamento e da una seconda matrice caratterizzante, insieme con le sue derivate, la deformazione intrinseca delle particelle elementari. Particolarizzando tale matrice in una matrice di rotazione si ricade nel caso dei continui di Cosserat.

Introdotto in un certo modo (vedi n. 1) il concetto di deformazioni equivalenti a partire da due distinte configurazioni si dimostra che il

---

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

complesso delle due proprietà fondamentali sopra richiamate equivale alla condizione che la densità di lavoro delle forze interne sia invariante rispetto a deformazioni equivalenti.

1. – Premesse geometriche.

Quanto segue si riferisce ad un continuo semplice, cioè il cui stato tensionale in un punto materiale P fissato ed arbitrario è determinato dalle variabili geometriche caratteristiche sotto specificate, eventualmente attraverso la loro storia.

Si riferisca il continuo ad un sistema trirettangolo levogiro, e, dette C' e C'' due sue configurazioni qualunque, siano P' e P'' due punti corrispondenti e x'_r, x''_r le loro coordinate. Nella meccanica dei continui classici la trasformazione da C' a C'' è individuata dal punto di vista geometrico, a meno di una inessenziale traslazione, dalla matrice formata dalle derivate $\partial x''_r/\partial x'_s$, che qualunque siano C' e C'', indicherò con $\alpha = \alpha(C', C'')$.

Nella meccanica dei continui di Cosserat alla $\alpha(C', C'')$ occorre associare una matrice di rotazione $R = R(C', C'')$.

Volendo considerare un continuo ancor più generale, ed in accordo ad una certa letteratura già esistente (1), si supporrà qui che la deformazione sia caratterizzata oltre che dalla matrice $\alpha(C', C'')$, da una seconda matrice $\gamma = \gamma(C', C'')$ e dalla matrice $\gamma(C', C'')_{/r'}$, ove col simbolo $_{/r'}$ si indica derivazione rispetto alle coordinate in C'. Solo nel caso di Cosserat la matrice γ coincide con la R.

Tali matrici dipendono dagli elementi del continuo oltre bensintende, eventualmente da altri parametri quali il tempo, la temperatura, ecc.). Risulta conveniente pensare la γ scomposta nel prodotto:

$$\gamma = RE\,, \tag{1}$$

ove R è una matrice di rotazione ed E una deformazione pura.

Date le eguaglianze evidenti $EE = \gamma^{(T)}\gamma$, $R = \gamma E^{-1}$, è chiaro che si potrà ritenere che la deformazione sia caratterizzata da $\alpha(C', C'')$, $R(C', C'')$ e $E(C', C'')$.

Denotiamo con C una configurazione di riferimento e supponiamo che da C' a C'' si passi con uno spostamento rigido di insieme di rota-

(1) Vedi ad esempio [1].

zione r, nel qual caso dirò che C' e C'' sono r-corrispondenti. Allora sono evidenti le uguaglianze:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\alpha(C, C'') = r\alpha(C, C') \qquad \gamma(C, C'') = r\gamma(C, C') \\ &R(C, C'') = rR(C, C') \qquad E(C, C'') = E(C, C') \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\alpha(C, C' + \Delta C') = \alpha'_\Delta \alpha(C, C') \qquad \gamma(C, C' + \Delta C') = \gamma'_\Delta \gamma(C, C') \\ &\alpha(C, C'' + \Delta C'') = \alpha''_\Delta \alpha(C, C'') \qquad \gamma(C, C'' + \Delta C'') = \gamma''_\Delta \gamma(C, C'') \end{aligned}$$

essendo $C' + \Delta C'$ e $C'' + \Delta C''$ configurazioni vicinissime rispettivamente a C' e C'', e avendo indicato per brevità con α'_Δ e α''_Δ le matrici $\alpha(C', C' + \Delta C')$ e $\alpha(C'', C'' + \Delta C'')$ e analogamente per γ'_Δ e γ''_Δ.

Definizione I. Le due deformazioni $\Delta C'$ e $\Delta C''$ a partire dalle configurazioni r-corrispondenti C' e C'' si dicono equivalenti quando sono infinitesime e si passa da $C' + \Delta C'$ a $C'' + \Delta C''$ mediante il prodotto della rotazione r con una rotazione infinitesima di vettore ω.

La suddetta equivalenza sussista; allora, indicate per brevità con α' la matrice $\alpha(C, C')$, con α'' la matrice $\alpha(C, C'')$ e intendendo l'analogo per γ, R e E, sussistono le seguenti relazioni:

$$(4) \qquad \alpha''_\Delta \alpha'' = (\boldsymbol{\omega} \Lambda + 1) r \alpha'_\Delta \alpha' \qquad \gamma''_\Delta \gamma'' = (\boldsymbol{\omega} \Lambda + 1) r \gamma'_\Delta \gamma'$$

Da

$$\gamma'' = r\gamma' \qquad \gamma''_\Delta = R''_\Delta E''_\Delta \qquad \gamma'_\Delta = R'_\Delta E'_\Delta ,$$

segue

$$(5) \qquad R''_\Delta E''_\Delta r = (\boldsymbol{\omega} \Lambda + 1) r R'_\Delta E'_\Delta .$$

Poichè la valutazione della deformazione intrinseca del generico elemento va fatta ritenendo questo come un continuo classico (con deformazione omogeneaı, si devono ritenere valide le [2]:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &E''_\Delta - 1 = \tfrac{1}{2}(\Delta E'' E''^{-1} + E'' \Delta E'') R''^{(T)} \\ &R_\Delta - 1 = \Delta R R^{(T)} + \tfrac{1}{2} R(\Delta E E^{-1} - E^{-1} \Delta E) R^{(T)} . \end{aligned}$$

---

[2] Esse seguono dalla $(19)_2$, pag. 21 di [2]. Si noti che con la notazione $R^{(T)}$ si è indicata la matrice trasposta della R.

La $(6)_1$ nel caso in esame, essendo $E'' = E'$, $\Delta E'' = \Delta E'$, $R'' = rR'$, diviene;

$$E''_\Delta = rE'_\Delta r^{(T)} . \tag{7}$$

Da (2), (4), (5), (7) segue:

$$R''_\Delta = (\boldsymbol{\omega}\Lambda + 1) rR'_\Delta r^{(T)} \tag{8}$$

$$\alpha''_\Delta = (\boldsymbol{\omega}\Lambda + 1) r\alpha'_\Delta r^{(T)} . \tag{9}$$

Da (7), (8), (9) seguono, trascurando gli infinitesimi del secondo ordine:

$$E''_\Delta - 1 = r(E'_\Delta - 1) r^{(T)} \qquad E''^{(T)}_\Delta - 1 = r(E'^{(T)}_\Delta - 1) r^{(T)} \tag{10}$$

$$R''_\Delta - 1 = r(R'_\Delta - 1) r^{(T)} + \boldsymbol{\omega}\Lambda \qquad R''^{(T)}_\Delta - 1 = r(R'^{(T)}_\Delta - 1) r^{(T)} - \boldsymbol{\omega}\Lambda \tag{11}$$

$$\alpha''_\Delta - 1 = r(\alpha'_\Delta - 1) r^{(T)} + \boldsymbol{\omega}\Lambda \qquad \alpha''^{(T)}_\Delta - 1 = r(\alpha'^{(T)}_\Delta - 1) r^{(T)} - \boldsymbol{\omega}\Lambda \ . \tag{12}$$

Da (10), (11) si ottiene derivando e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine;

$$E''^{(T)}_{\Delta/q''} = rE'^{(T)}_{\Delta/q'} r^{(T)} \frac{\partial x' q'}{\partial x'' q''} \tag{13}$$

$$R''^{(T)}_{\Delta/q''} = rR'^{(T)}_{\Delta/q'} r^{(T)} \frac{\partial x' q'}{\partial x'' q''} \tag{14}$$

ove con $/q'$ si indica la derivazione rispetto alle x' e con $/q''$ derivazione rispetto alle x''.

Da:

$$\alpha(C', C'') = r \qquad \alpha(C'', C') = r^{(T)} \tag{15}$$

segue:

$$\frac{\partial x' q'}{\partial x' q''} = r_{q''q'} . \tag{16}$$

2. – Nella meccanica dei continui classici, come ben noto, la densità di lavoro delle forze interne nel passaggio da una configurazione C a una vicinissima $C + \Delta C$ è data dall'invariante lineare del prodotto di una matrice di stress X per $(\alpha^{(T)}_\Delta - 1)$. Nel caso dei continui di Cosserat l'espressione di tale lavoro contine anche una parte lineare in $(R_\Delta^{(T)}-1)$ e $R_{\Delta/q}^{(T)}$. Nel caso di strutture più complesse, come quelle qui considerate, è naturale ritenere più generalmente che tale densità di lavoro nello stato attuale, sia espresso mediante l'invariante lineare ([3]):

$$\delta l^{(i)} = I\{X(\alpha_\Delta^{(T)}-1) + N(R_\Delta^{(T)}-1) + \\ + \psi^q(R_{\Delta/q}^{(T)}) + L(E_\Delta^{(T)}-1) + M^q(E_{\Delta/q}^{(T)})\} \tag{17}$$

essendo X, N ed L tre matrici di stress e ψ^q ed M^q tensori a tre indici, dipendenti dalle matrici α, R, E e dalle loro derivate rispetto alle coordinate eventualmente anche tramite la loro storia.

Definizione II. Siano $\Sigma' = (X', N', \psi'^{q'}, L', M'^{q'})$ e $\Sigma'' = (X'', N'', \psi''^{q''}, L'', M''^{q''})$ due sollecitazioni definite in due punti corrispondenti P' e P'' di due configurazioni del continuo C' e C'' r-corrispondepti. Tali sollecitazioni si dicono r-corrispondenti se sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} &X' = r^{(T)}X''r \qquad N' = r^{(T)}N''r \qquad \psi'^{q'} = r^{(T)}\psi''^{q''}rr_{q''q'} \\ &L' = r^{(T)}L''r \qquad M'^{q'} = r^{(T)}M''^{q''}rr_{q''q'} \end{aligned} \tag{18}$$

Sussiste il seguente:

Teorema I. Si fissino due configurazioni C' e C'' r-corrispondenti e due sollecitazioni $\Sigma' = (X', N', \psi'^{q'}, L', M'^{q'})$ e $\Sigma'' = (X'', N'', \psi''^{q''}, L'', M''^{q''})$ definite in due punti corrispondenti P' e P'' appartenenti rispettivamente a C' e C''. Delle seguenti proposizioni la prima equivale alla coppia delle altre due.

a) La densità di lavoro in P' e P'' delle sollecitazioni Σ' e Σ'' è la medesima in relazione a due qualunque deformazioni equivalenti a partire da C' e C''.

([3]) L'espressione (17) deriva sostanzialmente dall'ammissione che trattandosi di densità di lavoro corrispondente ad una deformazione infinitesima, essa sia espressa da una forma lineare nelle variabili geometriche che caratterizzano tale deformazione ed eventualmente da loro derivate rispetto alle coordinate dello stato di partenza (stato attuale). Vedi ad esempio [1], [3].

b_1) La densità di lavoro delle sollecitazioni Σ' e Σ'' in P' e P'' è nulla per qualunque spostamento rigido.

b_2) Σ' e Σ'' sono r-corrispondenti in P' e P''.

Comincio col dimostrare che da a) seguono b_1) e b_2).

La a) deve valere qualunque siano le due deformazioni equivalenti $\Delta C'$ e $\Delta C''$. Pongo allora:

$$\alpha_{\Delta}'^{(T)} - 1 = 0 \qquad R_{\Delta}'^{(T)} - 1 = 0 \qquad E_{\Delta}'^{(T)} - 1 = 0\,, \tag{19}$$

Da (19), (13), (14) segue:

$$R_{\Delta/q'}'^{(T)} = R_{\Delta/q''}''^{(T)} = E_{\Delta/q'}'^{(T)} = E_{\Delta/q''}''^{(T)} = 0\,. \tag{20}$$

Tenuto conto di (19), (20) e (17) la densità di lavoro in P' della sollecitazione Σ' per la deformazione $\Delta C'$ è:

$$\delta l' = 0\,. \tag{21}$$

Per la proposizione a) si deve avere allora l'eguaglianza a zero della densità di lavoro di Σ'' in P''. Tenuto conto di (10), (11), (12), (13), (14) la (17) porge:

$$\delta l'' = I\Big\{X''[r(\alpha_{\Delta}'^{(T)} - 1)\,r^{(T)} - \boldsymbol{\omega}\Lambda] + N''[r(R_{\Delta}'^{(T)} - 1)\,r^{(T)} - \boldsymbol{\omega}\Lambda] + \tag{22}$$
$$+ \psi''^{q''}\left[rR_{\Delta/q'}'^{(T)}\,r^{(T)}\,\frac{\partial x'\,q'}{\partial x''\,q''}\right] + L''[r(E_{\Delta}'^{(T)} - 1)\,r^{(T)}] + M''^{q''}\left[rE_{\Delta/q'}'^{(T)}\,r^{(T)}\,\frac{\partial x'\,q'}{\partial x''\,q''}\right]\Big\}\,.$$

Tenuto conto quindi di (19), (20) e della proposizione a), si ha:

$$\delta l'' = I\{(X'' + N'')(-\boldsymbol{\omega}\Lambda)\} = 0\,. \tag{23}$$

Dovendo la (23) valere qualunque sia il vettore infinitesimo $\boldsymbol{\omega}$ e ricordando che nell'espressione (17) del $\delta l^{(i)}$ la N può essere ritenuta emisimmetrica, data la emisimmetria di $(R_{\Delta} - 1)$ [4], da (23) segue:

$$N'' = \frac{X''^{(T)} - X''}{2} \tag{24}$$

---

[4] Tale proprietà segue immediatamente dalla $(6)_2$.

che implica l'annullarsi della densità di lavoro di Σ'' in P'' per ogni spostamento rigido.

Si supponga ora che le due deformazioni equivalenti $\Delta C'$ e $\Delta C''$ soddisfino alla condizione $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, ma non più alle (19), (20). Ammessa la validità del postulato a), da (17), (22) segue allora:

$$
\begin{aligned}
(25)\qquad & I\{X'(\alpha_\Delta'^{(T)} - 1) + N'(R_\Delta'^{(T)} - 1) + \psi'^{q'}(R'_{\Delta/q'}) + L'(E_\Delta'^{(T)} - 1) + \\
& + M'(E_{\Delta/q'}'^{(T)})\} = I\left\{X''[r(\alpha_\Delta'^{(T)} - 1)r^{(T)}] + N''[r(R_\Delta'^{(T)} - 1)r^{(T)}] + \right. \\
& \left. + \psi''q''\left[rR_{\Delta/q'}'^{(T)} r^{(T)} \frac{\partial x' q'}{\partial x'' q''}\right] + L''[r(E_\Delta'^{(T)} - 1)r^{(T)}] + M''q''\left[rE_{\Delta/q'}'^{(T)} r^{(T)} \frac{\partial x' q'}{\partial x'' q''}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Dovendo la (25) valere qualunque sia la deformazione $\Delta C'$ e, tenuto conto di una nota proprietà dell'invariante lineare del prodotto di matrici, si deduce:

$$
\begin{aligned}
(26)\qquad & X' = r^{(T)}X''r \qquad N' = r^{(T)}N''r \qquad \psi'^{q'} = r^{(T)}\psi''^{q''}rr_{q''q'} \\
& L' = r^{(T)}L''r \qquad M'^{q'} = r^{(T)}M''^{q''}rr_{q''q'}\,.
\end{aligned}
$$

Le (26) esprimono la validità della proposizione b_2).

Da $(26)_1$ e $(26)_2$ segue poi:

$$
(24)' \qquad N' = \frac{X'^{(T)} - X'}{2}
$$

che implica l'annullarsi della densità di lavoro di Σ' in P' per ogni spostamento rigido.

Resta così dimostrata la validità della proposizione b_1).

Moltiplicando ambo i membri della $(26)_3$, dopo averla esplicitata mediante le sue componenti, per il tensore di Ricci $l_{pl\varrho}$ si ottiene:

$$
(27)\qquad \psi_{\varrho l}'^{q'}\, e_{pl\varrho} = e_{pl\varrho} r_{\alpha\varrho}\, \psi_{\alpha s}''^{q''} r_{sl} r_{q''q'}\,.
$$

Da

$$
(28)\qquad e_{pl\varrho} r_{\alpha\varrho} r_{sl} r_{vp} = e_{vs\alpha} \qquad e_{pl\varrho} r_{\alpha\varrho} r_{sl} = e_{vs\alpha} r_{vp}
$$

segue

$$
(29)\qquad \psi_{\varrho l}'^{q'}\, e_{pl\varrho} = \psi_{\alpha s}''^{q''} r_{q''q'}\, e_{vs\alpha} r_{vp}\,.
$$

Posto

$$\psi'_{pq'} = \psi'^{q'}_{\varrho l} e_{pl\varrho} \qquad \psi''_{\nu q''} = \psi''^{q''}_{qs} e_{\nu sq}\,, \tag{30}$$

la (29) diviene:

$$\psi'_{pq'} = \psi''_{\nu q''} r_{q''q'} r_{\nu p} \tag{31}$$

che può essere scritta:

$$\psi' = r^{(T)} \psi'' r \tag{32}$$

È evidente che le (30) possono essere invertite e porgono.

$$2\psi'^{q'}_{\varrho l} = e_{pl\varrho} \psi'_{pq'} \qquad 2\psi''^{q''}_{qs} = e_{psq} \psi''_{pq''}\,. \tag{33}$$

La matrice ψ è più significativa del tensore ψ^q e nel caso la Σ sia intesa come il sistema delle sollecitazioni interne, rappresenta le coppie di contatto.

Dimostro ora che da b_1) e b_2) segue a).

Intanto si può osservare che come conseguenza immediata della proposizione b_1) seguono le (24), (24)'. Tenuto conto delle (26), valide per b_2), la (22) diviene:

$$\begin{aligned} \delta l'' = I\{X'(\alpha'^{(T)}_{\Delta} - 1) - X''(\boldsymbol{\omega}\Lambda) + N'(R'^{(T)}_{\Delta} - 1) - N''(\boldsymbol{\omega}\Lambda) + \\ + \psi'^{q'}(R'^{(T)}_{\Delta/q'}) + L'(E'^{(T)}_{\Delta} - 1) + M'^{q'}(E'^{(T)}_{\Delta/q'})\} = \\ = \delta l' - I\{(X'' + N'')(\boldsymbol{\omega}\Lambda)\} = \delta l' \end{aligned} \tag{34}$$

poichè l'invariante al penultimo membro di (34) si deve annullare qualunque sia $\boldsymbol{\omega}$ in accordo con la proposizione b_1).

Resta così completamente dimostrata la validità del teorema enunciato.

3. – Sul principio di indifferenza materiale.

Si consideri un processo $C'(t)$ del continuo e sia $C''(t)$ un altro arbitrario processo, tale però che ad ogni istante t, $C''(t)$ si ottenga da $C'(t)$ mediante uno spostamento rigido di insieme di rotazione $r(t)$.

Richiamo la seguente abituale enunciazione del principio di indifferenza materiale:

qualunque siano i processi $C'(t)$ e $C''(t)$, purchè $r(t)$-corrispondenti per ogni t, indicate con Σ' e Σ'' i sistemi delle sollecitazioni interne determinate da tali processi nei punti corrispondenti P' e P'' all'istante t, essi devono essere $r(t)$-corrispondenti.

Ciò detto discende immediatamente dal teorema I il seguente:

TEOREMA II. La prima delle seguenti proposizioni equivale alla coppia delle altre due.

a) Ad ogni istante t la densità di lavoro delle sollecitazioni interne Σ' e Σ'' sopra considerate in due punti corrispondenti P' e P'' è la medesima in relazione a due qualunque deformazioni equivalenti a partire rispettivamente dai processi $C'(t)$ e $C''(t)$.

b_1) Ad ogni istante t la densità di lavoro delle sollecitazioni interne Σ' e Σ'' sopra considerate è nulla per ogni spostamento rigido.

b_2) Sussiste il principio di indifferenza materiale.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. D. MINDLIN, *Microstructure in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., **16** (1964), pp. 51-78.
[2] C. TRUESDELL, *The elements of continuum mechanics*, Springer-Verlag.
[3] A. C. ERINGEN, *Theory of micropolar elasticity*, Academic Press Inc., New York and London.

Manoscritto pervenuto alla redazione il 6 dicembre 1975.