

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

**Precessioni regolari di un giroscopio soggetto a forze
newtoniane e a forze di potenza nulla**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 54 (1975), p. 69-81

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__69_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

Precessioni regolari di un giroscopio soggetto a forze newtoniane e a forze di potenza nulla.

ETTORE BENTSIK (*)

Sia C un giroscopio il cui baricentro si muova di moto circolare uniforme attorno ad un punto Q e sia C soggetto a forze newtoniane di centro Q e a forze di potenza nulla, ad esempio del tipo di quelle di Lorentz.

Il problema può, come in (I) riferirsi al moto di un satellite artificiale che descriva un'orbita equatoriale attorno alla Terra in una particolare semplice schematizzazione.

In questo lavoro si studia il moto di C intorno al baricentro [cioè rispetto ad assi con origine in G e di orientamento invariabile] e si determinano le precessioni regolari dinamicamente possibili aventi per asse di figura l'asse giroscopico, nel caso in cui il baricentro del corpo sia effettivamente mobile. Inoltre si dimostra che se esso è fisso, esse esauriscono la classe di tutte quelle dinamicamente possibili. In ogni caso il vettore che caratterizza le forze di potenza nulla deve essere parallelo all'asse di precessione e questo, se il baricentro del corpo è mobile, deve risultare ortogonale al piano della sua orbita.

1. Equazioni generali.

Sia C un giroscopio e si supponga che il suo baricentro G si muova di moto circolare uniforme in un piano π , attorno ad un punto Q .

(*) Indirizzo dell'A.: Università di Padova - Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(I) E. BENTSIK, *Rotazioni uniformi in un campo newtoniano con forze di potenza nulla* (in corso di stampa).

Si supponga che C sia soggetto a forze di tipo newtoniano di centro Q .

Sia \mathbf{H}^* un vettore invariabile, indipendente dai punti di C , tale che $-2\mathbf{H}^*$ coincida con l'intensità di un campo magnetico e sia μ^* la densità di una distribuzione di cariche elettriche solidali a C .

Si supponga poi che in C vi sia una distribuzione di massa con densità proporzionale a μ^* e che i momenti d'inerzia relativi a G siano proporzionali a quelli relativi alla effettiva costituzione di C .

Se si pone $\mathbf{H} = (A^*/A)\mathbf{H}^*$ (A è il momento principale d'inerzia rispetto all'asse solidale di indice 1 e origine G quando si attribuisca a C densità eguale a μ^*) è noto ⁽¹⁾ che il momento risultante rispetto a G delle forze di Lorentz si può esprimere, assunta una terna solidale coincidente con la terna principale d'inerzia, nella forma:

$$(1) \quad \mathbf{M}_G^{(L)} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma) \mathbf{H}$$

essendo

$$(2) \quad \lambda \equiv \begin{vmatrix} 2A + C & 0 & 0 \\ 0 & 2A + C & 0 \\ 0 & 0 & 2A + C \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}$$

dove A, B, C sono i momenti principali d'inerzia e $\boldsymbol{\omega} \equiv (p, q, r)$ indica la velocità angolare di C .

Si assuma come terna di riferimento una terna trirettangola levogira con l'origine in Q , assi x, y appartenenti al piano π e asse z perpendicolare a detto piano, si consideri inoltre, come s'è detto, una terna solidale coincidente con la terna centrale principale d'inerzia di C . Si indichi con \mathbf{c} il versore di GQ , con R la distanza di G da Q , con \mathbf{u} il versore dell'asse z , con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori della terna solidale, con $\mathbf{v} = \nu \mathbf{u}$ ($\nu = \text{cost.}$) la velocità angolare nel moto rotatorio di G intorno a Q e con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo C nel suo moto relativo al baricentro.

⁽¹⁾ G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Rendiconti Seminario Matematico dell'Università di Padova, **27** (1957).

Si denotino ancora con c_i, u_i i coseni direttori di \mathbf{c} e \mathbf{u} rispetto agli assi solidali, con μ la densità e con m la massa di C e M la massa di Q . Il potenziale delle forze newtoniane agenti sul corpo si può rappresentare mediante una serie di potenze di $1/R$ e se R è sufficientemente grande, arrestando lo sviluppo al primo termine della serie, si ha, a meno di una costante inessenziale, che il potenziale può essere espresso da ⁽²⁾:

$$(4) \quad U = -\frac{3g}{2R}(Ac_1^2 + Ac_2^2 + Cc_3^2)$$

dove si è posto

$$(5) \quad g = \frac{hM}{R^2}.$$

Risulta chiaramente che il momento risultante rispetto a G di tali forze è dato da

$$(6) \quad \mathbf{M}_G^{(N)} = \frac{3g}{R} \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c}.$$

Nel moto relativo al baricentro, tenuto conto che le forze di trascinamento hanno momento nullo rispetto a G , il teorema del momento delle quantità di moto assume la forma

$$(7) \quad \sigma \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma \boldsymbol{\omega} = \frac{3g}{R} \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c} + \lambda \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \sigma \mathbf{H}.$$

Si può notare che, nel caso $\mathbf{v} = 0$ sussiste il seguente integrale primo ⁽³⁾:

$$(8) \quad \boldsymbol{\omega} \times \sigma \boldsymbol{\omega} + \frac{3g}{R} \mathbf{c} \times \sigma \mathbf{c} = \text{cost.}$$

che rappresenta l'integrale dell'energia per $\mathbf{v} = 0$ (G fisso). Alle (8)

⁽²⁾ E. LEIMANIS, *The general Problem of the motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*, Springer Verlag (1965).

⁽³⁾ E. BENTSIK, *Su possibili moti semplici di un satellite artificiale soggetto a forze newtoniane*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **39** (1967).

vanno associate le equazioni cinematiche

$$(9) \quad \dot{\mathbf{c}} + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\nu}) \wedge \mathbf{c} = 0$$

$$(10) \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \boldsymbol{\nu} = \nu \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = 0,$$

$$(11) \quad \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = H \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

e inoltre

$$(12) \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

$$(13) \quad H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = H^2 = \text{cost.}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

$$(14) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$

$$(15) \quad \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{c} = 0.$$

Dove, essendosi posto $\mathbf{H} = H \boldsymbol{\gamma}$, si denotano con γ_i i coseni direttori di $\boldsymbol{\gamma}$ rispetto agli assi solidali.

OSSERVAZIONE

Vale la pena di osservare che nel caso che l'ellissoide centrale d'inerzia sia sferico cioè si abbia $A = C$, dalla (7) si trae

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}$$

e cioè

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H} + \varphi \boldsymbol{\nu}$$

con $\boldsymbol{\nu}$ versore di un qualsiasi asse solidale al corpo.

Ciò significa, dal momento che qualsiasi terna solidale è terna principale d'inerzia, che non sono dinamicamente possibili altri moti che precessioni regolari aventi asse di figura qualsiasi nel corpo e asse di precessione parallelo ad \mathbf{H} .

Si escluderà quindi, d'ora in poi, che l'ellissoide centrale d'inerzia sia una sfera.

2. Precessioni regolari nell'ipotesi $\nu \neq 0$.

Si vogliono determinare tutte le precessioni regolari dinamicamente possibili aventi per asse di figura l'asse giroscopico. Si potrà porre

$$(16) \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi \boldsymbol{\varepsilon} + \psi \mathbf{k}$$

con

$$(17) \quad \varphi = \text{cost.}, \quad \psi = \text{cost.},$$

essendo \mathbf{k} il versore dell'asse giroscopico ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ il versore dell'asse di precessione. Sarà quindi:

$$(18) \quad r = \varphi \cos \vartheta + \psi = r_0 = \text{cost.}.$$

Risulterà conveniente per il seguito adoperare una particolare forma delle equazioni dinamiche valida nel caso di un giroscopio (4). In altri termini è possibile e conveniente sostituire alla (7) il seguente gruppo di equazioni equivalenti:

$$(19) \quad C\dot{r} = M_3$$

$$(20) \quad \frac{d^2 \mathbf{k}}{dt^2} = \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{k}}{A_E} - \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \right)^2 \mathbf{k} - \frac{C}{A_E} r \frac{d\mathbf{k}}{dt} \wedge \mathbf{k}$$

dove con \mathbf{M} si indica il momento delle forze agenti, con M_i le sue componenti rispetto agli assi solidali, con \mathbf{E} il componente equatoriale (rispetto agli assi principali) di $\boldsymbol{\omega}$, con A_E il momento d'inerzia equatoriale del corpo. Sarà evidentemente $A_E = A = B$.

Introducendo analoga simbologia per gli altri vettori che compaiono nel problema, si potrà porre

$$(21) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_E + H_3 \mathbf{k},$$

$$(22) \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_E + c_3 \mathbf{k},$$

$$(23) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_E + \varepsilon_3 \mathbf{k}.$$

(⁴) A. SIGNORINI, *Complementi alla dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della balistica esterna*, Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, ser. 8, **1** (1946).

La (20) si trasforma quindi nella seguente equazione

$$(24) \quad \varphi \left[\varphi \cos \theta - \frac{C}{A} r \right] \boldsymbol{\varepsilon} + \varphi \left[\frac{C}{A} r \psi \cos \theta - \varphi + \varphi \operatorname{sen}^2 \theta \right] \mathbf{k} - \\ - \frac{1}{A} \left\{ \frac{3g}{R} (\mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c}) \wedge K + [(\varphi \boldsymbol{\varepsilon} + \psi \mathbf{k}) \wedge (\lambda - 2\sigma)(\mathbf{H}_E + H_3 \mathbf{k})] \wedge \mathbf{k} \right\} = 0$$

e da questa si trae

$$(25) \quad [\varphi(C - A) \cos \theta + C\psi + (C - 2A)H_3] \varphi(\mathbf{k} \cos \theta - \boldsymbol{\varepsilon}) + \\ + \frac{3g}{R} (C - A) C_3 \mathbf{c}_E - C(\varphi \cos \theta + \psi) \mathbf{H}_E = 0.$$

Inoltre, ricordando che r è costante, da (19) si ha:

$$(26) \quad \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{H}_E \times \mathbf{k} = 0.$$

Ciò implica che sia:

$$(27) \quad \mathbf{H} = H\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \dot{H}_3 \equiv 0.$$

Moltiplicando scalarmente la (25) per $\boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{k}$ e ricordando la (26) si ha:

$$(28) \quad c_3 \mathbf{c}_E \times \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{k} = 0.$$

Si hanno quindi due casi.

I caso. Si consideri per primo il caso in cui sia

$$(29) \quad \mathbf{c}_E \times \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{k} = 0.$$

Da (29) segue immediatamente il parallelismo fra $\boldsymbol{\varepsilon}_E$ e \mathbf{c}_E per cui si può porre

$$(30) \quad \mathbf{c}_E = \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_E$$

e

$$(31) \quad \mathbf{c} = \alpha \boldsymbol{\varepsilon} + \beta \mathbf{k}$$

con

$$(32) \quad \alpha = \frac{\sqrt{1 - c_3^2}}{\operatorname{sen} \vartheta}, \quad \beta = c_3 - \alpha \cos \vartheta$$

tenendo conto che

$$(33) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_E = \boldsymbol{\varepsilon} - \cos \vartheta \mathbf{k}$$

e ricordando le (27) e (30), la (25), indipendentemente dall'ipotesi (29), si può scrivere nella forma:

$$(34) \quad \left\{ (C-A)c_3 \frac{3g \sqrt{1-c_3^2}}{R \operatorname{sen} \vartheta} - [\varphi(C-A)(\varphi + 2H) \cos \vartheta + C\psi(H + \varphi)] \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_E = 0.$$

Dalla (34) segue che deve essere

$$(35) \quad c_3 = \operatorname{cost}$$

e quindi anche, da (32):

$$(36) \quad \alpha = \operatorname{cost}, \quad \beta = \operatorname{cost}.$$

Tenendo conto ora delle (31), (32), la (9) può assumere la forma

$$(37) \quad \varphi \beta \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{k} + (\beta \mathbf{k} + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}) \wedge \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente la (37) per $\boldsymbol{\nu}$ si ottiene

$$(38) \quad \boldsymbol{\varepsilon} \wedge \mathbf{k} \times \boldsymbol{\nu} = 0$$

il che implica che sia

$$(39) \quad \boldsymbol{\nu} = \nu \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$(40) \quad \varphi = \nu.$$

La condizione (15), in base ai risultati trovati, implica, per le (31), (32); (39), (40), che sia

$$(41) \quad c_3 = -\operatorname{sen} \vartheta$$

$$(42) \quad \mathbf{c} = \frac{\cos \vartheta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{k}}{\operatorname{sen} \vartheta}.$$

Inoltre la (34) può ora essere scritta nella forma

$$(43) \quad (A - C) \left[\frac{3g}{R} + \varphi(\varphi + 2H) \right] \cos \vartheta - C\psi(H + \varphi) = 0 .$$

Si può quindi concludere che, se l'asse di figura è asse giroscopico si possono avere, nel caso in esame, precessioni regolari aventi l'asse di precessione parallelo a \mathbf{v} purchè sia \mathbf{H} parallelo a \mathbf{v} , sia $\varphi = \nu$, ψ soddisfi alla (43) e \mathbf{c} sia orientato in modo da soddisfare alla (42).

II caso. Si supponga ora che sia

$$(44) \quad c_3 = 0 .$$

Naturalmente sarà ancora $\mathbf{H} = H\boldsymbol{\epsilon}$, $\dot{H}_3 \equiv 0$.

Si consideri la (25) valida anche ora; da essa per le (44), (33), (27) si ha:

$$(45) \quad \varphi(C - A)(\varphi + 2H) \cos \vartheta + C\psi(H + \varphi) = 0 .$$

Dalla condizione $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = 0$ segue poi

$$(46) \quad \mathbf{c} = \pm \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{k}}{\sqrt{\nu^2 - \nu_3^2}}$$

e dalla (9) si trae

$$(47) \quad \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{k}) = 0$$

il che comporta che si possa scrivere:

$$(48) \quad (\varphi \cos \vartheta - \nu_3) \nu_3 + \nu^2 - \varphi \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{v} = 0 .$$

Dalla (48) derivando si ha:

$$(49) \quad \varphi \cos \vartheta \dot{\nu}_3 - 2\nu_3 \dot{\nu}_3 - \varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\epsilon} \times \dot{\mathbf{v}}) = 0 .$$

Tenendo conto che:

$$(50) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \psi \boldsymbol{\epsilon} \wedge \mathbf{k}$$

$$(51) \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \wedge (\varphi \boldsymbol{\epsilon} + \psi \mathbf{k})$$

la (49) equivale alla

$$(52) \quad \varphi \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{k} (\varphi \cos \vartheta - 2\nu_3) = 0 .$$

Da (52) si deduce che \mathbf{v} deve essere parallelo a $\boldsymbol{\varepsilon}$ e che deve essere anche

$$(53) \quad \mathbf{c} = \pm \frac{\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}}{\text{sen } \vartheta} .$$

Le precessioni regolari in tal caso si possono avere solo se risulta, tenendo conto di (48):

$$(54) \quad \mathbf{H} = H \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(55) \quad \mathbf{v} = \pm \varphi \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(56) \quad \mathbf{c} = \pm \frac{\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}}{\text{sen } \vartheta} .$$

Naturalmente le (54), (55), (56) vanno associate alla (45).

Concludendo, alle condizioni riportate, sono ancora possibili precessioni regolari aventi per asse di figura l'asse giroscopico e aventi asse di precessione parallelo ad \mathbf{H} , dovendo essere \mathbf{H} parallelo a \mathbf{v} .

3. Precessioni regolari nell'ipotesi $\nu = 0$.

Si vogliono ora determinare tutte le precessioni regolari dinamicamente possibili nel caso in cui il punto Q sia fisso. Ciò comporta che sia

$$(57) \quad \mathbf{v} = 0 .$$

In tale ipotesi, contrariamente al caso precedente, non si fa alcuna ipotesi a priori sulla direzione dell'asse di figura e pertanto le precessioni che verranno determinate esauriscono la classe di tutte quelle dinamicamente possibili.

Rimangono inalterate le (2), (3), (7); (12), (13), e sussiste l'integrale primo

$$(58) \quad \sigma \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{3g}{R} \mathbf{c} \times \sigma \mathbf{c} = \text{cost.} .$$

La (9) si muta in

$$(59) \quad \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{0} .$$

Si ponga

$$(60) \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi \boldsymbol{\varepsilon} + \psi \boldsymbol{\chi} \quad \text{con } \varphi \text{ e } \psi \text{ costanti}$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}$ è un versore costante e $\boldsymbol{\chi}$ il versore di una retta solidale al corpo. Si ha:

$$(61) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

$$(62) \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1$$

dove le ε_i ($i = 1, 2, 3,$) sono le componenti di $\boldsymbol{\varepsilon}$ secondo gli assi solidali.

Si considerino ora le proiezioni delle (11), (59), (61), sull'asse di versore \mathbf{k} e della (7) sugli assi solidali:

$$(63) \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p ,$$

$$(64) \quad \dot{c}_3 = c_1 q - c_2 p ,$$

$$(65) \quad \dot{\varepsilon}_3 = \varepsilon_1 q - \varepsilon_2 p ,$$

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\dot{p} + (C - A) \left(qr - \frac{3g}{R} c_2 c_3 \right) = H(2A - C)q\gamma_3 - CHr\gamma_2 \\ A\dot{q} - (C - A) \left(pr - \frac{3g}{R} c_1 c_3 \right) = -H(2A - C)p\gamma_3 + CHr\gamma_1 \\ \dot{r} = H(\gamma_2 p - \gamma_1 q) . \end{array} \right.$$

Dalla terza delle (66) e dalla (63) si ha

$$(67) \quad \dot{r} = -H\dot{\gamma}_3 .$$

D'altra parte da (60) moltiplicando scalarmente per \mathbf{k} si ha:

$$(68) \quad \dot{r} = \varphi \dot{\varepsilon}_3 .$$

Dalle (67) e (68) e dalle (63) e (65) si trae:

$$(69) \quad \varphi \dot{\varepsilon}_3 = -H\dot{\gamma}_3$$

$$(70) \quad \varphi(\varepsilon_1 q - \varepsilon_2 p) = -H(\gamma_1 q - \gamma_2 p) .$$

La (70) può però essere scritta nella forma:

$$(71) \quad q(\varphi\boldsymbol{\varepsilon}_1 + H\boldsymbol{\gamma}_1) = p(\varphi\boldsymbol{\varepsilon}_2 + H\boldsymbol{\gamma}_2).$$

Dalla (71) si ha quindi:

$$(72) \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (\varphi\boldsymbol{\varepsilon} + H\boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{k} = 0.$$

Supposto per ora $\varphi\boldsymbol{\varepsilon} + H\boldsymbol{\gamma} \neq 0$, da (72) segue che il moto è una precessione avente per asse di figura l'asse di versore \boldsymbol{k} e per asse di precessione una retta parallela a $\varphi\boldsymbol{\varepsilon} + H\boldsymbol{\gamma}$. Essendosi già supposto che l'asse di precessione sia di versore $\boldsymbol{\varepsilon}$ ed essendo $\boldsymbol{\gamma}$ un versore costante, dovrà essere $\boldsymbol{\gamma}$ parallelo a $\boldsymbol{\varepsilon}$. Si ha quindi:

$$(73) \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi\boldsymbol{\gamma} + \psi\boldsymbol{k},$$

cioè le possibili precessioni devono avere l'asse di figura coincidente con l'asse giroscopico e l'asse di precessione parallelo ad H .

Prima di proseguire lo studio di questo caso è opportuno considerare l'ipotesi

$$(74) \quad \varphi\boldsymbol{\varepsilon} + H\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \varphi\boldsymbol{\varepsilon} = -H\boldsymbol{\gamma}.$$

In tal caso si dovrà porre

$$(75) \quad \boldsymbol{\omega} = -H\boldsymbol{\gamma} + \psi\boldsymbol{\chi}$$

e quindi

$$\text{e quindi} \quad \begin{cases} p = -H\gamma_1 + \psi\chi_1 \\ q = -H\gamma_2 + \psi\chi_2 \\ r = -H\gamma_3 + \psi\chi_3. \end{cases}$$

In tale ipotesi nulla a priori si può dire sull'asse di figura di versore $\boldsymbol{\chi}$.

Considerando tale caso, da (75) si ha

$$(76) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -H\dot{\boldsymbol{\gamma}} = H\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\gamma} = \psi\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi}$$

da cui segue

$$(77) \quad \begin{cases} \dot{p} = \psi(q\chi_3 - r\chi_2) \\ \dot{q} = \psi(r\chi_1 - p\chi_3) \\ \dot{r} = \psi(p\chi_2 - q\chi_1) \end{cases}$$

Dalle prime due delle (66), tenendo conto di (75) e (77), si ha:

$$(78) \quad \begin{aligned} \frac{3g}{R} c_1 c_3 &= H\gamma_3 p + \psi\chi_1 r \\ \frac{3g}{R} c_2 c_3 &= H\gamma_3 q + \psi\chi_2 r. \end{aligned}$$

Si consideri ora la (64) e se ne moltiplichi il primo e il secondo membro per c_3 (qualora fosse $c_3 = 0$ l'asse di figura sarebbe parallelo a \mathbf{c}), tenendo conto della (78) e della terza delle (77) si trae:

$$(79) \quad c_3 \dot{c}_3 = -\frac{R}{3g} r \dot{r}$$

e quindi

$$(80) \quad c_3^2 + \frac{R}{3g} r^2 = \varrho^2 = \text{cost.}$$

Quadrando e sommando le (78) si ha:

$$(81) \quad \frac{9g^2}{R^2} (1 - c_3^2) c_3^2 = H^2 \gamma_3^2 (p^2 + q^2) + \psi^2 r^2 (\chi_1^2 + \chi_2^2) + 2H\psi\gamma_3 r (\chi_1 p + \chi_2 q).$$

Tenendo conto ora delle condizioni in precedenza trovate, la (81) si può scrivere nella forma:

$$(82) \quad \frac{9g^2}{R^2} \left(1 - \varrho^2 + \frac{R}{3g} r^2\right) \left(\varrho^2 - \frac{R}{3g} r^2\right) = (-r + \psi\chi_3)^2 (\omega^2 - r^2) + \psi r^2 (\chi_1^2 + \chi_2^2) + 2\psi r (-r + \psi\chi_3) (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\chi} - \chi_3 r).$$

Ricordando che sono costanti le quantità ω^2 , $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\chi}$, χ_1 , χ_2 , χ_3 , la (82) si presenta come una equazione algebrica in r , il che significa che r dovrà essere costante durante il moto e che, di conseguenza, tenendo conto di (74) e di (75) si deduce che l'asse di figura coincide con l'asse giroscopico.

Pertanto se sono possibili dei moti di precessione regolare questi devono avere per asse di figura l'asse giroscopico e per asse di precessione una retta parallela ad \mathbf{H} e cioè una retta di versore $\boldsymbol{\gamma}$.

Si può infine osservare che se nella (80) fosse $\varrho = 0$ il moto si ri-

durrebbe ad una rotazione uniforme. Per lo studio dei moti di precessione in esame vale pertanto ancora la (73), con γ_3 e r costanti e $\rho \neq 0$.

Vale ormai lo stesso procedimento usato nel caso di G mobile.

In particolare rimangono valide le (26), (27), (28), per cui anche ora si potranno considerare due alternative.

I caso: Si supponga valida la (29). Si nota che allora continuano a sussistere anche le (34), (37) con $\mathbf{v} = 0$ e ne segue

$$(84) \quad \beta = 0 .$$

La (84) equivale poi a

$$(85) \quad \mathbf{c}_3 = \cos \vartheta , \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\varepsilon} .$$

In definitiva si hanno precessioni regolari aventi per asse di figura l'asse giroscopico, per asse di precessione la congiungente G con il centro Q di attrazione newtoniana e caratterizzate dalle seguenti condizioni

$$(86) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= H\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\omega} = \varphi\mathbf{c} + \psi\mathbf{k} \\ (C - A) \left[\frac{3g}{R} - \varphi(\varphi + 2H) \right] \cos \vartheta - C\psi(H + \varphi) &= 0 . \end{aligned}$$

II caso: Se si suppone invece valida la (44) si deduce l'esistenza di precessioni regolari caratterizzate ancora dalle (86) e, inoltre, dalla (45).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 settembre 1974.