RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FLAVIO PREVIALE

Tavole semantiche per sistemi astratti di logica estensionale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 31-57

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__31_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 54 (1975)

Tavole semantiche per sistemi astratti di logica estensionale.

Flavio Previale (*)

Sunto - In questo lavoro viene sviluppata una variante del metodo delle tavole semantiche, per sistemi di logica non classica dotati di una semantica estensionale (alla Kripke). L'ordinario concetto di tavola per questi sistemi non permette di definire, come nel caso classico, una procedura sistematica di costruzione che dia luogo, per ogni data formula valutata X, a una tavola T con la seguente proprietà: T è chiusa se e solo se X è insoddisfacibile. La versione modificata di tale concetto qui introdotta permette invece di ottenere una generalizzazione assai diretta della suddetta proprietà. Al fine di avere una trattazione uniforme dei vari sistemi di logica, sono stati presi come punto di riferimento i sistemi astratti di logica estensionali di Smullyan, che comprendono come casi speciali i sistemi classico, intuizionistico e modale S. 4.

Summary - This paper gives a variant of the method of semantic tableaux, for non-classical systems of Logic, for which an extensional (Kripke-style) Semantic is available. The ordinary notion of tableau for these Systems does not enable us to define, as in the classical case, a systematic procedure yelding, for any signed formula X, a tableau T with the following property: T is closed if and only if X is unsatisfiable. The modified notion of tableau considered here, on the contrary, allows us to obtain a straightforward generalization of this property. To make the treatment of the various systems of Logic more uniform, we are adopting in the following an abstract approach to extensional Logic, due to Smullyan, which, under different specializations, gives us classical, intuitionistic and modal S. 4 Systems.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via Carlo Alberto 10, 10100 Torino.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).

Introduzione.

Un pregio del metodo delle tavole semantiche, sostanzialmente dovuto a Beth e Hintikka, che non ha riscontro in altri calcoli logici, sta nella facilità con cui esso, con semplici e naturali convenzioni d'uso, può venir trasformato in un efficace algoritmo. Com'è noto, nel metodo delle tavole, il problema della validità di una formula A si configura come problema dell'insoddisfacibilità dell'*equazione logica* (o *formula valutata*) « A è falsa », e viene conseguentemente affrontato (con un procedimento che ricorda molto da vicino quello per le disequazioni algebriche) mediante la riduzione dell'equazione in sistemi alternativi di equazioni via via più semplici, posti ai nodi terminali dei successivi stadi della costruzione di una certa tavola *ad albero* (*finitamente generato*). Allorchè, ad un certo stadio della costruzione della tavola, compare, come nodo terminale di un certo ramo, un sistema contenente una coppia di equazioni *coniugate*, e cioè del tipo « B è vera », « B è falsa » (in forma abbreviata: V. B, F. B), relative a una stessa formula B, il ramo in questione, ovviamente corrispondente a un'alternativa impossibile, può venir troncato. Tale ramo, così come ogni suo (inutile) prolungamento verrà detto *chiuso* (un ramo non chiuso verrà detto *aperto*). Se accade che, ad un certo stadio della costruzione della tavola, ogni ramo risulti chiuso, nel qual caso diremo che la tavola stessa è *chiusa*, l'intero procedimento può venir arrestato, potendosene trarre la conclusione che l'equazione di partenza è insoddisfacibile (*Teorema di validità* del metodo delle tavole). Nel caso opposto, invece, e cioè se ad ogni stadio della costruzione la tavola possiede un ramo aperto (il che comporta, per il *Lemma di König* sugli alberi finitamente generati, che pure la tavola a cui tende il procedimento possiede un ramo aperto), non si può trarre la conclusione che l'equazione di partenza sia soddisfacibile. Questa conclusione è lecita solo nel caso che il processo di riduzione sia portato avanti con un ordine che assicuri l'effettiva riduzione di tutte le equazioni che via via si presentano in ciascun ramo aperto della tavola. La tavola a cui tende il procedimento viene allora detta *completa*. Per una qualsivoglia tavola completa vale il seguente *criterio*: l'equazione di partenza della tavola è insoddisfacibile (se e) solo se la tavola è chiusa. Si ha inoltre che ogni ramo aperto di una tavola completa fornisce in maniera del tutto naturale una classe di *soluzioni* dell'equazione data (e cioè una classe di *controesempi* per la formula A, se la data equazione è F. A).

Nel caso della logica classica, com'è noto, si definisce facilmente una procedura generale per la costruzione di una tavola completa per ogni data equazione logica. A una tal procedura è chiaramente associato un algoritmo per la verifica dell'insoddisfacibilità di un'equazione logica, e quindi della validità di una formula. L'algoritmo è naturalmente *parziale*, poichè può non arrestarsi e non fornire alcuna risposta, allorchè l'equazione di partenza è soddisfacibile (le *soluzioni*, fornite da un ramo aperto e infinito della tavola generata dell'algoritmo, possono a loro volta non essere riconoscibili).

L'esistenza di una procedura generale per la costruzione di una tavola completa per ogni data equazione logica permette di risolvere nella maniera più brillante il problema di trovare un criterio necessario e sufficiente per l'insoddisfacibilità di un'equazione logica. Tuttavia vi è un altro criterio, non traducibile in un algoritmo, ma assai generale, poichè non subordinato all'esistenza di tavole complete, il quale asserisce che un'equazione logica è insoddisfacibile se e solo se esiste una tavola chiusa per essa. A questo secondo criterio daremo il nome di *Teorema di validità e completezza* del metodo delle tavole.

Il metodo delle tavole semantiche è stato adattato dallo stesso Beth [1], ma soprattutto da Kripke [4], [5], anche a certi sistemi di logica non classica, come il sistema intuizionistico di Heyting, e il sistema modale S.4, previa l'introduzione di un'appropriate semantica *estensionale*, cioè fondata sulla teoria estensionale (o classica) degli insiemi. Il metodo delle tavole così adattato risulta *valido* e *completo* rispetto alla semantica introdotta, nel senso del precedente Teorema. Non esiste tuttavia una procedura generale per rendere una tavola *completa*, e cioè tale che l'equazione logica per cui essa è costruita risulti insoddisfacibile (se e) solo se la tavola è chiusa. La ragione di questa lacuna sta nel fatto che vi sono equazioni logiche, che chiameremo *speciali*, la cui riduzione comporta la contemporanea eliminazione, dal sistema a cui appartengono, di certe altre equazioni, in particolare di ogni altra equazione speciale; cosicchè non è possibile ad esempio ridurre, nel corso della costruzione di una stessa tavola, due diverse equazioni speciali, appartenenti allo stesso sistema, e non si può d'altra parte escludere che scegliendo di ridurre una delle due, ci si precluda di ottenere una tavola chiusa, ottenibile con l'altra scelta.

Per tenere conto dei modi essenzialmente diversi di proseguire la costruzione di una tavola, quando si abbia a che fare con equazioni speciali, si può spostare l'attenzione dalla tavola stessa a un albero di tavole, in cui ogni ramo consiste dei vari stadi della costruzione di una singola tavola e i punti di diramazione corrispondono agli stadi in cui si riducono equazioni speciali. Per questo albero di tavole può venir definita una nozione di completezza soddisfacente al requisito che, dato un albero completo di tavole per una certa equazione logica, l'equazione è insoddisfacibile (se e) solo se l'albero contiene una tavola chiusa. Questa è sostanzialmente la via seguita da Kripke nei lavori citati. Ci sembra tuttavia, che, anche a non voler considerare la scarsa maneggevolezza di un albero di tavole, questo tipo di struttura mal si presta a generalizzazioni delle nozioni di *chiuso*, *aperto*, *completo* che diano le corrispondenti definizioni classiche come casi particolari, e che verifichino proprietà formalmente identiche a quelle relative al caso classico. Per ovviare a questo inconveniente ho qui introdotto la nozione di *albero generatore di un sistema di tavole*. In sostanza mi sono limitato a sostituire a un albero di tavole una singola tavola *stratificata* su più *livelli*, i cui *strati* sono le tavole ordinarie da essa generate. In tale struttura la funzione di *ramo* è assunta dal *ramo complesso*, anch'esso stratificato su più livelli e aventi come strati dei rami ordinari. Con queste sostituzioni le definizioni delle nozioni di *chiuso* e *aperto* restano formalmente immutate, e si ha inoltre, com'è desiderabile che sia, che un albero generatore di un sistema di tavole è chiuso (e cioè ogni suo ramo complesso è chiuso) se e solo se almeno una tavola del sistema generato è chiusa. Con un'opportuna definizione di completezza, si ottiene poi che, per un albero generatore completo, le due precedenti condizioni equivalenti equivalgano entrambe all'insoddisfacibilità dell'equazione logica per cui vien costruito il sistema di tavole. Allorchè questa equazione è soddisfacibile, ogni ramo complesso aperto dell'albero generatore completo fornisce d'altra parte in maniera analoga al caso classico, una classe di possibili soluzioni dell'equazione. Il più volte citato teorema di validità e completezza per il metodo delle tavole può infine essere dedotto facilmente dai precedenti risultati, previa la constatazione che per ogni equazione logica del sistema considerato, esiste un albero generatore completo.

Per unificare la trattazione dei vari sistemi logici considerati, nonchè per mettere meglio in evidenza la generalità dei risultati ottenuti, ci riferiremo in seguito ai cosiddetti *sistemi astratti di logica estensionale*, introdotti da Smullyan in [7] e [8].

1. Sistemi astratti di logica estensionale.

Un *sistema astratto di logica estensionale* secondo Smullyan è, prescindendo da talune modifiche marginali, una settupla $S = \langle E, -, \varphi, C, U, \theta, P\rangle$, in cui:

1) E è un insieme i cui elementi verranno anche chiamati *elementi del sistema*, e, negli esempi che ci interessano, *equazioni logiche* o *formule valutate*.

2) — è una funzione definita su E, che associa ad ogni $X \in E$ un elemento $\overline{X} \in E$, detto il *coniugato* di X, in modo tale che $\overline{X} \neq X$, $\overline{\overline{X}} = X$.

3) φ è una funzione definita su E, il cui valore per $X \in E$ è una successione al più numerabile di elementi di E, detta *successione delle componenti* di X, tale che, se $\varphi(X) = \langle X_1, \ldots, X_n, \ldots\rangle$, $\varphi(\overline{X}) = \langle \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n, \ldots\rangle$. Gli elementi X per cui $\varphi(X)$ è non vuota verranno detti *composti*, quelli per cui $\varphi(X)$ è vuota verranno detti *atomici*.

4) C è un sottoinsieme di E, tale che, posto $C^- = \{\overline{X} | X \in C\}$, $C \cup C^-$ coincide con l'insieme degli elementi composti del sistema aventi un numero finito di componenti, mentre $C \cap C^-$ coincide con l'insieme degli elementi composti aventi esattamente una componente. Gli elementi di C verranno detti *congiuntivi*, quelli di C^- *disgiuntivi*.

5) U è un sottoinsieme di E, tale che, posto $U^- = \{\overline{X} | X \in U\}$, $U \cup U^-$ coincide con l'insieme degli elementi composti del sistema aventi un'infinità numerabile di componenti, mentre $U \cap U^-$ è vuoto. Gli elementi di U verranno detti *universali*, quelli di U^- *esistenziali*.

6) θ è una funzione definita su E, che associa ad ogni $X \in E$ un insieme finito di interi positivi, i cui membri verranno detti (*indici dei parametri*) *occorrenti in* X, ed è tale che, per ogni $X \in E$, $\theta(X) = \theta(\overline{X})$, $X \in C \cup C^-$ implica $\theta(X) = \bigcup\{\theta(X_i) | i \geqslant 1\}$, $X \in U \cup U^-$ implica $\theta(X) \subseteq \theta(X_i) \subseteq \theta(X) \cup \{i\}$ per ogni intero positivo i (avendo indicato con X_i la i-esima componente di X).

7) P è un sottoinsieme di E, tale che, posto $P^- = \{\overline{X} | X \in P\}$, $P \cap P^- = \emptyset$. Gli elementi di P verranno detti *permanenti*, quelli di P^- *copermanenti*, tutti gli altri *neutrali*.

Nel seguito adotteremo sistematicamente le seguenti convenzioni di scrittura. Le lettere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ indicheranno esclusivamente un generico elemento di C, C^-, U, U^- rispettivamente. α_i, rispettiv. β_i, indicherà la i-esima componente di α, rispettiv. β, con l'ipotesi implicita che tale componente sia definita. $\gamma(i)$, rispettiv. $\delta(i)$, indicherà l'i-esima componente di γ, rispettiv. δ.

Un *modello* per il sistema astratto $\boldsymbol{S}$ è una quadrupla $\boldsymbol{M} = \langle W, \varrho, \pi, \vdash \rangle$, in cui:

1) W è un insieme non vuoto, detto insieme degli *universi*.

2) ϱ è una relazione riflessiva e transitiva su W.

3) π è una funzione definita su W e avente per valori insiemi non vuoti di interi positivi, tale che, per ogni Γ, $\Gamma^* \in W$, $\Gamma \varrho \Gamma^*$ implica $\pi(\Gamma) \subseteq \pi(\Gamma^*)$.

4) $\vdash$ è una relazione tra elementi di W ed elementi di E, soddisfacente alle seguenti condizioni tra generici elementi $\Gamma \in W$ e $X, \alpha, \gamma \in E$:

$\boldsymbol{M}_0$) (*a*) $\Gamma \vdash X$ se e solo se $\Gamma \nvdash \bar{X}$.

(*b*) Se X è permanente, $\Gamma \vdash X$ implica $\Gamma^* \vdash X$ per ogni Γ^*, tale che $\Gamma \varrho \Gamma^*$ (d'ora in poi Γ^* denoterà sempre un elemento con questa proprietà).

$\boldsymbol{M}_1$) (*a*) Se α è neutrale, $\Gamma \vdash \alpha$ se e solo se $\Gamma \vdash \alpha_i$ per ogni α_i.

(*b*) Se α è permanente, $\Gamma \vdash \alpha$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \alpha_i$ per ogni Γ^* e ogni α_i.

(*c*) Se α è copermanente, $\Gamma \vdash \alpha$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \alpha_i$ per qualche Γ^* e ogni α_i.

$\boldsymbol{M}_2$) (*a*) Se γ è neutrale, $\Gamma \vdash \gamma$ se e solo se $\Gamma \vdash \gamma(i)$ per ogni $i \in \pi(\Gamma)$.

(*b*) Se γ è permanente, $\Gamma \vdash \gamma$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \gamma(i)$ per ogni Γ^* e ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$.

(*c*) Se γ è copermanente, $\Gamma \vdash \gamma$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \gamma(i)$ per qualche Γ^* e ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$.

Osservazione. Dalle M_0)-M_2) seguono condizioni *duali* relative a generici β e δ:

M_1^-) (*a*) Se β è neutrale, $\Gamma \vdash \beta$ se e solo se $\Gamma \vdash \beta_i$ per qualche β_i.

(*b*) Se β è permanente, $\Gamma \vdash \beta$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \beta_i$ per ogni Γ^* e qualche β_i.

(*c*) Se β è copermanente, $\Gamma \vdash \beta$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \beta_i$ per qualche Γ^* e qualche β_i.

M_2^-) (*a*) Se δ è neutrale, $\Gamma \vdash \delta$ se e solo se $\Gamma \vdash \delta(i)$ per qualche $i \in \pi(\Gamma)$.

(*b*) Se δ è permanente, $\Gamma \vdash \delta$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \delta(i)$ per ogni Γ^* e qualche $i \in \pi(\Gamma^*)$.

(*c*) Se δ è copermanente, $\Gamma \vdash \delta$ se e solo se $\Gamma^* \vdash \delta(i)$ per qualche Γ^* e qualche $i \in \pi(\Gamma^*)$.

Le condizioni M_0)-M_2) sono equivalenti a quelle che si ottengono da esse sostituendo M_1^-) e M_2^-) a M_1) e M_2), o anche sostituendo M_1^-) (*b*) e M_2^-) (*b*) a M_1) (*c*) e M_2) (*c*), o infine sostituendo M_1^-) (*c*) e M_2^-) (*c*) a M_1) (*b*) e M_2) (*b*).

Osserviamo inoltre che, se il sistema S è *ben fondato*, e cioè tale che non esistano successioni infinite di elementi di S in cui ciascun membro sia componente del precedente, la relazione $\vdash$ è univocamente determinata dalla sua restrizione all'insieme delle coppie $\langle \Gamma, X\rangle$ con X atomico.

Definizione. Γ *soddisfa* X nel modello M allorchè $\Gamma \vdash X$. Γ *realizza* X *allorch*è $\Gamma \vdash X$ e $\theta(X) \subseteq \pi(\Gamma)$.

Un insieme K di elementi di S è *soddisfacibile*, rispettiv. *realizzabile*, nel modello M se esiste un universo Γ di M che soddisfa, rispettiv. realizza, ogni elemento di K in M.

K è *soddisfacibile*, rispettiv. *realizzabile*, se lo è in qualche modello di S.

2. Esempi di sistemi astratti di logica estensionale.

I) Sia L un linguaggio del 1° ordine dotato dei connettivi $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ dei quantificatori $\forall$, $\exists$, di un certo insieme al più numerabile di parametri relazionali, di un'infinità numerabile di variabili individuali $x_1, \dots, x_n, \dots$, di un'infinità numerabile di parametri individuali $a_1, \dots, a_n, \dots$. Facciamo le seguenti posizioni:

1) E è l'insieme delle equazioni logiche di $\boldsymbol{L}$.

2) — è definita da $\overline{V.A} = F.A$, $\overline{F.A} = V.A$.

3) φ è definita da

$$\varphi(\mathrm{F}.\sim A) = \langle \mathrm{V}.A \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{V}.\sim A) = \langle \mathrm{F}.A \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{V}.A \wedge B) = \varphi(\mathrm{V}.A \vee B) = \langle \mathrm{V}.A, \mathrm{V}.B \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{F}.A \wedge B) = \varphi(\mathrm{F}.A \vee B) = \langle \mathrm{F}.A, \mathrm{F}.B \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{V}.A \rightarrow B) = \langle \mathrm{F}.A, \mathrm{V}.B \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{F}.A \rightarrow B) = \langle \mathrm{V}.A, \mathrm{F}.B \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{V}.\forall x\, A(x)) = \varphi(\mathrm{V}.\exists x\, A(x)) = \langle \mathrm{V}.A(a_1), \dots, \mathrm{V}.A(a_n), \dots \rangle$$
$$\varphi(\mathrm{F}.\forall x\, A(x)) = \varphi(\mathrm{F}.\exists x\, A(x)) = \langle \mathrm{F}.A(a_1), \dots, \mathrm{F}.A(a_n), \dots \rangle$$

4) C è l'insieme di tutte le equazioni logiche del tipo $\mathrm{V}.\sim A$, $\mathrm{F}.\sim A$, $\mathrm{V}.A \wedge B$, $\mathrm{F}.A \vee B$, $\mathrm{F}.A \rightarrow B$.

5) U è l'insieme di tutte le equazioni logiche del tipo $\mathrm{V}.\forall x\, A(x)$, $\mathrm{F}.\exists x\, A(x)$.

6) θ associa ad ogni equazione logica $\mathrm{V}.A$ o $\mathrm{F}.A$ l'insieme degli indici dei parametri a_i occorrenti in A.

7) P è l'insieme di tutte le equazioni logiche del tipo $\mathrm{V}.A$.

Con queste posizioni $\boldsymbol{S}_I(\boldsymbol{L}) = \langle E, -, \varphi, C, U, \theta, P \rangle$ è un sistema astratto di Smullyan, che chiameremo *sistema intuizionistico associato al linguaggio* $\boldsymbol{L}$.

Dato un modello $\boldsymbol{M} = \langle W, \varrho, \pi, \vdash \rangle$ di $\boldsymbol{S}_I(\boldsymbol{L})$, e posto, per ogni formula A, $\Gamma \vdash A$ se e solo se $\Gamma \vdash \mathrm{V}.A$ (dunque, per la $\boldsymbol{M}_0(a)$, $\Gamma \nvdash A$ se e solo se $\Gamma \vdash \mathrm{F}.A$) le condizioni $\boldsymbol{M}_0$)-$\boldsymbol{M}_2$) danno luogo alle

a) $\Gamma \vdash A$ implica $\Gamma^* \vdash A$ per ogni Γ^*

b) $\Gamma \vdash A \wedge B$ se e solo se, per ogni Γ^*, $\Gamma^* \vdash A$ e $\Gamma^* \vdash B$

c) $\Gamma \vdash A \vee B$ se e solo se, per ogni Γ^*, $\Gamma^* \vdash A$ o $\Gamma^* \vdash B$

d) $\Gamma \vdash \sim A$ se e solo se, per ogni Γ^*, $\Gamma^* \nvdash A$

e) $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ se e solo se, per ogni Γ^*, $\Gamma^* \nvdash A$ o $\Gamma^* \vdash B$

f) $\Gamma \vdash \forall x\ A(x)$ se e solo se, per ogni Γ^* e ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$, $\Gamma^* \vdash A(a_i)$

g) $\Gamma \vdash \exists x\ A(x)$ se e solo se, per ogni Γ^* esiste $i \in \pi(\Gamma^*)$ tale che $\Gamma^* \vdash A(a_i)$.

In *b*), *c*), *g*) è poi ancora possibile sostituire a secondo membro dell'equivalenza Γ^* con Γ. A questo punto, supponendo che, per ogni $\Gamma \in W$, l'insieme di parametri $\{a_i | i \in \pi(\Gamma)\}$ sia un insieme di *nomi* per l'insieme degli *individui* dell'universo Γ, ci troviamo di fronte alle note condizioni affinchè $\boldsymbol{M}$ sia un modello intuizionistico di Kripke del linguaggio $\boldsymbol{L}$.

II) Sia $\boldsymbol{S}_C(\boldsymbol{L})$ il sistema astratto che si ottiene da $\boldsymbol{S}_I(\boldsymbol{L})$ mutando la posizione 7) in $P = \emptyset$. $\boldsymbol{S}_C(\boldsymbol{L})$ verrà detto *sistema classico associato al linguaggio* $\boldsymbol{L}$. Un modello $\boldsymbol{M} = \langle W, \varrho, \pi, \vdash \rangle$ di $\boldsymbol{S}_C(\boldsymbol{L})$ induce una famiglia $\{\boldsymbol{M}_\Gamma | \Gamma \in W\}$ di modelli classici di $\boldsymbol{L}$, ove si assuma, per ogni $\Gamma \in W$, $\{a_i | i \in \pi(\Gamma)\}$ come insieme di nomi per l'insieme degli individui del modello $\boldsymbol{M}_\Gamma$, e $\Gamma \vdash \mathrm{V}. (\ldots)$ come predicato di soddisfazione per $\boldsymbol{M}_\Gamma$. Γ soddisfa $\mathrm{V}. A$ in $\boldsymbol{M}$ se e solo se $\boldsymbol{M}_\Gamma$ soddisfa A; dunque in particolare V. A è soddisfacibile nel senso del sistema $\boldsymbol{S}_C(\boldsymbol{L})$ se e solo se A è soddisfacibile classicamente.

III) Sia $\boldsymbol{L}'$ il linguaggio che si ottiene da $\boldsymbol{L}$, aggiungendo ad esso due connettivi monoargomentali $\Box$ e $\Diamond$, e sia $\boldsymbol{S}_{S.4}(\boldsymbol{L}') = \langle E, -, \varphi, C, U, \theta, \boldsymbol{P} \rangle$ il sistema astratto così definito:

1) E è l'insieme delle equazioni logiche di $\boldsymbol{L}'$.

2, 5, 6) $-$, U, θ sono definiti come nell'Esempio I.

3) φ è definita dalle corrispondenti uguaglianze dell'Esempio I e inoltre da

$$\varphi(\mathrm{V}. \Box A) = \varphi(\mathrm{V}. \Diamond A) = \langle \mathrm{V}. A \rangle$$

$$\varphi(\mathrm{F}. \Box A) = \varphi(\mathrm{F}. \Diamond A) = \langle \mathrm{F}. A \rangle$$

4) C è la riunione dell'insieme omonimo dell'Esempio I e di tutte le equazioni logiche del tipo $\mathrm{V}.\,\Box A$, $\mathrm{V}.\diamond A$, $\mathrm{F}.\,\Box A$, $\mathrm{F}.\diamond A$.

7) P è l'insieme di tutte le equazioni logiche del tipo $\mathrm{V}.\,\Box A$, $\mathrm{F}.\diamond A$.

$\boldsymbol{S}_{S.4}(\boldsymbol{L}')$ verrà detto *sistema modale $S.4$ associato al linguaggio* $\boldsymbol{L}'$. Con le identificazioni dell'Esempio I, le condizioni affinchè $\boldsymbol{M} = \langle W, \varrho, \pi, \vdash\rangle$ sia un modello del sistema astratto $\boldsymbol{S}_{S.4}(\boldsymbol{L}')$ si mutano nelle condizioni affinchè $\boldsymbol{M}$ sia un modello di Kripke per il sistema modale $S.4$ del linguaggio $\boldsymbol{L}'$.

Osservazione. In tutti e tre i sistemi astratti considerati i concetti di soddisfacibilità e di realizzabilità coincidono.

3. Elementi speciali.

Definizione (Smullyan). Sia $\boldsymbol{S}$ un sistema astratto di logica estensionale. Un elemento di $\boldsymbol{S}$ verrà detto *speciale*, se è un elemento copermanente con almeno una componente neutrale o permanente, oppure se è un δ copermanente. Un elemento non speciale verrà detto *ordinario*.

Nell'Esempio I, sono speciali $\mathrm{F}.\sim A$, $\mathrm{F}.\,A \to B$, $\mathrm{F}.\,\forall x\, A(x)$; nell'Esempio III, sono speciali $\mathrm{F}.\,\Box A$, con A non del tipo $\Box B$, e $\mathrm{V}.\diamond A$, con A non del tipo $\diamond B$.

La distinzione tra elementi ordinari e speciali è giustificata dal seguente *Lemma*, da cui fra l'altro segue che gli elementi copermanenti ordinari e i permanenti loro coniugati soddisfano alle medesime condizioni $\boldsymbol{M}_1)$ (a), $\boldsymbol{M}_2)$ (a), $\boldsymbol{M}_1^-)$ (a), $\boldsymbol{M}_2^-)$ (a) degli elementi neutrali (fatto sfruttato da Kripke nella sua definizione di modello intuizionistico).

Lemma. *Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ elementi ordinari, $\boldsymbol{M}$ un modello del sistema astratto $\boldsymbol{S}$, Γ un universo di $\boldsymbol{M}$. Abbiamo*:

$$\begin{array}{llll} \Gamma \vdash \alpha & \textit{implica } \Gamma \vdash \alpha_i & \textit{per ogni} & \alpha_i \\ \Gamma \vdash \beta & \textit{implica } \Gamma \vdash \beta_i & \textit{per qualche} & \beta_i \\ \Gamma \vdash \gamma & \textit{implica } \Gamma \vdash \gamma(i) & \textit{per ogni} & i \in \pi(\Gamma) \\ \Gamma \vdash \delta & \textit{implica } \Gamma \vdash \delta(i) & \textit{per qualche} & i \in \pi(\Gamma)\,. \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Ci si può limitare a considerare il caso di un α, β, o γ copermanente (gli altri casi essendo ovvi).

Notiamo anzitutto che se X è un elemento copermanente, $\Gamma^* \vdash X$ implica $\Gamma \vdash X$. Infatti, essendo $\bar{X}$ permanente, $\Gamma \vdash \bar{X}$ implica $\Gamma^* \vdash \bar{X}$, dunque $\Gamma \nvdash X$ implica $\Gamma^* \nvdash X$.

Pertanto, se $\Gamma \vdash \alpha$, si ha $\Gamma^* \vdash \alpha_i$ per qualche Γ^* e ogni α_i, e quindi, essendo α_i copermanente, $\Gamma \vdash \alpha_i$ per ogni α_i.

Similmente, $\Gamma \vdash \beta$ implica $\Gamma \vdash \beta_i$ per qualche β_i.

Supposto infine $\Gamma \vdash \gamma$, si ha $\Gamma^* \vdash \gamma(i)$ per qualche Γ^* e ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$; in particolare $\Gamma^* \vdash \gamma(i)$ per ogni $i \in \pi(\Gamma) \subseteq \pi(\Gamma^*)$. Ne segue, per la copermanenza di $\gamma(i)$, $\Gamma \vdash \gamma(i)$ per ogni $i \in \pi(\Gamma)$.

Dal *Lemma* appena dimostrato si ricava un *Teorema* che ci garantirà la *validità* del metodo delle tavole semantiche per il sistema astratto $\boldsymbol{S}$. Occorre premettere una definizione.

DEFINIZIONE (Smullyan). Il sistema astratto $\boldsymbol{S}$ si dice *semanticamente normale*, se per ogni insieme finito K di elementi di $\boldsymbol{S}$, ogni elemento X che sia un γ o δ, e ogni coppia di interi positivi i, j tali che $i \notin \theta(K \cup \{X(j)\})$, se $K \cup \{X(j)\}$ è realizzabile, pure $K \cup \{X(i)\}$ è realizzabile.

(I sistemi degli Esempi I)-III) sono tutti semanticamente normali).

TEOREMA I (Smullyan). *Sia $\boldsymbol{S}$ un sistema astratto semanticamente normale, K un insieme finito di elementi di $\boldsymbol{S}$, realizzabile, K_p l'insieme degli elementi permanenti di K.*

a) Se $\alpha \in K$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono le componenti di α, risulta realizzabile: l'insieme $K \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, se α è ordinario, l'insieme $K_p \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, se α è speciale.

b) Se $\beta \in K$, per qualche β_i è realizzabile: l'insieme $K \cup \{\beta_i\}$, se β è ordinario, l'insieme $K_p \cup \{\beta_i\}$, se β è speciale.

c) Se $\gamma \in K$, per ogni i è realizzabile: l'insieme $K \cup \{\gamma(i)\}$, se γ è ordinario, l'insieme $K_p \cup \{\gamma(i)\}$, se γ è speciale.

d) Se $\delta \in K$, per ogni $i \notin \theta(K)$ è realizzabile: l'insieme $K \cup \{\delta(i)\}$, se δ è ordinario, l'insieme $K_p \cup \{\delta(i)\}$, se δ è speciale.

DIMOSTRAZIONE. Ci limiteremo a provare *c*) e *d*) (*a*) e *b*) essendo conseguenze quasi immediate del precedente *Lemma*).

c) Supponiamo $\gamma \in K$, e che (in un certo modello $\boldsymbol{M}$) Γ realizzi K. Sia dapprima γ ordinario. In questo caso, se $i \in \pi(\Gamma)$, Γ realizza $K \cup \{\gamma(i)\}$ per il *Lemma*. Se invece $i \notin \pi(\Gamma)$, consideriamo un $j \in \pi(\Gamma)$. Γ realizza $K \cup \{\gamma(j)\}$, d'altra parte $i \notin \theta(K \cup \{\gamma(j)\}) \subseteq \theta(K) \cup \{j\} \subseteq \pi(\Gamma)$. Quindi, per la normalità di $\boldsymbol{S}$, $K \cup \{\gamma(i)\}$ è realizzabile.

Supponiamo ora γ speciale. Esiste Γ^* tale che Γ^* realizza $\gamma(i)$, dunque $K_p \cup \{\gamma(i)\}$, per ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$. Resta da provare che anche per un $i \notin \pi(\Gamma^*)$, $K_p \cup \{\gamma(i)\}$ è realizzabile. Allo scopo consideriamo un $j \in \pi(\Gamma^*)$. Γ^* realizza $K_p \cup \{\gamma(j)\}$; d'altra parte $i \notin \theta(K_p \cup \{\gamma(j)\}) \subseteq \subseteq \pi(\Gamma^*)$. Quindi, per la normalità di $\boldsymbol{S}$, $K_p \cup \{\gamma(i)\}$ è realizzabile.

d) Supponiamo $\delta \in K$, $i \notin \theta(K)$, e che Γ realizzi K. Supponiamo dapprima δ ordinario. Per qualche $j \in \pi(\Gamma)$, Γ realizza $\delta(j)$, quindi $K \cup \{\delta(j)\}$. Se $i = j$, Γ realizza $K \cup \{\delta(i)\}$. Se $i \neq j$, $i \notin \theta(K \cup \{\delta(j)\})$, e dunque per la normalità di $\boldsymbol{S}$, $K \cup \{\delta(i)\}$ è realizzabile.

Supponiamo ora δ speciale. Per qualche Γ^* e qualche $j \in \pi(\Gamma^*)$, Γ^* realizza $\delta(j)$, quindi $K_p \cup \{\delta(j)\}$. Come sopra, la normalità di $\boldsymbol{S}$ comporta che $K_p \cup \{\delta(i)\}$ sia realizzabile.

4. – Tavole semantiche.

Sia $\boldsymbol{S}$ un sistema astratto, T un albero, a ciascun nodo del quale è associata una successione finita di elementi di $\boldsymbol{S}$. Un ***blocco*** di T è per definizione la coppia formata da un nodo di T e dalla successione che gli è associata. Tuttavia, per comodità, si parlerà di esso come dell'occorrenza di una successione in T, identificandolo talvolta con la successione stessa (che rappresenteremo senza l'uso di parentesi).

Un albero T' si dirà *estensione immediata* di T, se T' si ottiene da T facendo seguire immediatamente e simultaneamente a un blocco terminale K di un ramo di T uno o più blocchi secondo le seguenti *regole di riduzione*:

$$A) \quad \frac{K}{K, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \quad (\alpha \in K,\ \alpha \text{ ordinario})$$

$$A_s) \quad \frac{K}{K_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \quad (\alpha \in K,\ \alpha \text{ speciale})$$

(essendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ le componenti di α, e K_p la sottosuccessione degli elementi permanenti di K)

$$B)\quad \frac{K}{K, \beta_1|K, \beta_2|\ldots|K, \beta_n} \quad (\beta \in K,\ \beta \text{ ordinario})$$

$$B_s)\quad \frac{K}{K_p, \beta_1|K_p, \beta_2|\ldots|K_p, \beta_n} \quad (\beta \in K,\ \beta \text{ speciale})$$

(essendo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ le componenti di β).

$$C)\quad \frac{K}{K, \gamma(i)} \quad (\gamma \in K,\ \gamma \text{ ordinario})$$

$$C_s)\quad \frac{K}{K_p, \gamma(i)} \quad (\gamma \in K,\ \gamma \text{ speciale})$$

(essendo i un arbitrario intero positivo)

$$D)\quad \frac{K}{K, \delta(i)} \quad (\delta \in K,\ \delta \text{ ordinario})$$

$$D_s)\quad \frac{K}{K_p, \delta(i)} \quad (\delta \in K,\ \delta \text{ speciale})$$

(essendo i un arbitrario intero positivo non appartenente a $\theta(K)$).

L'elemento $\alpha, \beta, \ldots$, di cui, nell'applicazione di una regola, si introducono le componenti, verrà detto *premessa* della regola.

Una *tavola semantica* per un'insieme finito K_0 di elementi di $\boldsymbol{S}$ è la riunione T di una successione $T_0, \ldots, T_n, \ldots$ di alberi, tale che T_0 è l'albero avente come unico blocco (una successione ottenuta ordinando) K_0, e per ogni intero $n > 0$, T_n è un'estensione immediata di T_{n-1}. T_n verrà detto *stadio n-esimo* della costruzione di T.

Sia T una tavola per un certo insieme K_0. Un blocco di T verrà detto *chiuso*, se contiene una coppia di elementi coniugati, *aperto* in caso contrario. Un ramo r di T verrà detto *chiuso*, se contiene almeno un blocco chiuso, *aperto* in caso contrario. Infine T stessa verrà detta *chiusa*, se ogni suo ramo è chiuso, *aperta* in caso contrario.

Sia ora G un albero a ciascun nodo del quale è associato tanto una successione finita di elementi di $\boldsymbol{S}$, che chiameremo ancora *blocco*, quanto una successione finita di interi positivi, detta *livello del blocco*. Diremo *estensione immediata generalizzata* di G un albero che si ottenga da G nel seguente modo: Scelto un blocco terminale K di G di livello $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ ed elementi $X_1, \ldots, X_p$ di K, di cui al più uno ordinario, si fanno seguire immediatamente e simultaneamente a K tutti i blocchi dedotti da K mediante ciascuna regola avente come premessa una qualche X_j, con $1 \leqslant j \leqslant p$, attribuendo a ciascun blocco dedotto il livello $\langle n_1, \ldots, n_k, j \rangle$, se il corrispondente X_j è speciale, oppure il livello $\langle n_j, \ldots, n_k \rangle$, se X_j è ordinario.

Un *albero generatore di un sistema di tavole* per un insieme finito K_0 di elementi di $\boldsymbol{S}$, è la riunione G di una successione $G_0, \ldots, G_n, \ldots$, in cui G_0 consiste dell'unico blocco K_0 con associata la successione di interi vuota, e per ogni $n > 0$, G_n è un'estensione immediata generalizzata di G_{n-1}. Anche ora G_n verrà detto *stadio n-esimo* della costruzione di G.

Una *tavola generata* dall'albero generatore G è un qualsiasi sottoalbero di G, massimale tra quelli soddisfacenti alla seguente proprietà: i successori immediati di un blocco qualsiasi hanno tutti lo stesso livello. Una tavola generata da G è ovviamente (prescindendo dal livello) una tavola nel senso già definito.

Un *ramo complesso* dell'albero generatore G è un qualsiasi sottoalbero di G, massimale tra quelli soddisfacenti alla seguente proprietà: i successori immediati di un blocco qualsiasi hanno livelli tutti differenti fra loro. Un ramo complesso verrà detto *chiuso* se contiene un blocco chiuso, *aperto* in caso contrario. L'albero generatore G verrà a sua volta detto *chiuso*, se ogni suo ramo complesso è chiuso, *aperto* in caso contrario.

Nel caso di un sistema privo di elementi speciali, un albero generatore G, nonchè il sistema delle tavole generate da G, si riducono a una singola tavola ordinaria; un ramo complesso di G si riduce a un ramo ordinario; e le definizioni di *chiuso* e *aperto* coincidono con quelle già date. Nel caso generale, il legame esistente tra le varie nozioni introdotte è illustrato dal seguente *Teorema* 2.

LEMMA. *In un albero generatore G un ramo complesso e una tavola generata da G hanno sempre uno e un solo ramo in comune.*

Viceversa, un ramo di G è sempre l'intersezione di un ramo complesso e di una tavola generata da G.

DIMOSTRAZIONE. Per provare la prima delle due proprietà, cominceremo a dimostrare, per induzione sull'indice del generico stadio G_n della costruzione di G, che un ramo complesso di G_n e una tavola generata da G_n hanno uno e un solo ramo in comune.

Se $n = 0$, la proprietà è banale. Supponiamo $n > 0$ e la proprietà vera per $n - 1$, e siano R e T rispettivamente un ramo complesso di G_n e una tavola generata da G_n. Dobbiamo provare che R e T hanno un unico ramo di G_n in comune. Consideriamo le intersezioni R' e T' di R e T con G_{n-1}. R' e T' sono un ramo complesso di G_{n-1} e una tavola generata da G_{n-1}; dunque per l'ipotesi induttiva hanno un unico ramo r' di G_{n-1} in comune. Se r' è anche un ramo di G_n, esso è il ramo comune a R e a T cercato. In caso contrario, il blocco terminale K' di r' ha in G_n certi successori immediati di livelli $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Per un certo j tale che $1 \leqslant j \leqslant p$, tutti i successori immediati di livello λ_j appartengono a T (per la proprietà di massimalità di T in G_n). Ma anche, per ogni j tale che $1 \leqslant j \leqslant p$, un ben determinato successore immediato di livello λ_j appartiene a R (per la proprietà di massimalità di R in G_n). Dunque esiste uno e un solo successore immediato di K', comune a R e a T; tale blocco, aggiunto a r', forma il ramo di G_n comune a R e a T.

Siano ora R un ramo complesso di G e T una tavola generata da G. Proviamo che hanno uno e un solo ramo di G in comune. Allo scopo consideriamo, per ogni stadio G_n, il ben determinato ramo r_n che hanno in comune le intersezioni R_n e T_n di R e T con G_n. È immediato verificare che, per ogni $n > 0$, $r_{n-1} \subseteq r_n$. La riunione degli r_n è perciò il ramo comune a R e a T cercato.

La dimostrazione della seconda proprietà è analoga. La lasciamo al lettore.

TEOREMA 2. *Un albero generatore G è aperto se e solo se ogni tavola generata da G è aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre dimostrare che G possiede un ramo complesso aperto se e solo se ogni tavola generata da G possiede un ramo aperto.

L'implicazione diretta è una conseguenza quasi immediata della prima parte del precedente *Lemma*. Se infatti G possiede un ramo complesso R aperto, ogni tavola T generata da G ha in comune con R un ramo aperto.

Per provare l'implicazione inversa, supponiamo che ogni tavola generata da G possieda un ramo aperto, e sia R^+ il sottoinsieme di G così definito: per ogni blocco K di G, $K \in R^+$ se e solo se ogni tavola generata da G e contenente K possiede un ramo aperto contenente K.

R^+ è non vuoto, poichè l'origine K_0 di G gli appartiene certamente. D'altra parte non può contenere blocchi chiusi, in quanto,se $K \in R^+$, esiste (per la seconda parte del precedente *Lemma*) una tavola generata da G contenente K, e questa, per la definizione di R^+, deve possedere un ramo aperto contenente K. Pertanto, per provare che R^+ include un ramo complesso aperto di G, e con ciò la tesi, non resta da provare altro che, se $K \in R^+$ e se $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono i livelli dei successori immediati di K in G, per ogni j tale the $1 \leqslant j \leqslant p$, un successore immediato di K di livello λ_j appartiene a R^+.

Ora, se esistesse un j $(1 \leqslant j \leqslant p)$, tale che nessun successore immediato di K di livello λ_j appartenga a R^+, detti $K_{j1}, \ldots, K_{jq}$ i successori immediati di K di livello λ_j, esisterebbe, per ogni i tale che $1 \leqslant i \leqslant q$, una tavola T_i generata da G, contenente K_{ji}, ma priva di rami aperti contenenti K_{ji}. Ciascuna di queste T_i contiene naturalmente tutti i blocchi $K_{j1}, \ldots, K_{jq}$, e perciò, sostituendo ad esempio in T_1, per ogni i tale che $2 \leqslant i \leqslant q$, la parte da K_{ji} in poi con la parte da K_{ji} in poi di T_i, si ottiene ancora una tavola T generata da G, che gode questa volta della proprietà di contenere, per ogni i tale che $1 \leqslant i \leqslant q$, K_{ji}, ma nessun ramo aperto contenente K_{ji}. T perciò contiene K, ma nessun ramo aperto contenente K, poichè un qualunque ramo di T contenente K contiene anche uno dei blocchi $K_{j1}, \ldots, K_{jq}$. Ne risulta $K \notin R^+$, contro l'ipotesi. L'assurdo prova quanto si voleva.

Dato un albero generatore G, chiameremo *sezione* di G una successione massimale di blocchi consecutivi di G aventi tutti lo stesso livello. Se Γ_1 e Γ_2 sono due sezioni di G, diremo che Γ_1 *precede* Γ_2, se il blocco iniziale di Γ_1 precede il blocco iniziale di Γ_2.

Ogni ramo complesso R di G si ripartisce in sezioni a due a due disgiunte; la sezione di R contenente un certo blocco K di R verrà indicata con $[K]_R$: L'insieme delle sezioni di R, associato alla relazione d'ordine introdotta per esse, costituisce un albero, l'*albero delle sezioni* di R, (che tuttavia, a differenza di R o G, non è di regola finitamente generato).

Un ramo complesso R di G verrà detto *saturo*, allorchè, dato un qualunque blocco K di R,

a) se $\alpha \in K$, esiste un blocco K', appartenente a $[K]_R$, se α è ordinario, a una sezione di R uguale o successiva a $[K]_R$, se α è speciale, contenente tutte le componenti di α;

b) se $\beta \in K$, esiste un blocco K', appartenente a $[K]_R$, se β è ordinario, a una sezione di R uguale o successiva a $[K]_R$, se β è speciale, contenente almeno una componente di β;

c) se $\gamma \in K$, e se γ è ordinario, per ogni intero positivo i occorrente in $[K]_R$ o in qualche sezione di R precedente $[K]_R$, e comunque per almeno un intero positivo i, esiste un blocco $K' \in [K]_R$ contenente $\gamma(i)$; se invece γ è speciale, esiste una sezione Γ di R uguale o successiva a $[K]_R$, tale che, per ogni i occorrente in Γ o in qualche sezione di R che precede Γ, e comunque per almeno un i, esiste un blocco $K' \in \Gamma$, contenente $\gamma(i)$;

d) se $\delta \in K$, esiste un blocco K', appartenente a $[K]_R$, se δ è ordinario, a una sezione di R uguale o successiva a $[K]_R$, se δ è speciale, contenente una componente $\delta(i)$ di δ.

L'albero generatore G verrà detto *completo*, allorchè ogni suo ramo complesso aperto è saturo. In tal caso, il sistema di tavole generato da G verrà detto a sua volta *completo*.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, se il sistema astratto $\boldsymbol{S}$ è semanticamente normale e ben fondato, e G è un albero generatore di un sistema completo di tavole per un insieme finito K_0 di elementi di $\boldsymbol{S}$, K_0 è soddisfacibile se e solo se G è aperto (quindi per il *Teorema* 2, se e solo se le tavole del sistema generato da G sono tutte aperte). Tuttavia la portata di questo risultato è limitata dal fatto che si può asserire l'esistenza di un albero generatore di un sistema completo di tavole per K_0, solo nel caso che nessuna componente ereditaria di un elemento di K_0 sia un γ speciale. In tal caso, un algoritmo per costruire un albero generatore di un sistema completo di tavole per K_0 può essere il seguente:

1) Si prolunga il primo più corto ramo aperto r dello stadio G_n a cui si è pervenuti nella costruzione di G, mediante l'applicazione al blocco terminale K di r della regola avente come premessa il primo α ordinario di K, tale che K non contenga tutte le componenti di α, o in mancanza di un tale α, il primo γ (ordinario) di K, tale che K non contenga tutte le componenti $\gamma(i)$ per i occorrente in r (con introduzione di $\gamma(i)$ per il minimo i occorrente in r per cui $\gamma(i) \notin K$), o infine, in mancanza di α e γ siffatti, il primo β ordinario di K, tale che K non contenga alcuna componente di β.

2) Ove sia impossibile l'operazione 1), si prolunga il primo più corto ramo aperto r di G_n mediante applicazione simultanea al blocco terminale K di r delle seguenti regole:

2.1) La (eventuale) regola avente come premessa il primo δ ordinario di K, tale che K non contenga alcuna componente di δ (con introduzione di $\delta(i)$ per il minimo i non occorrente in r), o, in mancanza di un tale δ e limitatamente al caso che nessun i occorra in r, il primo γ (ordinario) di K (con introduzione di $\gamma(1)$);

2.2) le regole aventi come premesse gli elementi speciali di K che siano: o degli α tali che K non contenga tutte le componenti di α, o dei β tali che K non contenga alcuna componente di β, o dei δ tali che K non contenga alcuna componente di δ.

Non è difficile convincersi che la condizione restrittiva concernente gli elementi γ speciali è necessaria. Infatti, se al blocco terminale di r, K, si applica una regola con premessa $\gamma \in K$ speciale, r viene prolungato con il blocco K_v, $\gamma(i)$, da cui γ è scomparso. D'altra parte, in stadi successivi della costruzione di G, nella sezione contenente $K_v, \gamma(i)$ può comparire un blocco in cui occorre un intero $j \neq i$ (ad esempio nel caso che $\gamma(i)$ sia un δ ordinario), dunque, per la saturazione del ramo complesso contenente K, sarebbe necessario che in un blocco di tale sezione (o di una sezione successiva) comparisse anche $\gamma(j)$. Essendo scomparso γ, ciò è generalmente impossibile.

A un'analoga conclusione si perverrebbe se si rafforzasse la regola di riduzione C_s) in

$$C_s') \quad \frac{K}{K_v, \gamma(i_1), \ldots, \gamma(i_n)} \qquad (\gamma \in K,\ \gamma \text{ speciale})$$

essendo $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ un'arbitraria successione finita di interi positivi (in modo da consentire almeno l'introduzione di tutte le componenti $\gamma(i)$ con i occorrente in r).

I sistemi astratti più maneggevoli sono dunque i sistemi privi di elementi γ speciali. I sistemi S_I e $S_{S.4}$ (e naturalmente S_C) soddisfano a tale condizione. Smullyan in effetti considera solo sistemi di questo tipo. Una restrizione *a priori* non ci è sembrata tuttavia opportuna, sia per il fatto che molti risultati non perdono la loro validità nel caso generale, sia perchè sistemi dotati di elementi γ speciali non sono certamente inconcepibili.

5. I teoremi fondamentali del metodo delle tavole semantiche.

LEMMA 1. *Sia S un sistema astratto semanticamente normale, e G un albero generatore di un sistema di tavole per un insieme finito K_0*

di elementi di $\boldsymbol{S}$. *Se* K_0 *è realizzabile, esiste un ramo complesso* R *di* G, *ciascun blocco del quale è realizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. R verrà definito come riunione di una successione $R_0, R_1, \dots, R_n, \dots$, in cui, per ogni n, R_n è un ramo complesso dello stadio G_n della costruzione di G, che estende ogni R_m con $m \leqslant n$. Procedendo per induzione rispetto a n, definiremo gli R_n e contemporaneamente proveremo che ogni blocco di R_n è realizzabile. Con ciò sarà pure dimostrato che ogni blocco di R è realizzabile.

R_0 si riduce a K_0, che è realizzabile. Per $n > 0$, supponiamo definito R_{n-1} in modo da soddisfare alle condizioni volute, e definiamo R_n. Se R_{n-1} è ancora un ramo complesso di G_n, si può porre $R_n = R_{n-1}$. In caso contrario, G_n si ottiene da G_{n-1} facendo seguire immediatamente al blocco terminale K di R_{n-1} i successori immediati di K in G. Siano λ il livello di K e $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ i livelli dei successori immediati di K. È sufficiente provare che per ogni j per cui $1 \leqslant j \leqslant p$, vi è almeno un successore immediato di K di livello λ_j che è realizzabile; infatti, ciò provato, basta far seguire a K, per ogni j $(1 \leqslant j \leqslant p)$, tale successore immediato, per passare da R_{n-1} a un ramo complesso di G_n che può venir assunto come R_n. Ora la proprietà in questione è un'immediata conseguenza del *Teorema* 1.

OSSERVAZIONE. Nel caso che $\boldsymbol{S}$ sia un sistema di tipo enunciativo, e cioè tale che $U = \emptyset$, il *Lemma* 1 può venir rafforzato dicendo che, se K_0 è realizzabile nel modello $\boldsymbol{M}$ di $\boldsymbol{S}$, esiste un ramo complesso R di G, ciascun blocco del quale è realizzabile in $\boldsymbol{M}$. La dimostrazione è simile a quella del *Lemma* 1, con la differenza che anzichè usare il *Teorema 1*, si usano le condizioni $\boldsymbol{M}_0)$-$\boldsymbol{M}_2)$ sulla relazione $\vdash$ e il *Lemma* del § 3.

LEMMA 2. *Sia* $\boldsymbol{S}$ *un sistema astratto ben fondato, e* G *un albero generatore di un sistema di tavole per l'insieme finito* K_0. *Se* R *è un ramo complesso aperto e saturo di* G, *esiste un modello* $\boldsymbol{M} = \langle W, \varrho, \pi, \vdash\rangle$ *di* $\boldsymbol{S}$, *in cui* $\langle W, \varrho\rangle$ *è un albero finitamente generato, tale che ogni blocco di* R *è realizzabile in* $\boldsymbol{M}$, *e in particolare*, K_0 *è realizzato dall'origine dell'albero* $\langle W, \varrho\rangle$.

DIMOSTRAZIONE. Definiremo anzitutto un modello $\boldsymbol{M}$ in modo da soddisfare a tutti i requisiti del teorema, tranne eventualmente a quello che $\langle W, \varrho\rangle$ sia finitamente generato.

$\langle W, \varrho\rangle$ sia l'albero delle sezioni di R. Per ogni $\Gamma \in W$, $\pi(\Gamma)$ sia l'insieme degli interi occorrenti in Γ o in una sezione di R precedente Γ.

La relazione $\Gamma \vdash X$ sia definita per ogni $\Gamma \in W$ e X atomico in una qualunque maniera che soddisfi alle condizioni:

$$X \in \bigcup \Gamma \to \Gamma \vdash X\,, \qquad \Gamma \vdash X \leftrightarrow \Gamma \nvdash \bar{X}\,,$$

(la scelta è possibile, poichè $\bigcup \Gamma$ è aperto), e successivamente estesa (univocamente) in modo da soddisfare le condizioni $\boldsymbol{M}_0$)-$\boldsymbol{M}_2$).

$\boldsymbol{M}$ è chiaramente un modello ad albero di $\boldsymbol{S}$. Per quanto concerne gli ultimi due requisiti del teorema, sarà sufficiente provare che in $\boldsymbol{M}$ ogni insieme $\bigcup \Gamma$, con $\Gamma \in W$, è realizzato da Γ stesso; e a tal fine, giacchè $X \in \bigcup \Gamma$ implica $\theta(X) \subseteq \pi(\Gamma)$, basterà provare che $X \in \bigcup \Gamma$ implica $\Gamma \vdash X$.

Si procede per induzione rispetto alla relazione d'ordine ben fondata che lega un elemento di $\boldsymbol{S}$ alle sue componenti. Si considererà cioè provata la tesi per ogni elemento X di $\boldsymbol{S}$, allorchè la tesi stessa sarà stata verificata per ogni X atomico, e sarà stata provata per ogni X, sotto l'ipotesi che essa risulti vera per tutte le componenti di X.

Se X è atomico, la tesi è vera per definizione. Supponiamo perciò X composto, e la tesi vera per le componenti di X. Occorre distinguere vari casi, secondo che X sia un α, β, γ o δ, e sia ordinario o speciale.

a) Sia $\alpha \in \bigcup \Gamma$. Se α è ordinario, per la proprietà di saturazione di R, $\alpha_i \in \bigcup \Gamma$ per ogni α_i, e perciò, per l'ipotesi induttiva, $\Gamma \vdash \alpha_i$ per ogni α_i. Dunque, se α non è permanente, si ha senz'altro $\Gamma \vdash \alpha$. Ad analoga conclusione si giunge d'altra parte se α è permanente, poichè ciò comporta che $\alpha \in \bigcup \Gamma^*$ per ogni Γ^*, e dunque, per le ragioni sopraesposte, $\Gamma^* \vdash \alpha_i$ per ogni α_i e ogni Γ^*. Se poi α è speciale, per la saturazione di R, esiste Γ^*, tale che $\alpha_i \in \bigcup \Gamma^*$, per ogni α_i. Per l'ipotesi induttiva, $\Gamma^* \vdash \alpha_i$ per ogni α_i, dunque $\Gamma \vdash \alpha$, poichè α è copermanente.

b) Sia $\beta \in \bigcup \Gamma$. Si prova $\Gamma \vdash \beta$ in modo perfettamente simile a quanto fatto per il caso *a*).

c) Sia $\gamma \in \bigcup \Gamma$. Se γ è ordinario, per la proprietà di saturazione di R e per la particolare definizione della funzione π, $\gamma(i) \in \bigcup \Gamma$ per ogni $i \in \pi(\Gamma)$. Per l'ipotesi induttiva si avrà $\Gamma \vdash \gamma(i)$ per ogni $i \in \pi(\Gamma)$, dunque, se γ non è permanente, $\Gamma \vdash \gamma$. Ad analoga conclusione si perviene se γ è permanente, in quanto ciò comporta che $\gamma \in \bigcup \Gamma^*$ per ogni Γ^*. Se invece γ è speciale, sempre per la saturazione di R e la definizione di π, esiste Γ^*, tale che $\gamma(i) \in \bigcup \Gamma^*$ per ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$.

Per l'ipotesi induttiva, si avrà $\Gamma^* \vdash \gamma(i)$ per ogni $i \in \pi(\Gamma^*)$, e perciò $\Gamma \vdash \gamma$, poichè γ è copermanente.

d) Sia $\delta \in \bigcup \Gamma$. Si prova $\Gamma \vdash \delta$ similmente a quanto fatto per il caso *c*).

A questo punto non vi è che da provare che, se $\langle W, \varrho \rangle$ non è finitamente generato, $\boldsymbol{M}$ può venir modificato in un modello $\boldsymbol{M}' = \langle W', \varrho', \pi', \vdash' \rangle$ in cui $\langle W', \varrho' \rangle$ è un albero finitamente generato, soddisfacente ancora agli ultimi due requisiti del teorema. Ci limiteremo a illustrare il procedimento in un caso particolare.

Supponiamo che $\langle W, \varrho \rangle$ sia un albero infinitamente generato del tipo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \Gamma_0 \arrow[dll, no head] \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_n & \cdots \end{tikzcd}$$

Ciò si verifica ad esempio, se $\boldsymbol{S}$ è un sistema modale $S.4$, $K_0 = \{\mathrm{F}.\, \exists x \forall y \Box \Diamond (A(x) \rightarrow A(y))\}$ con $A(x)$ atomica, G è l'albero generatore di un sistema completo di tavole per K_0 costruito secondo la procedura descritta nel § 4, R è il ramo complesso aperto e saturo a cui si riduce G stesso (per completezza, aggiungeremo che in questo esempio, π è la funzione costante che, per ogni $\Gamma \in W$, assume come valore l'insieme di tutti gli interi positivi, $\vdash$ è una qualunque relazione soddisfacente alle condizioni $\boldsymbol{M}_0$)-$\boldsymbol{M}_2$) e inoltre, per ogni $n > 0$, a $\Gamma_n \vdash \mathrm{V}.\, A(a_n)$, $\Gamma_n \vdash \mathrm{F}.\, A(a_{n+1})$).

Come $\langle W', \varrho' \rangle$ verrà preso, nel caso in esame, l'albero finitamente generato:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \Gamma_0 \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & & & \\ \Gamma_1 & & \Gamma_0^{(1)} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & & \\ & \Gamma_2 & & \ddots \arrow[dr, no head] & & \\ & & & & \Gamma_0^{(n-1)} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ & & & \Gamma_n & & \ddots \end{tikzcd}$$

Come π' verrà presa l'estensione di π a $W' \supset W$ tale che, per ogni $n > 0$, $\pi'(\Gamma_0^{(n)}) = \pi(\Gamma_0)$. Come $\vdash'$ verrà presa la relazione univocamente determinata, in virtù delle $\boldsymbol{M}_0$)-$\boldsymbol{M}_2$), dalle seguenti condizioni concernenti un elemento X atomico:

1) $\Gamma_n \vdash' X \leftrightarrow \Gamma_n \vdash X$ per ogni $n \geqslant 0$,

2) $\Gamma_0^{(n)} \vdash' X \leftrightarrow \Gamma_0 \vdash X$ per ogni $n > 0$.

È facile convincersi che la 1) vale per un X qualunque (non così la 2)). Dunque in particolare $\boldsymbol{M}' = \langle W', \varrho', \pi', \vdash' \rangle$ è un modello di $\boldsymbol{S}$, in cui ogni blocco di R è realizzato dallo stesso $\Gamma \in W$ che lo realizzava in $\boldsymbol{M}$. Ciò prova quanto restava da provare.

TEOREMA 3. *Se il sistema astratto* $\boldsymbol{S}$ *è semanticamente normale e ben fondato, e* G *è un albero generatore di un sistema completo di tavole per l'insieme finito* K_0 *di elementi di* $\boldsymbol{S}$, *le quattro seguenti condizioni sono tra loro equivalenti*:

I) K_0 *è realizzabile.*

II) K_0 *è realizzabile in un modello ad albero finitamente generato.*

III) G *è aperto.*

IV) *Ogni tavola generata da* G *è aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Ammettiamo la I). Per il *Lemma* 1, G ha un ramo complesso R, in cui ogni blocco è realizzabile, quindi aperto. Ne segue la III). Ammettiamo la III). G ha un ramo complesso R aperto e saturo. Ogni blocco di R, per il *Lemma* 2, è realizzabile in un medesimo modello ad albero finitamente generato. Ne segue la II). L'implicazione II) $\rightarrow$ I) è ovvia; dunque le prime tre condizioni risultano tra loro equivalenti. L'equivalenza III) $\leftrightarrow$ IV) costituisce infine il *Teorema* 2. Con ciò la dimostrazione è conclusa.

TEOREMA 4 (di validità e completezza). *Sia* $\boldsymbol{S}$ *un sistema astratto semanticamente normale e ben fondato, e* K_0 *un insieme finito di elementi di* $\boldsymbol{S}$ *non aventi* γ *speciali come componenti ereditarie.* K_0 *è realizzabile se e solo se ogni tavola per* K_0 è *aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che ogni tavola per K_0 sia aperta. Poichè gli elementi di K_0 non hanno γ speciali come componenti ereditarie, esiste un albero generatore di un sistema completo di tavole per K_0. Tutte le tavole del sistema sono aperte per ipotesi; dunque, per il *Teorema* 3, K_0 è realizzabile.

Supponiamo viceversa K_0 realizzabile, e sia T una generica tavola per K_0. T si può identificare con un albero generatore di un sistema (non completo) di tavole per K_0; dunque è aperta, per il *Lemma* 1.

OSSERVAZIONE. Del *Teorema* 4 si può dare una dimostrazione che prescinda dalla nozione di albero generatore, generalizzando ad esempio la dimostrazione di Fitting [2] per il sistema intuizionistico.

6. Alcune questioni concernenti i sistemi astratti enunciativi.

Un sistema astratto enunciativo $\boldsymbol{S}$ è privo di γ speciali, perciò, dato un qualsiasi insieme finito K_0 di elementi di $\boldsymbol{S}$, esiste un albero generatore di un sistema completo di tavole per K_0. In particolare, l'albero generatore completo costruito con l'algoritmo descritto alla fine del § 4, albero che indicheremo con $G(K_0)$, soddisfa ad alcune notevoli proprietà.

In primo luogo, non essendoci dei γ e dei δ, le regole con premessa speciale vengono applicate a un certo blocco, allorchè a questo non risulta più applicabile alcuna regola con una premessa ordinaria, cosicchè una sezione può iniziare solo con un successore immediato del blocco terminale di un'altra sezione. In particolare dunque l'albero delle sezioni di un ramo complesso di $G(K_0)$ è sempre finitamente generato. In secondo luogo, se $\boldsymbol{S}$ è ben fondato, ogni sezione di $G(K_0)$ è finita. Sotto la medesima ipotesi inoltre, i blocchi insiemisticamente distinti di $G(K_0)$ sono in numero finito; quindi ogni ramo infinito di $G(K_0)$ contiene due blocchi insiemisticamente uguali fra loro. Sia $\bar{G}(K_0)$ l'albero generatore, finito per il *Lemma di König*, che si ottiene da $G(K_0)$ troncando ogni suo ramo infinito dopo il primo blocco che risulti insiemisticamente uguale a uno che lo precede. A partire da $\bar{G}(K_0)$ si può ricostruire un albero generatore di un sistema completo di tavole per K_0 (non necessariamente coincidente con $G(K_0)$) semplicemente *prolungando per periodicità* $\bar{G}(K_0)$. In generale, l'operazione di *prolungare per periodicità* un certo albero consiste nel far seguire ciascun blocco terminale K dell'albero, che sia insiemisticamente uguale a un blocco non terminale K', con quanto segue K' nell'albero stesso, e nel ripetere questo procedimento sui successivi alberi via via ottenuti. Nel caso dell'albero $\bar{G}(K_0)$, tuttavia, in ogni passo dell'operazione, K', quando esiste, può venir scelto tra i blocchi che precedono K (ciò si dimostra facilmente per induzione rispetto al numero dei passi compiuti nell'operazione), cosicchè l'operazione di prolungamento per periodicità può essere eseguita anche su ogni ramo (semplice o complesso) di $\bar{G}(K_0)$ e dà luogo a un ramo (semplice o complesso) del prolungamento per periodicità di $\bar{G}(K_0)$. Questa osservazione viene utilizzata nella dimostrazione del seguente *Lemma*.

LEMMA. *$\bar{G}(K_0)$ è aperto se e solo se $G(K_0)$ è aperto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $G(K_0)$ è aperto, $G(K_0)$ contiene un ramo complesso aperto, e l'intersezione di questo con $\bar{G}(K_0)$ è un ramo complesso aperto di $\bar{G}(K_0)$. Dunque $\bar{G}(K_0)$ è aperto.

Supponiamo viceversa $\bar{G}(K_0)$ aperto, e sia $\bar{R}$ un ramo complesso aperto di $\bar{G}(K_0)$. Prolungando R per periodicità, si ottiene un ramo complesso R' dell'albero G', prolungamento per periodicità di $\bar{G}(K_0)$. R' è ovviamente aperto; dunque G' è aperto. Poichè G' è anche completo, se ne deduce (per la supposta buona fondatezza di $\boldsymbol{S}$) che K_0 è realizzabile. Da ciò, e dal fatto che ogni sistema astratto enunciativo è anche semanticamente normale, deriva che $G(K_0)$ è aperto.

TEOREMA 5. *In un sistema astratto $\boldsymbol{S}$ enunciativo ben fondato, il predicato « K_0 è realizzabile », K_0 essendo un insieme finito di elementi di $\boldsymbol{S}$, è decidibile.*

DIMOSTRAZIONE. Sotto le ipotesi del teorema, K_0 è realizzabile se e solo se $\bar{G}(K_0)$ è aperto, e il predicato « $\bar{G}(K_0)$ è aperto » è decidibile.

Ad ogni ramo complesso aperto (e saturo) R di $G(K_0)$ si può associare, con il procedimento descritto nella dimostrazione del *Lemma* 2 del § 5, un modello ad albero finitamente generato $\boldsymbol{M} = \langle W, \varrho, \pi, \vdash \rangle$, in cui tutti i blocchi di R sono realizzabili. Nel caso attuale $\langle W, \varrho \rangle$ è proprio l'albero delle sezioni di R, che è finitamente generato, mentre π è la funzione costante tale che $\pi(\Gamma) = \theta(K_0)$, per ogni $\Gamma \in W$.

$\boldsymbol{M}$ è generalmente infinito. Tuttavia, identificando tra loro due qualunque sezioni di R aventi blocchi terminali insiemisticamente uguali e di cui una preceda l'altra, con il che W si trasforma in un insieme finito $\overline{W}$ mentre ϱ diviene una relazione riflessiva e transitiva (ma non più generalmente antisimmetrica) su $\overline{W}$, e sostituendo a π e $\vdash$ la loro restrizione a $\overline{W}$, si ottiene un modello $\overline{\boldsymbol{M}} = \langle \overline{W}, \bar{\varrho}, \bar{\pi} \,\bar{\vdash} \rangle$, finito (anche se non più generalmente ad albero), in cui ogni blocco di R è realizzabile. Si verificano infatti ancora sia le condizioni

$\boldsymbol{M}_0$)-$\boldsymbol{M}_1$) affinchè $\overline{\boldsymbol{M}}$ sia un modello di $\boldsymbol{S}$, sia la condizione $X \in \bigcup \Gamma \to \to \Gamma \vdash X$, con X qualunque. Abbiamo così provato il seguente:

TEOREMA 6. *In un sistema astratto* $\boldsymbol{S}$ *enunciativo ben fondato, un insieme finito* K_0 *di elementi di* $\boldsymbol{S}$ *è realizzabile se e solo se lo è in un modello finito.*

Il *Teorema* 6 non può essere migliorato, richiedendo che il modello finito sia ad albero. Ad esempio in un sistema modale $S.4$ enunciativo, $\mathrm{F}.\Diamond(A \to \Box A)$, ove A è atomica, non è realizzabile in alcun modello finito ad albero (poichè altrimenti, essendo permanente, dovrebbe essere realizzato da un universo terminale dell'albero, cosa manifestamente impossibile); tuttavia in un qualsiasi modello $\langle\{\Gamma_1, \Gamma_2\}, \varrho, \pi, \vdash\rangle$ tale che $\Gamma_1 \varrho \Gamma_2 \varrho \Gamma_1$, $\Gamma_1 \vdash \mathrm{V}.A$, $\Gamma_2 \vdash \mathrm{F}.A$, tale elemento è realizzato da Γ_1.

È noto d'altra parte che nel sistema intuizionistico un insieme finito K_0 è realizzabile se e solo se lo è in un modello finito ad albero. Di più, nel caso di un insieme costituito da elementi del tipo $\mathrm{V}.A$, K_0 è realizzabile se e solo se lo è in un modello con un unico universo (cioè se e solo se lo è nel senso classico). Una ovvia generalizzazione di questo risultato è fornita dal seguente:

TEOREMA 7. *Sia* $\boldsymbol{S}$ *un sistema astratto enunciativo ben fondato, in cui tutti gli elementi atomici siano permanenti o copermanenti. L'insieme finito* K_0 *è realizzabile se e solo se lo è in un modello finito ad albero. Se inoltre* K_0 *è costituito da elementi permanenti,* K_0 *è realizzabile se e solo se lo è in un modello con un unico universo.*

DIMOSTRAZIONE. Se K_0 è realizzabile, lo è in un modello $\boldsymbol{M}$ ad albero finitamente generato. In ogni ramo di tale albero vi è certamente, per l'ipotesi del teorema, un Γ tale che $\Gamma \vdash X$ se e solo se, per ogni Γ^*, $\Gamma^* \vdash X$, qualunque sia X, purchè componente ereditaria atomica di un elemento di K_0 (si tenga presente che tali X sono in numero finito). Troncando l'albero in corrispondenza di tali nodi, si ottiene (per il *Lemma di König*) un modello $\overline{\boldsymbol{M}}$ finito ad albero, in cui ogni elemento Y di $\boldsymbol{S}$ non avente altre componenti ereditarie atomiche all'infuori di quelle di K_0, è realizzato da un certo universo Γ se e solo se lo è dallo stesso Γ in $\boldsymbol{M}$. In tale modello, K_0 è ovviamente realizzabile.

Se poi K_0 è costituito da elementi permanenti, K_0 sarà realizzato da un universo terminale di $\overline{\boldsymbol{M}}$, e dunque sarà realizzabile in un modello con un unico universo.

7. Rappresentazione grafica di un sistema di tavole.

Un modo pratico di rappresentare un albero generatore di un sistema di tavole può essere il seguente: L'albero come di consueto viene orientato con l'origine in alto e i rami volti verso il basso. I gruppi dei successori immediati di un blocco, corrispondenti ai vari livelli, vengono separati da una doppia linea verticale. All'interno di ciascun gruppo, i successori immediati (di uno stesso livello) vengono separati da una linea verticale semplice. Una doppia linea orizzontale, o *cesura*, separerà un blocco dai suoi successori immediati aventi livello diverso da esso. Ogni blocco, che non sia l'origine, verrà rappresentato mediante gli elementi introdotti con l'ultima regola applicata. Nella ricostruzione di un blocco a partire dalla sua rappresentazione, si dovrà poi tener presente che tale blocco contiene, oltre agli elementi che lo rappresentano, anche tutti gli elementi che rappresentano i blocchi che lo precedono e che seguono la cesura precedente più vicina, nonchè tutti gli elementi permanenti che compaiono nella rappresentazione di blocchi precedenti. L'ordine degli elementi all'interno di ciascun blocco è quello con cui tali elementi compaiono nella rappresentazione del ramo corrispondente.

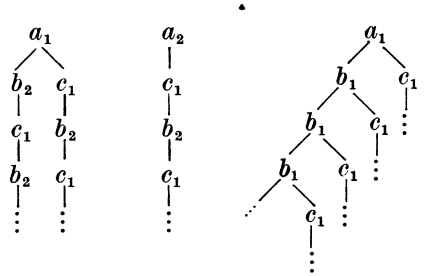
Con queste convenzioni, nel caso di un sistema modale $S.4$ enunciativo, e se $K_0 = \{\mathrm{F}.\,\Box[\Box(A \to \Box A) \to A] \to \Box A\}$ (A atomica), l'albero generatore $G(K_0)$ è il prolungamento per periodictà del seguente albero generatore finito:

$$\mathrm{F}.\,\Box[\Box(A \to \Box A) \to A] \to \Box A \ (^a)$$
$$\mathrm{V}.\,\Box[\Box(A \to \Box A) \to A],\ \mathrm{F}.\,\Box A$$
$$\mathrm{V}.\,\Box(A \to \Box A) \to A$$

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{F}.\,\Box(A \to \Box A)$</td><td>$\mathrm{V}.\,A.$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{F}.\,(A \to \Box A)\ (^b)$
$\mathrm{V}.\,\Box(A \to \Box A) \to A$
$\mathrm{V}.\,A,\ \ \mathrm{F}.\,\Box A$
<table><tr><td>$\mathrm{F}.\,\Box(A \to \Box A)$
$\mathrm{F}.\,(A \to \Box A)\ (^b) \Vert \mathrm{F}.\,A\ (^c)$</td><td>$\mathrm{V}.\,A$
$\mathrm{F}\cdot A\ (^c)$</td></tr></table></td><td>$\mathrm{F}.\,A\ (^c)$
$\mathrm{V}.\,\Box(A \to \Box A) \to A$
<table><tr><td>$\mathrm{F}.\,\Box(A \to \Box A)$
$\mathrm{F}.\,(A \to \Box A)\ (^b)$</td><td>$\mathrm{V}.\,A$
$\times$</td></tr></table></td><td>$\mathrm{F}.\,A\ (^c)$
$\mathrm{V}.\,\Box(A \to \Box A) \to A$
<table><tr><td>$\mathrm{F}.\,\Box(A \to \Box A)$
$\mathrm{F}.\,(A \to \Box A)\ (^b)$</td><td>$\mathrm{V}.\,A$
$\times$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Nella precedente rappresentazione sono stati adottati alcuni altri accorgimenti pratici. Sono stati sbarrati con una croce i rami chiusi, e sono state introdotte delle lettere, (a), (b), (c), per illustrare come va fatto il prolungamento per periodicità (si noti che, dopo il primo passo dell'operazione di prolungamento per periodicità, si ottiene l'albero indicato con $\bar{G}(K_0)$).

Indicando con a_1, b_1, c_1 le sezioni di sinistra e con a_2, b_2, c_2 le sezioni di destra che iniziano in $(a), (b), (c)$, possiamo rappresentare come segue gli alberi delle sezioni dei rami complessi aperti di $G(K_0)$:



, ecc.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, North Holland (1959).

[2] M. Fitting, *Intuitionistic Logic Model Theory and Forcing*, North Holland (1969).

[3] K. J. Hintikka, *Form and content in quantification theory*, Acta Philos. Fennica, **8** (1955), pp. 7-55.

[4] S. Kripke, *Semantical Analysis of Modal Logic, I*, Zeitschrift für Math. Logic, **9** (1963), pp. 67-96.

[5] S. Kripke, *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic, I*, in *Formal Systems and recursive functions*, North Holland (1965), pp. 92-130.

[6] N. R. M. Smullyan, *First order Logic*, Springer Verlag (1968).

[7] N. R. M. Smullyan, *Abstract Quantification Theory*, in *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland (1970), pp. 79-91.

[8] N. R. M. Smullyan, *A Generalization of Intuitionistic and Modal Logics*, in *Truth, Syntax and Modality*, North Holland (1973), pp. 274-293.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1974.