

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO GRANDIS

Symétrisations de catégories - I : généralités

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 54 (1975), p. 271-310

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__271_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Symétrisations de catégories - I: Généralités

MARCO GRANDIS (*)

0. Introduction.

I. Historique et bibliographie.

0.1. On connaît la symétrisation classique de la catégorie des ensembles: on appelle *correspondance* de l'ensemble A dans l'ensemble B tout sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$; on définit de façon évidente la composition de correspondances, et à chaque correspondance α de A en B on associe canoniquement une correspondance $\tilde{\alpha}$ de B en A , qu'on dira *involue* de α ; enfin, pour correspondances ayant les mêmes extrêmes, on a une relation d'ordre (l'inclusion ensembliste).

0.2. La catégorie des ensembles est ainsi plongée ⁽¹⁾ dans une catégorie ayant les mêmes objets, munie d'*involution* (endo-foncteur contravariant, identique sur les objets et involutif) — donc autoduale —, et d'un ordre de catégorie compatible avec l'involution. En outre cet ordre caractérise les applications parmi les correspondances, moyennant les conditions:

$$(1) \quad \tilde{\alpha} \supset 1 \quad \alpha \tilde{\alpha} \subset 1 \quad (2)$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - via L. B. Alberti, 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

⁽¹⁾ On suppose les applications définies par « leur graphe ».

⁽²⁾ 1 dénote toujours le morphisme identique (convenable).

(la première signifiant que α est partout définie, la deuxième qu'elle est univoque); vice versa la connaissance des applications parmi les correspondances (c'est-à-dire du foncteur plongement) détermine l'ordre, qui est alors engendré — en tant qu'ordre de catégorie involutive (1.15) — par l'imposition de (1) pour toute application α .

0.3. On traite de façon analogue les *relations* (appelées aussi *relations additives*, ou *correspondances additives*) pour les catégories de modules (sous-modules du produit $A \times B$, coïncidant avec la somme directe; voir Mac Lane [22]).

0.4. En outre Lambek [19] introduit, pour la catégorie des groupes, les « *homomorphic relations* » (sous-groupes du groupe produit), qu'il généralise ensuite à d'autres « algèbres »; et Darbo [11] considère, pour la catégorie des ensembles, la symétrisation des *transducteurs* (quotients de la somme directe — ou réunion disjointe — $A + B$).

0.5. On peut déjà remarquer que la catégorie des ensembles possède au moins deux symétrisations significatives, celle des correspondances et celle des transducteurs, non équivalentes car la deuxième est régulière, vérifiant:

$$(1) \quad \alpha \tilde{\alpha} \alpha = \alpha \quad \text{pour tout morphisme } \alpha$$

au contraire de la première.

Pour le problème général de la symétrisation d'une catégorie — à formuler — on doit donc s'attendre au manque d'unicité des solutions (voir aussi 0.11), et prévoir des caractérisations de celles-ci par des conditions supplémentaires.

0.6. D'après les cas « concrets » examinés (0.1-4), des procédés de symétrisation pour « catégories abstraites » ont été introduits et étudiés: la symétrisation canonique des catégories abéliennes, par Mac Lane [21], Puppe [26], Hilton [16] et Brinkmann [4]; et son extension aux catégories exactes ⁽³⁾, par Calenko [8, 9], Brinkmann [3], et Brinkmann-Puppe [5].

⁽³⁾ Il existe un objet zéro; tout morphisme a noyau et conoyau, et se factorise par un conoyau suivi d'un noyau (Mitchell [29]). Ces catégories sont appelées *quasi-exactes* en [8; 9].

0.7. Des généralisations de ces procédés, en directions différentes, ont été donnés par Brinkmann [2; 5] (la catégorie des groupes est comprise); Burgin [6; 7] et Klein [17; 18] (bicatégories); Parodi [23-25] (deux procédés duals, fournissant pour la catégorie des ensembles, respectivement, transducteurs et correspondances).

0.8. Quant à la caractérisation des « symétrisations »: Puppe [26] donna une liste d'axiomes ($K1-6$) déterminant toute I -catégorie (catégorie involutive ordonnée) qui est catégorie des relations pour une catégorie abélienne; une partie ($K1-3$) de cette liste caractérise — comme il conjectura — les I -catégories provenant des catégories exactes (voir [8; 9; 3; 5]); des variantes ont été données par Brinkmann [5] et Burgin [6; 7] pour caractériser leurs procédés. Une caractérisation de la symétrisation canonique d'une catégorie abélienne, en tant que plongement de cette catégorie dans une catégorie involutive (a priori non munie d'ordre) a été donnée par l'auteur [15].

0.9. Les utilisations des symétrisations concernent pratiquement la totalité de l'algèbre homologique, des lemmes diagrammatiques aux suites spectrales (voir [19; 20; 26; 12; 1; 5]); les représentations des groupes (voir [14]); une théorie axiomatique des « dispositifs » ([11]).

II. Sur ce travail.

0.10. On se propose d'étudier, en toute généralité, les symétrisations des catégories, des foncteurs et des morphismes fonctoriels, et leurs rapports avec les « carrés exacts ». On aurait deux cadres possibles à disposition pour étudier les symétrisations d'une catégorie \mathcal{C} : considérer les I -catégories \mathcal{K} pour lesquelles la sous-catégorie des morphismes α vérifiant 0.2.1 est (isomorphe à) \mathcal{C} ; ou bien les foncteurs définis sur \mathcal{C} , à valeurs dans une catégorie involutive \mathcal{K}

$$(1) \quad s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}.$$

0.11. Le deuxième cadre est évidemment plus général que le premier, et cela de façon significative: on montrera dans de prochains travaux que certaines catégories exactes ont une symétrisation (utile!), différente de l'usuelle, et pour laquelle le préordre $<$ de catégorie involutive (1.15) engendré par la condition

$$(2) \quad \alpha \in s(\mathcal{C}) \quad \text{entraîne} \quad \tilde{\alpha}\alpha > 1 \quad \text{et} \quad \alpha\tilde{\alpha} < 1$$

est trivial ($\alpha < \beta$ pour tous les morphismes α, β ayant les mêmes extrêmes); la sous-catégorie de \mathcal{C} vérifiant 0.2.1 est alors \mathcal{H} .

Par contre, au moins pour la symétrisation canonique des catégories exactes, l'ordre est déterminé par le foncteur s , de la façon dite en 0.2 (voir Partie II); il n'y a donc pas de perte d'information si on se place dans le deuxième cadre.

C'est le choix qu'on fait ici.

0.12. On définit (2.1) *symétrisation* de la catégorie \mathcal{C} tout foncteur $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ à valeurs dans une catégorie \mathcal{H} munie d'involution, qui soit bijectif sur les objets et tel que $s(\mathcal{C})$ engendre \mathcal{H} moyennant l'involution; on demande encore que pour tout isomorphisme u de \mathcal{C} , $s(u^{-1}) = (su)^{\sim}$ (axiome $S4$).

0.13. Ces conditions, satisfaites dans tous les cas précédemment rappelés et d'ailleurs — je crois — en tout cas « raisonnable », permettent de dire que les symétrisations de \mathcal{C} coïncident avec les « quotients » (2.13) d'une symétrisation maximum (2.10) et forment un lattis complet (2.14); cela aurait été faux si l'on avait requis la fidélité du foncteur s (injectivité sur les morphismes; voir aussi 0.16); bien entendu cette propriété sera étudiée, voire requise, dans tous les cas intéressants. L'axiome $S4$, non irrenonçable, offre des conséquences utiles (2.22, 2.23 et surtout 3.17, 3.19), et aucune préclusion significative.

0.14. Les symétrisations se présentent « par familles »: symétrisation canonique des catégories abéliennes, des catégories exactes, etc. On a donc avantage à considérer des fonctions S qui à certaines catégories \mathcal{C} associent l'une de leurs symétrisations, notée $s_{\mathcal{C}S}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^S$; une telle fonction est dite *symétriseur* (3.1); une condition de naturalité — respecter les équivalences de catégories — est donnée en 3.20.

0.15. Si $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur entre S -catégories (catégories sur lesquelles le symétriseur S est défini) on dira que f est un *S -foncteur* s'il existe un foncteur $f^s: \mathcal{C}^S \rightarrow \mathcal{D}^S$, commutant avec les involutions respectives, et tel que le carré

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{D} \\ \downarrow s_{\mathcal{C}S} & & \downarrow s_{\mathcal{D}S} \\ \mathcal{C}^S & \xrightarrow{f^s} & \mathcal{D}^S \end{array}$$

commute; f^s est alors univoquement déterminé, et appelé *symétrisé de f selon S* (3.II). On définit aussi (3.III) le symétrisé selon S d'un morphisme fonctoriel entre S -foncteurs.

0.16. $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ étant une symétrisation, on dit qu'un diagramme carré commutatif de \mathcal{C} est s -exact s'il est transformé par s dans un diagramme bicommutatif (1.8) de \mathcal{K} ; vice versa, si on se donne un ensemble de diagrammes carrés en \mathcal{C} , cela définit un quotient de la symétrisation maximum de \mathcal{C} , donc une symétrisation de \mathcal{C} . Cette correspondance (une préconnexion de Galois: 4.II) est possible à cause du renoncement à la fidélité aprioristique des symétrisations (voir 4.9).

0.17. Le numéro 5 traite des questions de dualité. Le numéro 6 (exemples de symétriseurs) présente un résumé des résultats des parties II et III(6.I) ainsi qu'un autre exemple basé sur les deux procédés duals de Parodi [24].

Il suivra d'autres travaux traitant les symétrisations dont on a parlé en 0.11, et le symétriseur qui les fournit.

III. Conventions.

0.18. Pour toute catégorie \mathcal{C} , on note $\mathcal{C}(A, B)$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} ayant *domaine* (ou source) A et *codomaine* (ou but) B ; 1_A (ou simplement 1) l'identité de A . L'expression $u \in \mathcal{C}$ signifie que $u \in \mathcal{C}(A, B)$, pour quelques A et B , d'ailleurs uniques et notés:

$$A = \text{Dom } u \quad B = \text{Cod } u .$$

Tout foncteur est supposé covariant, sauf indication du contraire. Pour le reste on suit la terminologie catégoriale de Mitchell [29] et Mac Lane [28]. Les abus du mot « ensemble » (fréquents, et parfois « du deuxième degré ») sont généralement soulignés par l'écriture en italique de ce mot; une systématisation est possible en utilisant les univers de Grothendieck.

IV. Table des matières.

1. *Généralités sur les catégories involutives.*
 - I. Catégories involutives.
 - II. Catégories involutives régulières.
 - III. Carrés bicommutatifs.
 - IV. Catégories préordonnées.
 - V. Congruences sur les catégories involutives.

2. *Symétrisations d'une catégorie.*
 - I. Définitions.
 - II. Préordre et équivalence entre symétrisations.
 - III. Symétrisation maximum; préléttis des symétrisations.
 - IV. Symétrisations régulières.
 - V. Carrés exacts et factorisations binaires.
3. *Symétrisation des foncteurs et des morphismes fonctoriels.*
 - I. Symétriseurs.
 - II. Symétrisation des foncteurs.
 - III. Symétrisation des morphismes fonctoriels.
 - IV. Adjonction et équivalence de catégories; symétriseurs naturels.
4. *Types et symétrisations carrés.*
 - I. Types carrés.
 - II. La préconnexion de Galois entre symétrisations et types carrés.
 - III. Une caractérisation des symétrisations carrées.
 - IV. Types carrés généralisés; symétrisation des foncteurs.
 - V. Schémas renforcés de diagrammes.
5. *Symétrisations et dualité.*
 - I. La catégorie opposée.
 - II. Symétrisations opposées.
 - III. Symétrisations duales.
 - IV. La congruence opposée.
 - V. Symétriseurs et dualité.
 - VI. Le type carré opposé.
6. *Exemples de symétriseurs.*
 - I. Les symétriseurs \mathcal{W} , \mathcal{A} et \mathcal{O} .
 - II. Les symétriseurs \mathcal{V} et \mathcal{A} .

1. Généralités sur les catégories involutives.

I. Catégories involutives.

1.1. On appellera *catégorie involutive* une catégorie \mathcal{C} munie d'un endofoncteur contravariant j identique sur les objets et involutif ($j \circ j = 1_{\mathcal{C}}$) qu'on dira *involutions* de \mathcal{C} ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ j est donc un isomorphisme de \mathcal{C} sur la catégorie opposée, et \mathcal{C} est autoduale.

1.2. Si α est un morphisme de \mathcal{K} , $j(\alpha)$ sera souvent noté $\tilde{\alpha}$ ou α^\sim . Si α et β sont morphismes composables de \mathcal{K} , et A un objet:

$$(1) \quad \text{Dom } \alpha = \text{Cod } \tilde{\alpha}$$

$$(2) \quad \tilde{1}_A = 1_A,$$

$$(3) \quad (\beta \circ \alpha)^\sim = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta},$$

$$(4) \quad \tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha.$$

1.3. Un foncteur $h: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ entre catégories involutives est \sim -compatible (ou \sim -foncteur) s'il commute avec les involutions respectives j_1 et j_2 :

$$(1) \quad h \circ j_1 = j_2 \circ h$$

L'identité d'une catégorie involutive, et tout composé de \sim -foncteurs, sont \sim -foncteurs.

II. Catégories involutives régulières.

1.4. La catégorie involutive \mathcal{K} est *régulière* si elle vérifie la condition:

$$(1) \quad \alpha \tilde{\alpha} = \alpha \quad \text{pour tout morphisme } \alpha \text{ } ^{(2)}.$$

1.5. Si \mathcal{K} est une catégorie involutive régulière et α un morphisme de \mathcal{K} , il est facile de voir que les conditions suivantes sont, dans chaque regroupement, équivalentes:

$$(1) \quad \alpha \text{ est un monomorphisme (simplifiable à gauche),}$$

$$(2) \quad \alpha \text{ a un inverse à gauche,}$$

$$(3) \quad \tilde{\alpha} \alpha = 1.$$

⁽²⁾ On rappelle que dans un semigroupe, on dit que deux éléments x, y forment un *couple régulier* si: $x = xyx, y = yxy$. Le semigroupe est *régulier* si pour tout élément x il existe un élément y tel que (x, y) est régulier.

- (1') α est un épimorphisme ,
 (2') α a un inverse à droite ,
 (3') $\alpha\tilde{\alpha} = 1$.
- (1'') α est monomorphisme et épimorphisme ,
 (2'') α est un isomorphisme ,
 (3'') α et $\tilde{\alpha}$ sont isomorphismes réciproques.

Il s'ensuit que toute factorisation épimorphisme-monomorphisme est unique (à isomorphisme près).

1.6. COROLLAIRE. *a)* Tout foncteur d'une catégorie involutive régulière dans une catégorie quelconque préserve monomorphismes et épimorphismes.

b) Tout \sim -foncteur fidèle à valeurs dans une catégorie involutive régulière reflète monomorphismes, épimorphismes et isomorphismes.

1.7. LEMME. Une catégorie involutive où tout morphisme se factorise en épimorphisme-monomorphisme est régulière si et seulement si elle vérifie les conditions équivalentes:

- (1) $\tilde{\mu}\mu = 1$, pour tout monomorphisme μ ,
 (2) $\pi\tilde{\pi} = 1$, pour tout épimorphisme π .

DÉM. (1) et (2) sont évidemment équivalentes; leur nécessité suit de 1.5; pour la suffisance, si $\alpha = \mu\pi$ est la factorisation épimorphisme-monomorphisme de α , on aura:

$$\alpha\tilde{\alpha} = (\mu\pi)(\tilde{\pi}\tilde{\mu})(\mu\pi) = \mu(\pi\tilde{\pi})(\tilde{\mu}\mu)\pi = \mu\pi = \alpha .$$

III. Carrés bicommutatifs.

1.8. Un diagramme carré dans une catégorie involutive

(1)

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\delta} & \\
 \alpha \uparrow & & \uparrow \gamma \\
 & \xrightarrow{\beta} &
 \end{array}$$

est *anticommutatif* si l'on a :

$$(2) \quad \beta\tilde{\alpha} = \tilde{\gamma}\delta \quad (\alpha\tilde{\beta} = \tilde{\delta}\gamma),$$

et *bicommutatif* ⁽³⁾ s'il est aussi commutatif. Ces carrés sont préservés par les \sim -foncteurs.

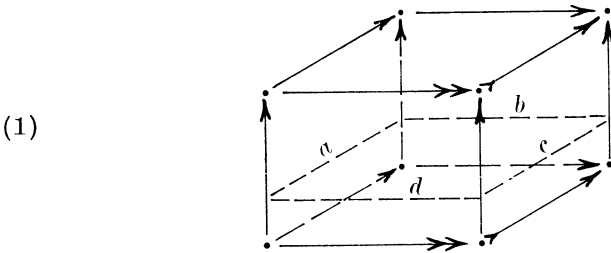
1.9. Tout « recollement » de carrés bicommutatifs est encore tel. Vice versa si dans le diagramme commutatif de \mathcal{E}

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\pi} & & \xrightarrow{\mu} & & \\ & \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma & \\ & & \xrightarrow{\pi'} & & \xrightarrow{\mu'} & & \end{array}$$

le rectangle extérieur est bicommutatif, alors :

- (2) si $\tilde{\mu}\mu = 1$ et $\tilde{\mu}'\mu' = 1$, le carré gauche est bicommutatif;
- (2~) si $\pi\tilde{\pi} = 1$ et $\pi'\tilde{\pi}' = 1$, le carré droit est bicommutatif.

1.10. « *Lemme cubique* ». Soit, dans une catégorie involutive régulière, le diagramme commutatif ⁽⁴⁾:



si les mailles (a) et (b) sont bicommutatives, il en est ainsi de (c) et (d).

⁽³⁾ « Vollkommutativ » en [5].
⁽⁴⁾ Les flèches \gg, \ggg dénotent respectivement un monomorphisme ou un épimorphisme de la catégorie considérée [28].

En effet le recollement de (a) et (b) est bicommutatif, et coïncide — par la commutativité globale — avec le recollement de (d) et (c); on termine par 1.5 et 1.9.

IV. Catégories préordonnées.

1.11. Une catégorie \mathcal{C} est dite *préordonnée* si chaque ensemble $\mathcal{C}(A, B)$, A et B étant objets de \mathcal{C} , est muni d'un préordre \leq (relation binaire réflexive et transitive), compatiblement avec la composition.

1.12. Si $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont morphismes de \mathcal{C} , on a donc:

- (1) $\alpha \leq \beta$ entraîne $Dom \alpha = Dom \beta, Cod \alpha = Cod \beta$,
 (2) $(\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', Cod \alpha = Dom \beta)$ entraîne $\beta \alpha \leq \beta' \alpha'$.

1.13. On dira que \mathcal{C} est *ordonnée* si dans chaque ensemble $\mathcal{C}(A, B)$ le préordre est en effet un ordre ($\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$ entraîne $\alpha = \beta$).

1.14. Un foncteur $f: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ (covariant ou contravariant) entre catégories préordonnées est *croissant* si

- (1) $\alpha \leq \beta$ en \mathcal{C}_1 entraîne $f(\alpha) \leq f(\beta)$ en \mathcal{C}_2 .

1.15. Finalement une *catégorie involutive préordonnée* (resp. *ordonnée*) est une catégorie préordonnée (resp. ordonnée) munie d'une involution croissante:

- (1) $\alpha \leq \beta$ entraîne $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$.

V. Congruences sur les catégories involutives.

1.16. Soit \mathcal{C} une catégorie involutive: une relation binaire r sur les morphismes de \mathcal{C} est appelée *\sim -congruence* (ou *congruence de catégorie involutive*) si elle est un préordre de catégorie involutive (1.15), symétrique sur chaque ensemble $\mathcal{C}(A, B)$. Cela revient à dire qu'on a des relations d'équivalence $r_{A,B}$ sur chaque ensemble $\mathcal{C}(A, B)$, de façon compatible avec composition et involution. On notera que r est identique sur les objets.

1.17. Les \sim -congruences de \mathcal{C} sont — en tant que *parties* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ — ordonnées par inclusion; elles sont évidemment stables vis-à-vis de l'intersection, d'où:

1.18. Toute relation binaire r dans \mathcal{C} engendre une \sim -congruence r : l'intersection de toutes les \sim -congruences qui la contiennent.

1.19. Les \sim -congruences d'une catégorie involutive forment un lattis complet par rapport à l'inclusion. La borne supérieure d'une famille de \sim -congruences est la \sim -congruence engendrée par leur réunion ensembliste.

1.20. Si \mathcal{C} est une catégorie involutive préordonnée, on peut définir la \sim -congruence associée au préordre \leq par:

$$(1) \quad \alpha \sim \beta \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha \leq \beta \text{ et } \beta \leq \alpha.$$

Le quotient \mathcal{C}/\sim est alors une catégorie involutive ordonnée (par l'ordre induit), et la projection canonique est croissante.

2. Symétrisations d'une catégorie.

I. Définitions.

2.1. Soit \mathcal{C} une catégorie; on dira *symétrisation de \mathcal{C}* tout couple (s, j) vérifiant les hypothèses suivantes:

(S1) $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur injectif sur les objets.

(S2) j est une involution (1.1) sur \mathcal{C} , codomaine de s .

(S3) toute sous-catégorie involutive de \mathcal{C} qui contient $s(\mathcal{C})$ coïncide avec \mathcal{C} ⁽⁵⁾.

(S4) pour tout isomorphisme u de \mathcal{C} , $s(u^{-1}) = (s(u))^\sim$.

La symétrisation est *fidèle* si le foncteur s est tel; par S1 il s'agit alors d'un plongement.

2.2. Par abus de langage on parlera de la symétrisation $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, ou s tout-court; s est forcément bijective sur les objets et l'on identi-

⁽⁵⁾ Autrement dit, la sous-catégorie involutive de \mathcal{C} engendrée par $s(\mathcal{C})$ est \mathcal{C} elle-même. Remarquer que $s(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de \mathcal{C} par S1.

fiera toujours A , objet de \mathcal{C} , à $s(A)$. Tout morphisme α de \mathcal{K} peut s'écrire comme une composition finie:

$$(1) \quad \alpha = \alpha_n \circ \alpha_{n-1} \circ \dots \circ \alpha_1,$$

où pour tout i , $\alpha_i \in s(\mathcal{C})$ ou bien $\tilde{\alpha}_i \in s(\mathcal{C})$. On ne prétend pas, en général, qu'une symétrisation soit fidèle (cfr. 0.13); si c'est le cas, on identifiera u , morphisme de \mathcal{C} , à $s(u)$.

2.3. Il est utile de remarquer que, si $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ est une symétrisation, et $h, h': \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ sont \sim -foncteurs, alors $h \circ s = h' \circ s$ entraîne $h = h'$, par $S3$; mais cette propriété n'entraîne pas $S3$.

2.4. On dira *invariante* une symétrisation fidèle $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ telle que tout isomorphisme de \mathcal{K} provienne d'un isomorphisme de \mathcal{C} moyennant s : celui-ci, étant fidèle, définit alors une correspondance biunivoque entre les isomorphismes de \mathcal{C} et ceux de \mathcal{K} .

2.5. Une *symétrisation préordonnée* (resp. *ordonnée*) est une symétrisation $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$, où \mathcal{K} est munie d'un préordre (resp. ordre) de catégorie involutive (1.15) ⁽⁶⁾.

II. *Préordre et équivalence entre symétrisations.*

2.6. Etant données les symétrisations $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$, $s': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}'$ de la catégorie \mathcal{C} , on dira que $s < s'$ s'il existe un \sim -foncteur h tel que $s = h \circ s'$:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{s'} & \mathcal{K}' \\ & \searrow s & \downarrow h \\ & & \mathcal{K} \end{array}$$

2.7. C'est évidemment un préordre sur les symétrisations de \mathcal{C} . h est univoquement déterminé, par 2.3; il est bijectif sur les objets (s et s' sont tels) et plein, car son image est une sous-catégorie involutive de \mathcal{K} contenant $s(\mathcal{C})$; en conclusion il définit une \sim -congruence (1.16) r sur \mathcal{K} ($\alpha r \beta \iff h(\alpha) = h(\beta)$) et \mathcal{K}' est isomorphe à \mathcal{K}/r .

⁽⁶⁾ Ce n'est qu'à partir de la partie II qu'on étudiera, ici, des symétrisations préordonnées.

2.8. On écrira \sim la relation d'équivalence associée au préordre $<$ entre symétrisations:

$$(1) \quad s \sim s' \Leftrightarrow s < s' \text{ et } s' < s.$$

On dira alors que les symétrisations s et s' sont *isomorphes*.

2.9. Cela revient à dire qu'il existe un isomorphisme de catégories involutives h tel que $s = h \circ s'$ (en effet il existe $h, h' \sim$ -foncteurs tels que $s = h \circ s', s' = h' \circ s$; donc $s = h \circ h' \circ s$, et (par 2.3) $h \circ h' = 1$; de façon analogue, $h' \circ h = 1$).

III. Symétrisation maximum; prélattis des symétrisations.

2.10. THÉOREME. Toute catégorie \mathcal{C} admet une symétrisation maximum $s_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^M$, déterminée à isomorphie près. Pour chaque foncteur $z: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ défini sur \mathcal{C} , à valeurs dans une catégorie involutive \mathcal{H} et tel que $z(u^{-1}) = z(u) \sim$ pour tout u isomorphisme de \mathcal{C} , il existe un et un seul \sim -foncteur $h_z: \mathcal{C}^M \rightarrow \mathcal{H}$ tel que $z = h_z \circ s_{\mathcal{C}}$.

2.11. DÉMONSTRATION ⁽⁷⁾. On construit d'abord la catégorie des chaînes de \mathcal{C} , CHC , ayant les mêmes objets que \mathcal{C} , et dont les morphismes de A en B sont les diagrammes finis de \mathcal{C} du genre

$$(1) \quad A \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot \rightarrow \dots \dots \leftarrow \cdot \leftarrow B,$$

y compris le diagramme vide de A en A qui donne 1_A ; composition et involution de CHC sont évidentes ⁽⁸⁾.

On considère ensuite la \sim -congruence r engendrée par la suppression des identités, la composition des flèches contiguës de même orien-

⁽⁷⁾ Il s'agit plutôt d'une esquisse de démonstration. Pour les détails voir: M. MARGIOCCO, *La simmetrizzazione massima di una categoria* (à paraître), où il est prouvé que la symétrisation maximum est toujours invariante.

⁽⁸⁾ Cette catégorie a déjà été considérée par Freyd [13] et Brinkmann [3], sous le nom de *word C*; on peut la définir par récurrence [3], ou bien comme la catégorie libre engendrée par le graphe (voir [28]) constitué par \mathcal{C} et \mathcal{C}^* (catégorie opposée), après identification de leurs objets; ou encore moyennant les diagrammes de \mathcal{C} sur les graphes « appartenant » au semigroupe unitaire libre engendré par deux éléments: \leftarrow et \rightarrow .

tation et le « renversement » des isomorphismes; alors $\mathcal{C}^{\mathbf{M}} = (CH\mathcal{C})/r$ est une catégorie involutive, et on peut définir $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{M}}$ en envoyant le morphisme $u \in \mathcal{C}(A, B)$ dans la classe modulo r du diagramme

$$(2) \quad A \xrightarrow{u} B.$$

C'est bien un foncteur (grâce à la quotientation par r), voire une symétrisation de \mathcal{C} . La dernière affirmation est évidente, et prouve que $\mathbf{s}\mathcal{C}$ est la symétrisation maximum de \mathcal{C} .

2.12. COROLLAIRE. Il y a correspondance biunivoque entre symétrisations de \mathcal{C} et \sim -foncteurs de domaine $\mathcal{C}^{\mathbf{M}}$, bijectifs sur les objets et pleins, correspondance établie par:

$$(1) \quad s \mapsto h_s \quad (\text{cfr. 2.10}),$$

$$(2) \quad h \circ s \leftarrow h.$$

2.13. On a encore correspondance biunivoque entre classes de symétrisations isomorphes de \mathcal{C} et \sim -congruences de $\mathcal{C}^{\mathbf{M}}$, en associant à la symétrisation s la congruence $\mathbf{r}(s)$ de $\mathcal{C}^{\mathbf{M}}$:

$$(1) \quad \alpha \mathbf{r}(s) \beta \Leftrightarrow h_s(\alpha) = h_s(\beta),$$

et vice versa à la \sim -congruence r de $\mathcal{C}^{\mathbf{M}}$, la symétrisation $\mathbf{s}(r)$ donnée par la composition:

$$(2) \quad \mathcal{C} \xrightarrow{\mathbf{s}\mathcal{C}} \mathcal{C}^{\mathbf{M}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{M}}/r.$$

Alors:

$$(3) \quad \mathbf{r}\mathbf{s}(r) = r \quad \mathbf{s}\mathbf{r}(s) \sim s.$$

2.14. Cette correspondance est un anti-isomorphisme d'ordre, ce qui prouve (1.19) que les classes de symétrisations isomorphes d'une catégorie forment un lattis complet.

2.15. On peut encore caractériser les classes de symétrisations isomorphes en associant à toute symétrisation s de la catégorie \mathcal{C} l'ensemble Z_s des foncteurs z définis sur \mathcal{C} , à valeurs en catégories involutives et pour lesquels il existe un \sim -foncteur h (unique) tel que $z = h \circ s$; alors,

si s' est aussi une symétrisation de \mathcal{C} :

$$(1) \quad s < s' \quad \text{si et seulement si } Z_s \subset Z_{s'},$$

$$(2) \quad s \sim s' \quad \text{si et seulement si } Z_s = Z_{s'},$$

conséquence immédiate de la définition de $<$ (2.6).

2.16. Si s est une symétrisation, la propriété dans la variable z :

$$(1) \quad z \in Z_s, \text{ et pour tout } z' \in Z_s \text{ il existe un et un seul } \sim\text{-foncteur } h \text{ tel que } z' = h \circ z,$$

caractérise s à isomorphie près.

DÉM. En effet s la vérifie, par définition de Z_s ; si z la vérifie aussi, il existe deux \sim -foncteurs h, h' tels que $s = h \circ z, z = h' \circ s$; à cause de l'unicité requise, on prouve que $h \circ h' = 1, h' \circ h = 1$: alors z est bien une symétrisation de \mathcal{C} , isomorphe à s .

2.17. Par 2.14, toute catégorie \mathcal{C} a une symétrisation minimum (déterminée à isomorphie près), qu'on notera $s_{\mathcal{C}^m}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^m$. On peut l'obtenir moyennant la \sim -congruence maximum r_0 de \mathcal{C}^M :

$$(1) \quad \alpha r_0 \beta \Leftrightarrow \text{Dom } \alpha = \text{Dom } \beta \quad \text{et} \quad \text{Cod } \alpha = \text{Cod } \beta.$$

$\mathcal{C}^m = \mathcal{C}^M / r_0$ est caractérisée par le fait d'avoir les objets de \mathcal{C} , et (si A, B sont tels) un morphisme de A en B si A et B sont « connexes » en \mathcal{C} ($\mathcal{C}^M(A, B) \neq \emptyset$)⁽⁹⁾, aucun morphisme dans le cas contraire. L'involution de \mathcal{C}^m , et le foncteur $s_{\mathcal{C}^m}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^m$ sont évidents.

IV. Symétrisations régulières.

2.18. Une symétrisation $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ est *régulière* si la catégorie involutive \mathcal{K} est telle (1.4); on remarquera que tout foncteur s à valeurs dans une catégorie involutive régulière vérifie $S4$ par 1.5. La symétrisation canonique d'une catégorie exacte, et la symétrisation des trans-

⁽⁹⁾ Ou encore $CH \mathcal{C}(A, B) \neq \emptyset$ (voir 2.11); \mathcal{C} résulte ainsi partagée en composantes connexes. En effet toutes les catégories usuelles sont *connexes* en ce sens.

ducteurs pour la catégorie des ensembles (0.4) sont régulières, tandis que celle des correspondances (entre ensembles) ne l'est pas.

2.19. Si $s < s'$ parmi les symétrisations de C , la régularité de s' entraîne celle de s .

2.20. Soit $s_{CR} : C \rightarrow C^R$ la symétrisation de la catégorie C déterminée (2.12) par la \sim -congruence engendrée, en C^M , par la relation dans les variables α et β :

$$(1) \quad \alpha \tilde{\alpha} \alpha = \beta.$$

Il est évident que s_{CR} est la symétrisation régulière maximum de C .

Les classes d'isomorphie des symétrisations régulières de C correspondent biunivoquement aux \sim -congruences de C^R , et aussi aux \sim -congruences de C^M contenant la relation (1). La correspondance est décroissante, et s'écrit de façon analogue à 2.13.1,2.

2.21. COROLLAIRE. Les classes des symétrisations régulières d'une catégorie forment un sous-lattis complet du lattis des classes de symétrisations.

V. Carrés exacts et factorisations binaires.

2.22. $s : C \rightarrow \mathcal{C}$ étant une symétrisation, on dira que le diagramme carré de C :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{v'} & \\ u \uparrow & & \uparrow u' \\ & \xrightarrow{v} & \end{array}$$

est *s-exact* s'il est commutatif et transformé par s en un carré bicommutatif (1.8) de \mathcal{C} . Par S_4 , tout carré (1) dont deux côtés parallèles sont isomorphismes est *s-exact*.

Les propriétés 1.9-10 ont une extension évidente aux carrés *s-exacts*.

2.23. Si $s < s'$ parmi les symétrisations de C , tout carré *s'-exact* est aussi *s-exact*. Un carré commutatif de la catégorie C est toujours *m-exact*; il est *M-exact* si deux côtés parallèles sont isomorphismes.

2.24. On dira que la symétrisation $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ a *factorisations binaires* si pour tout morphisme α de \mathcal{K} il existe u, v morphismes de \mathcal{C} tels que:

$$(1) \quad \alpha = (sv) \circ (su) \sim$$

on dira qu'elle a *factorisations cobinaires* si pour tout $\alpha \in \mathcal{K}$ il existe $u', v' \in \mathcal{C}$ tels que

$$(2) \quad \alpha = (su') \sim \circ (sv')$$

(3)

2.25. Condition nécessaire et suffisante pour que la symétrisation $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ ait factorisations binaires est que pour tout couple u', v' de morphismes de \mathcal{C} ayant le même codomaine, il existe $u, v \in \mathcal{C}$ tels que 2.22.1 soit anticommutatif en \mathcal{K} .

La démonstration est évidente, en utilisant $\mathbf{s}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{M}}$.

3. Symétrisation des foncteurs et des morphismes fonctoriels.

I. Symétriseurs.

3.1. On appellera *symétriseur* (voir 0.14) toute fonction S associant à quelque catégorie \mathcal{C} l'une de ses symétrisations, qu'on notera:

$$(1) \quad \mathbf{s}_{\mathcal{C}S}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^S.$$

Les morphismes de \mathcal{C}^S seront encore dits *S-relations* de \mathcal{C} .

Une condition de naturalité liant les symétrisations (1) par rapport aux catégories \mathcal{C} sera donnée en 3.20.

3.2. S et S' étant symétriseurs, on écrira que $S < S'$ si S et S' sont définis sur les mêmes catégories, et \mathcal{C} en étant l'une, $\mathbf{s}_{\mathcal{C}S} < \mathbf{s}_{\mathcal{C}S'}$; que $S \sim S'$ si $S < S'$ et $S' < S$.

3.3. Exemples (d'autres sont considérés au n. 6):

a) les symétriseurs \mathbf{M} , \mathbf{R} , \mathbf{m} associant respectivement à toute catégorie \mathcal{C} sa symétrisation:

$$(1) \quad \mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathbf{M}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathbf{M}} = \mathbf{s}_{\mathcal{C}} \quad (2.10)$$

$$(2) \quad \mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathbf{R}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{R}} \quad (2.20)$$

$$(3) \quad \mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathbf{m}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{m}} \quad (2.17)$$

ce qui rejoint des notations déjà utilisées au n. 2.

\mathbf{M} est le symétriseur maximum (3.2) parmi ceux qui sont définis sur toute catégorie, \mathbf{m} le minimum.

b) Le *symétriseur canonique* des catégories abéliennes (resp. exactes) associant à chaque catégorie abélienne (resp. exacte) sa symétrisation usuelle.

c) Toute symétrisation peut être envisagée en tant que symétriseur défini sur une seule catégorie.

II. *Symétrisation des foncteurs.*

3.4. Soit $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ et $s': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}'$ des symétrisations:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{D} \\ \downarrow s & & \downarrow s' \\ \mathcal{K} & \xrightarrow{f'} & \mathcal{K}' \end{array}$$

par 2.3 il existe au plus un \sim -foncteur $f': \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ tel que

$$(2) \quad f' \circ s = s' \circ f.$$

S'il existe, on l'appelle *symétrisé de f par rapport à s et s'* , et on dit que f est *symétrisable par rapport à s et s'* . Cette condition est évidemment équivalente à: $s' \circ f \in Z_s$ (2.15), ou encore à: $Z_{s'} \circ f \subset Z_s$.

3.5. Soit S un symétriseur: on dira S -catégorie toute catégorie sur laquelle S est défini. On dit que le foncteur $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un S -foncteur si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont S -catégories, et si f est symétrisable par rapport à $\mathbf{s}_{\mathcal{C}S}$ et $\mathbf{s}_{\mathcal{D}S}$; le symétrisé est noté $f^S: \mathcal{C}^S \rightarrow \mathcal{D}^S$, et caractérisé par ce qu'il est le \sim -foncteur vérifiant

$$(1) \quad f^S \circ \mathbf{s}_{\mathcal{C}S} = \mathbf{s}_{\mathcal{D}S} \circ f.$$

Tout foncteur est un M -, m -, R -foncteur.

3.6. Le foncteur identique d'une S -catégorie \mathcal{C} , ainsi que le composé de S -foncteurs f et g , est un S -foncteur et:

$$(1) \quad (1_{\mathcal{C}})^S = 1_{\mathcal{C}^S},$$

$$(2) \quad (g \circ f)^S = g^S \circ f^S.$$

3.7. On a ainsi un foncteur ($\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^S, f \mapsto f^S$) de la catégorie des S -catégories et S -foncteurs dans la catégorie des catégories involutives et \sim -foncteurs. En outre (3.5.1) la famille $S = (\mathbf{s}_{\mathcal{C}S})_{\mathcal{C}}$ peut être envisagée comme un morphisme du foncteur d'inclusion

$$[S\text{-catégories}] \rightarrow [\text{catégories}]$$

dans le foncteur $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^S, f \mapsto f^S$ entre les mêmes catégories.

3.8. Si S, S' sont symétriseurs, $S < S'$, et $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est en même temps S - et S' -foncteur, on a un diagramme commutatif:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{D} \\ \downarrow \mathbf{s}_{\mathcal{C}S'} & \searrow \mathbf{s}_{\mathcal{C}S} & \downarrow \mathbf{s}_{\mathcal{D}S'} \\ \mathcal{C}^{S'} & \xrightarrow{f^{S'}} & \mathcal{D}^{S'} \\ \downarrow \mathbf{s}_{\mathcal{C}S} & \swarrow h & \downarrow \mathbf{s}_{\mathcal{D}S} \\ \mathcal{C}^S & \xrightarrow{f^S} & \mathcal{D}^S \\ & \swarrow k & \end{array}$$

où h et k sont \sim -foncteurs.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver la commutativité du « trapèze inférieur »:

$$(k \circ f^{S'}) \circ \mathbf{s}_{\mathcal{C}S'} = k \circ \mathbf{s}_{\mathcal{D}S'} \circ f = \mathbf{s}_{\mathcal{D}S'} \circ f = f^S \circ \mathbf{s}_{\mathcal{C}S} = (f^S \circ h) \circ \mathbf{s}_{\mathcal{C}S'}.$$

Donc $k \circ f^{S'} = f^S \circ h$ (par 2.3).

III. Symétrisation des morphismes fonctoriels.

3.9. Soit S un symétriseur défini sur la catégorie \mathcal{C} ; on dira qu'un diagramme carré de \mathcal{C} est S -exact (en \mathcal{C}) s'il est $\mathbf{s}_{\mathcal{C}S}$ -exact (2.22).

3.10. Soit $\varphi: f \rightarrow g$ un morphisme fonctoriel entre S -foncteurs $f, g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$; pour tout objet A de \mathcal{C} on a donc un morphisme en \mathcal{D} :

$$(1) \quad \varphi_A: f(A) \rightarrow g(A)$$

et pour tout $u \in \mathcal{C}(A, B)$, le carré:

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} fA & \xrightarrow{fu} & fB \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\ gA & \xrightarrow{gu} & gA \end{array}$$

est commutatif.

3.11. Etant donné que les objets de \mathcal{C} sont supposés identifiés à ceux de \mathcal{C}^S moyennant $\mathbf{s}_{\mathcal{C}S}$ (2.2), on pourra poser, pour tout A objet de \mathcal{C}^S :

$$(1) \quad \varphi_A^S = \mathbf{s}_{\mathcal{D}S}(\varphi_A): f(A) \rightarrow g(A)$$

il s'agit d'un morphisme en \mathcal{D}^S .

3.12. THÉORÈME. Avec les notations précédentes, $\varphi^S = (\varphi_A^S)_A$ est un morphisme fonctoriel de f^S en g^S si et seulement si tous les carrés 3.10.2 sont S -exactes en \mathcal{C} .

DÉMONSTRATION. Pour la suffisance, soit $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$. Par 2.2, on a une factorisation $\alpha = \alpha_n \circ \alpha_{n-1} \circ \dots \circ \alpha_1$, où $\alpha_i \in \mathbf{s}_{\mathcal{C}S}(\mathcal{C})$ ou bien $\tilde{\alpha}_i \in \mathbf{s}_{\mathcal{C}S}(\mathcal{C})$. Si

$A_i = \text{Cod } \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), on a le diagramme:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} fA & \xrightarrow{f^S \alpha_1} & fA_1 & \longrightarrow & \dots & fA_{n-1} & \xrightarrow{f^S \alpha_n} & fB \\ \downarrow \varphi_A & & \downarrow \varphi_{A_1} & & & \downarrow \varphi_{A_{n-1}} & & \downarrow \varphi_B \\ gA & \xrightarrow{g^S \alpha_1} & gA_1 & \longrightarrow & \dots & gA_{n-1} & \xrightarrow{g^S \alpha_n} & gB \end{array}$$

où la maille i -ème est trivialement commutative si $\alpha_i \in \mathfrak{S}_{\mathcal{C}_S}(\mathcal{C})$, tandis que si $\tilde{\alpha}_i \in \mathfrak{S}_{\mathcal{C}_S}(\mathcal{C})$ elle est commutative à cause de l'hypothèse d'exactitude.

Alors le rectangle extérieur est commutatif; ses morphismes horizontaux sont $f^S(\alpha)$ et $g^S(\alpha)$, d'où la thèse.

La nécessité est évidente (si $u \in \mathcal{C}$, prendre $\alpha = (su)^\sim$ et en déduire l'anticommutativité de 3.10.2).

3.13. La condition précédente étant satisfaite, on dira que $\varphi: f \rightarrow g$ est un S -morphisme, et que $\varphi^S: f^S \rightarrow g^S$ est le S -symétrisé de φ .

3.14. La symétrisation par S respecte les morphismes identiques, la composition entre foncteurs et morphismes fonctoriels, et les compositions (*verticale* ou *horizontale* [28, p. 42-45]) entre morphismes fonctoriels.

3.15. Plus en détail, on a les situations suivantes:

a) si f est un S -foncteur, 1_f est un S -morphisme, et

$$(1) \quad (1_f)^S = 1_{f^S},$$

b) si les foncteurs

$$(2) \quad \mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} \mathcal{D} \xrightarrow{h} \mathcal{D}'$$

et le morphisme $\varphi: g \rightarrow g'$ sont S -symétrisables, alors le morphisme

$$(3) \quad h\varphi f: hg f \rightarrow hg' f$$

défini sur tout A objet de \mathcal{C}' par:

$$(4) \quad (h\varphi f)_A = h(\varphi_{fA}): hg f(A) \rightarrow hg' f(A)$$

est S -symétrisable, et:

$$(5) \quad (h\varphi f)_{\underline{a}}^S = h^S \varphi^S f^S,$$

c) si $f, g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ sont S -foncteurs et

$$(6) \quad \varphi: f \rightarrow g, \quad \psi: g \rightarrow h.$$

S -morphisms, le morphisme composition verticale de φ et ψ

$$(7) \quad \psi \cdot \varphi: f \rightarrow h, \quad (\psi \cdot \varphi)_A = \psi_A \circ \varphi_A,$$

est un S -morphisme, et:

$$(8) \quad (\psi \cdot \varphi)^S = \psi^S \cdot \varphi^S: f^S \rightarrow h^S,$$

d) si

$$(9) \quad \mathbb{C}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} \mathbb{C}_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} \mathbb{C}_e$$

sont foncteurs, et

$$(10) \quad \varphi: f \rightarrow f', \quad \psi: g \rightarrow g',$$

sont S -morphisms, le morphisme composition horizontale de φ et ψ

$$(11) \quad \psi \circ \varphi: g \circ f \rightarrow g' \circ f',$$

défini sur tout objet A de \mathbb{C}_1 par la diagonale du carré commutatif:

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} gfA & \xrightarrow{\varphi_A} & gf'A \\ \downarrow \psi_{fA} & & \downarrow \psi_{f'A} \\ g'fA & \xrightarrow{\varphi'_A} & g'f'A \end{array}$$

est un S -morphisme, et

$$(13) \quad (\psi \circ \varphi)^S = \psi^S \circ \varphi^S.$$

3.16. S et S' étant symétriseurs tels que $S < S'$, tout S' -morphisme $\varphi: f \rightarrow g$ entre S -foncteurs f et g est, évidemment, un S -morphisme.

3.17. Tout morphisme fonctoriel est m -morphisme; il n'y a que très peu de M -morphisms, en particulier tout isomorphisme de fonc-

teurs. Plus en général tout isomorphisme entre S -foncteurs est S -morphisme (S étant un symétriseur).

IV. *Adjonction et équivalence de catégories; symétriseurs naturels.*

3.18. Soit une adjonction (f, g, φ, ψ) entre les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} : c'est-à-dire ⁽¹⁰⁾ deux foncteurs:

$$(1) \quad f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \quad g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C},$$

et deux morphismes fonctoriels:

$$(2) \quad \varphi: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow g \circ f,$$

$$(3) \quad \psi: f \circ g \rightarrow 1_{\mathcal{D}},$$

tels que les morphismes composés (en « verticale »):

$$(4) \quad g \xrightarrow{\varphi \circ} gfg \xrightarrow{\circ \psi} g$$

$$(5) \quad f \xrightarrow{\circ \varphi} fgf \xrightarrow{\psi \circ} f$$

soient, respectivement, $1_{\mathcal{C}}$ et $1_{\mathcal{D}}$.

Il est alors évident, d'après 3.14, que si f, g, φ et ψ sont S -symétrisables, alors $(f^S, g^S, \varphi^S, \psi^S)$ est une adjonction entre \mathcal{C}^S et \mathcal{D}^S .

3.19. Une *équivalence* (*équivalence adjointe* en [28]) entre les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est par définition une adjonction (f, g, φ, ψ) où φ et ψ sont isomorphismes; si en outre f et g sont S -foncteurs, il s'ensuit que φ et ψ sont forcément S -morphisms (3.17), et φ^S, ψ^S des isomorphismes fonctoriels: on a ainsi une équivalence $(f^S, g^S, \varphi^S, \psi^S)$ entre \mathcal{C}^S et \mathcal{D}^S .

3.20. D'après 3.19, on dira qu'un symétriseur S est naturel si:

(N) *pour toute S -catégorie \mathcal{C} , et pour toute équivalence (f, g, φ, ψ) entre \mathcal{C} et une catégorie quelconque \mathcal{D} , f et g sont S -foncteurs.*

Evidemment cela entraîne que \mathcal{D} est elle-même une S -catégorie.

⁽¹⁰⁾ Ce n'est que l'une des formes équivalentes sous lesquelles une adjonction peut être assignée [28].

3.21. On a intérêt à considérer une condition ultérieure de naturalité pour les symétriseurs, souvent vérifiée:

(N1) Si $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un S -foncteur fidèle qui reflète les isomorphismes, f^s est fidèle.

On remarquera, par contre, que si f^s est fidèle, $\mathbf{s}_{\mathcal{D}S}$ régulière et $\mathbf{s}_{\mathcal{C}S}$ invariante, alors f reflète nécessairement les isomorphismes (f^s les reflète par 1.6 b, $\mathbf{s}_{\mathcal{C}S}$ par 2.4; donc aussi $\mathbf{s}_{\mathcal{D}S} \circ f = f^s \circ \mathbf{s}_{\mathcal{C}S}$ et enfin f).

4. Types et symétrisations carrés.

I. Types carrés.

4.1. Un *type carré* q défini sur la catégorie \mathcal{C} , est un *ensemble* de diagrammes carrés commutatifs de \mathcal{C} :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{v'} & \\ \uparrow u & & \uparrow u' \\ & \xrightarrow{v} & \end{array}$$

ou, si l'on préfère, un *ensemble* de quaternes (u, v, u', v') de morphismes de \mathcal{C} vérifiant:

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Dom } u &= \text{Dom } v & \text{Cod } u' &= \text{Cod } v' \\ \text{Cod } u &= \text{Dom } v' & \text{Cod } v &= \text{Dom } u' \\ v' u &= u' v . \end{aligned}$$

Ces diagrammes sont alors appelés *q-carrés* de \mathcal{C} .

4.2. Les types carrés de la catégorie \mathcal{C} sont ordonnés par inclusion, en tant que *sous-ensembles* de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$; ils forment un sous-lattis complet du lattis des parties de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

II. La préconnexion de Galois entre symétrisations et types carrés.

Soit la catégorie \mathcal{C} .

4.3. A toute symétrisation s de \mathbb{C} , on peut associer le type carré de \mathbb{C} , $\mathbf{q}(s)$, constitué par tous les carrés s -exacts (2.22) de \mathbb{C} .

4.4. Vice versa à tout type carré q défini sur \mathbb{C} on peut associer la symétrisation $\sigma(q) = \mathbf{s}(\bar{r}_q)$, c'est-à-dire (2.13) la composition:

$$(1) \quad \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbf{s}\mathbb{C}} \mathbb{C}^M \longrightarrow \mathbb{C}^M/\bar{r}_q,$$

où \bar{r}_q est la \sim -congruence sur \mathbb{C}^M engendrée par la relation binaire r_q :

$$(2) \quad \alpha r_q \beta \Leftrightarrow \text{il existe en } \mathbb{C} \text{ un } q\text{-carré 4.1.1 tel que } \alpha = v \circ \tilde{u}, \beta = \\ = \tilde{u}' \circ v' \text{ (en } \mathbb{C}^M).$$

4.5. Si s et s' sont des symétrisations de \mathbb{C} , q et q' des types carrés de \mathbb{C} on a (de façon immédiate):

$$(1) \quad s \prec s' \text{ entraîne } \mathbf{q}(s) \supset \mathbf{q}(s'),$$

$$(2) \quad q \subset q' \text{ entraîne } \sigma(q) \succ \sigma(q'),$$

$$(3) \quad \sigma\mathbf{q}(s) \succ s,$$

$$(4) \quad \mathbf{q}\sigma(q) \supset q.$$

4.6. Cela prouve que le couple (\mathbf{q}, σ) induit une connexion de Galois ([30, 28]) entre l'ensemble ordonné des classes de symétrisations isomorphes de \mathbb{C} et l'ensemble ordonné (par inclusion) des types carrés sur \mathbb{C} .

L'ensemble des symétrisations de \mathbb{C} étant préordonné, on pourrait parler de la préconnexion (\mathbf{q}, σ) ; remarquer que si $s \sim s'$, alors $\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}(s')$, par 4.5.1.

4.7. Opérant de façon analogue au procédé des connexions, on posera

$$(1) \quad \bar{q} = \mathbf{q}\sigma(q), \quad s^\diamond = \sigma\mathbf{q}(s).$$

De 4.5 on tire alors:

- (2) $\mathbf{q}(s^\diamond) = \mathbf{q}\sigma\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}(s) \quad \sigma(\bar{q}) = \sigma\mathbf{q}\sigma(q) \sim \sigma(q) \text{ }^{(11)}$,
- (3) $s^\diamond \succ s \quad \bar{q} \supset q$,
- (4) $s^\diamond \sim s^\diamond \text{ }^{(11)} \quad \bar{\bar{q}} = \bar{q}$,
- (5) $s < s' \Rightarrow s^\diamond < s'^\diamond \quad q \subset q' \Rightarrow \bar{q} \subset \bar{q}'$,
- (6) $q \subset \mathbf{q}(s) \Leftrightarrow s < \sigma(q)$.

4.8. Si q est un type carré de \mathbf{C} , \bar{q} est le plus grand type carré donnant lieu à la même symétrisation; l'inégalité $\bar{q} \supset q$ peut être stricte, car \bar{q} contient, entre autres, tous les carrés obtenibles « en recollant des q -carrés » (cfr. 1.9). Si $q = \bar{q}$, c'est-à-dire si q est fermé dans la connexion induite par (\mathbf{q}, σ) , on dira que q est un type carré *fermé*.

4.9. De même, si s est une symétrisation de \mathbf{C} , s^\diamond est (à isomorphie près) la plus grande symétrisation de \mathbf{C} ayant les mêmes carrés exacts que s . Si $s \sim s^\diamond$ (c'est-à-dire si s est fermée dans la préconnexion) on dira que s est une symétrisation *carrée*. Il est évident qu'il existe des symétrisations carrées non fidèles.

4.10. Il existe des symétrisations non carrées, par exemple la symétrisation régulière maximum de la catégorie schématisée par

$$(1) \quad A \rightarrow B,$$

(les deux objets, A et B , étant différents).

Autre exemple: la symétrisation minimum de la catégorie schématisée par



les objets A, B, B', C étant différents.

⁽¹¹⁾ Directement on prouverait l'égalité; mais cela n'a probablement pas d'importance.

4.11. Il est immédiat (et valable pour n'importe quelle préconnexion de Galois) que toute intersection de types carrés fermés (resp. symétrisations carrées) est encore un type fermé (resp. une symétrisation carrée). On a donc deux lattis complets, celui des types fermés de \mathcal{C} et celui des classes d'isomorphie des symétrisations carrées, lattis anti-isomorphes moyennant (\mathbf{q}, σ) . Ils ne sont pas, en général, sous-lattis des lattis des types carrés et des classes de symétrisations de \mathcal{C} ; de même, \mathbf{q} et σ ne sont pas en général, anti-homomorphismes de lattis entre ces deux derniers.

III. Une caractérisation des symétrisations carrées.

4.12. THÉORÈME. Soit q un type carré de la catégorie \mathcal{C} , $s = \sigma(q): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ la symétrisation (carrée) associée. Alors un foncteur $z: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}'$ à valeurs dans une catégorie involutive \mathcal{H}' est en Z_s (2.15) si et seulement si il transforme les q -carrés de \mathcal{C} en carrés bicommutatifs de \mathcal{H}' et vérifie S 3. La propriété reste vraie pour les \bar{q} -carrés.

DÉMONSTRATION. Si $z \in Z_s$, alors z factorise par s ; de $q \subset \bar{q} = q(s)$ on tire que tout q -carré est transformé par s , a fortiori par z , en carré bicommutatif. Vice versa supposons que z vérifie cette propriété; $z = h_z \circ s$ (2.10), ce qui permet de considérer la relation binaire $\alpha\beta$ en $\mathcal{C}^{\mathbf{M}}$ exprimée par les conditions

$$(1) \quad \alpha, \beta \in \mathcal{C}^{\mathbf{M}}, \text{Dom } \alpha = \text{Dom } \beta, \text{Cod } \alpha = \text{Cod } \beta, h_z(\alpha) = h_z(\beta).$$

C'est évidemment une \sim -congruence, qui contient r_q (4.4) en raison de la hypothèse sur z , donc aussi \bar{r}_q ; cela prouve que h_z factorise par h_s , et aussi que z factorise par s .

La dernière affirmation est évidente car $\sigma(\bar{q})$ est encore s .

4.13. COROLLAIRE. Il s'ensuit que $\sigma(q)$ est la plus grande ($<$) parmi les symétrisations de \mathcal{C} qui transforment les q -carrés en carrés bicommutatifs.

IV. Types carrés généralisés; symétrisation des foncteurs.

4.14. Soit Q une fonction assignant à certaines catégories \mathcal{C} un type carré $Q_{\mathcal{C}}$ défini sur \mathcal{C} ; on dira que Q est un type carré généralisé. On appellera aussi Q -carrés de \mathcal{C} les $Q_{\mathcal{C}}$ -carrés.

Si Q et Q' sont types carrés généralisés, $Q \subset Q'$ signifie qu'ils sont définis sur les mêmes catégories, et que pour n'importe laquelle de ces catégories \mathcal{C} , on a: $Q_{\mathcal{C}} \subset Q'_{\mathcal{C}}$.

4.15. La préconnexion de Galois (\mathbf{q}, σ) entre symétrisations et types carrés d'une catégorie donnée se prolonge de façon évidente à une préconnexion (\mathbf{Q}, Σ) entre symétriseurs (S) et types carrés généralisés (Q) :

$$(1) \quad \mathbf{Q}_C(S) = \mathbf{q}(s_{Cs}) \quad s_{C\Sigma(Q)} = \sigma(Q_C),$$

pour laquelle restent valables, mutatis mutandis, les définitions et les propriétés considérées en 4.5-10; en particulier on définit $\bar{Q} = \mathbf{Q}\Sigma(Q)$, $S^\diamond = \Sigma\mathbf{Q}(S)$ et les termes: type carré généralisé *fermé*, symétriseur *carré*.

4.16. THÉORÈME. Si $s_i = \sigma(q_i)$ est une symétrisation (carrée) de la catégorie \mathbf{C}_i ($i = 1, 2$), et $f: \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$ un foncteur, f est symétrisable par rapport à s_1 et s_2 si et seulement si f transforme les q_1 -carrés de \mathbf{C}_1 en \bar{q}_2 -carrés de \mathbf{C}_2 , si et seulement si f transforme les carrés s_1 -exacts en s_2 -exacts.

DÉMONSTRATION. On sait (3.4) que f est symétrisable si et seulement si $s_2 \circ f \in Z_{s_1}$; par 4.12 cette condition est équivalente à: $s_2 \circ f$ transforme les q_1 -carrés en carrés s_2 -exacts, autrement dit en \bar{q}_2 -carrés. Pour la dernière affirmation, remarquer que $\sigma(\bar{q}_i) = s_i$.

4.17. COROLLAIRE. Si $S = \Sigma(Q)$ est un symétriseur carré, un foncteur $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ entre S -catégories est S -foncteur si et seulement si f transforme les Q -carrés de \mathbf{C} en \bar{Q} -carrés de \mathbf{D} .

4.18. Si $\varphi: f \rightarrow g$ est un morphisme fonctoriel entre S -foncteurs, où $S = \Sigma(Q)$ est un symétriseur carré, 3.12 prouve que φ est un S morphisme si et seulement si tous les carrés 3.10.2 sont \bar{Q} -carrés (dans la catégorie codomaine de f et g).

4.19. On dira qu'un type carré généralisé Q est *naturel* s'il vérifie la condition:

(N') pour toute catégorie \mathbf{C} sur laquelle Q est défini, et pour toute équivalence (f, g, φ, ψ) entre \mathbf{C} et une catégorie quelconque \mathbf{D} , Q est défini sur \mathbf{D} et en outre f (resp. g) transforme les Q -carrés de \mathbf{C} (resp. \mathbf{D}) en Q -carrés de \mathbf{D} (resp. \mathbf{C}).

4.20. On vérifie facilement (moyennant 4.15) que la préconnexion (Q, Σ) transforme symétriseurs naturels en types carrés généralisés naturels, et vice versa.

4.21. Q étant un type carré généralisé et S un symétriseur:

- (1) \bar{Q} est naturel si et seulement si $\Sigma(Q)$ est naturel,
- (2) S^\diamond est naturel si et seulement si $Q(S)$ est naturel.

La première propriété est encore équivalente à une condition N'' analogue à N' , mais plus faible, selon laquelle les foncteurs f et g transforment Q -carrés en \bar{Q} -carrés.

V. Schémas renforcés de diagrammes.

Cette section présente une généralisation très informelle de situations qu'on rencontre couramment dans les symétrisations; on l'utilisera (6.2 et Partie II), étant sous-entendu que chaque cas particulier peut se traiter (facilement) de façon directe.

4.22. A partir du schéma carré



on considère, de façon informelle, des schémas (carrés) *renforcés*, par exemple



un diagramme de la catégorie \mathcal{C} sur (2) (resp.: (3)) sera un diagramme de \mathcal{C} sur le schéma (1), vérifiant les conditions suivantes:

- (4) le diagramme est commutatif (resp.: cartésien),
- (5) les morphismes « horizontaux » sont monomorphismes de \mathcal{C} ,
- (6) les morphismes « verticaux » sont épimorphismes de \mathcal{C} .

4.23. Etant donné un schéma carré renforcé, on définit de façon évidente un type carré généralisé Q . Si toutes les conditions (monomorphisme, commutativité, etc.) qui « renforcent » le schéma donné sont naturelles (préservées par équivalences de catégories), Q est naturel (4.19).

4.24. On peut évidemment considérer des conditions définies uniquement pour certaines catégories, par exemple l'exactitude du carré dans une catégorie abélienne [16], ou plus en général dans une catégorie exacte [5, p. 41]. Le type Q associé ne sera alors défini que sur les catégories en question.

5. Symétrisations et dualité.

I. La catégorie opposée.

5.1. Soit C^* la *catégorie opposée* de C : les objets sont les mêmes, et

$$(1) \quad C^*(A, B) := C(B, A),$$

la composition $*$ en C^* étant, par rapport à la composition \circ de C :

$$(2) \quad u * v = v \circ u.$$

Evidemment $C^{**} = C$.

5.2. On a de façon évidente un anti-isomorphisme de catégories:

$$(1) \quad i_C: C \rightarrow C^*$$

et

$$(2) \quad i_{C^*} = (i_C)^{-1}: C^* \rightarrow C.$$

5.3. Si $f: C \rightarrow D$ est un foncteur (covariant ou contravariant) on a le *foncteur opposé* (de même variance)

$$(1) \quad f^* = i_D \circ f \circ i_C: C^* \rightarrow D^*,$$

et:

$$(2) \quad (1_{\mathcal{C}})^* = 1_{\mathcal{C}^*},$$

$$(3) \quad (g \circ f)^* = g^* \circ f^*.$$

5.4. Si $\varphi: f \rightarrow g$ est un morphisme fonctoriel, on a le *morphisme opposé* $\varphi^*: g^* \rightarrow f^*$:

$$(1) \quad \varphi_A^* = i_{\mathcal{D}}(\varphi_A): gA \rightarrow fA \quad (A \text{ objet de } \mathcal{C}),$$

et:

$$(2) \quad (1_f)^* = 1_{f^*},$$

$$(3) \quad (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

5.5. Si (\mathcal{K}, j) est une catégorie involutive, (\mathcal{K}^*, j^*) est encore une catégorie involutive, qu'on notera souvent \mathcal{K}^* par abus de langage; le foncteur (covariant):

$$(1) \quad \iota_{\mathcal{K}} = i_{\mathcal{K}} \circ j = j^* \circ i_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^*,$$

est un isomorphisme de catégories involutives, et:

$$(2) \quad (\iota_{\mathcal{K}})^{-1} = \iota_{\mathcal{K}^*}.$$

5.6. Si $h: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ est un \sim -foncteur, $h^*: \mathcal{K}_1^* \rightarrow \mathcal{K}_2^*$ l'est aussi.

II. Symétrisations opposées.

5.7. Soit la symétrisation

$$(1) \quad s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K},$$

et j l'involution de \mathcal{K} ; considérons les foncteurs (covariants):

$$(1^{\sim}) \quad s^{\sim}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}^* \quad s^{\sim} = \iota_{\mathcal{K}} \circ s,$$

$$(1^{\circ}) \quad s^{\circ}: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K} \quad s^{\circ} = j \circ s \circ i_{\mathcal{C}^*},$$

$$(1^*) \quad s^*: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K}^* \quad s^* = i_{\mathcal{K}} \circ s \circ i_{\mathcal{C}^*}.$$

5.8. On a alors

- (1) $s = s^{\sim\sim} = s^{o\circ} = s^{**},$
- (2) $s^{\sim\circ} = s^{o\sim} = s^*,$
- (3) $s^{\sim*} = s^{*\sim} = s^o,$
- (4) $s^{o*} = s^{*o} = s^{\sim}.$

(Il suffit de vérifier (1) et (2), dont (3) et (4) sont conséquence).

5.9. Par 5.5, s^{\sim} est une symétrisation de \mathcal{C} isomorphe à s ; il est évident que $s^o = j \circ s \circ i_{\mathcal{C}^*} : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K}$ est symétrisation de \mathcal{C}^* ; par conséquent $s^* = s^{o\sim}$ est une symétrisation de \mathcal{C}^* , isomorphe à la précédente.

5.10. Pour toute symétrisation s on a alors la symétrisation \sim -opposée s^{\sim} , la symétrisation o -opposée s^o et la symétrisation $*$ -opposée s^* . Toute proposition concernant une symétrisation s en produit donc trois autres, qu'on dira respectivement proposition \sim -opposée, o -opposée, $*$ -opposée (par rapport à s) de la proposition donnée.

III. Symétrisations duales.

5.11. $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}$ étant une symétrisation, on dira symétrisation *duale* de s toute symétrisation $s' : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K}'$, de la catégorie \mathcal{C}^* , isomorphe à s^o (ou à s^*). En particulier $s^o : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K}$ et $s^* : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$ sont telles.

5.12. Si $s_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}_i$ ($i = 1, 2$) sont symétrisation de \mathcal{C} et s'_i est duale de s_i , alors

- (1) $s_1 < s_2$ entraîne $s'_1 < s'_2,$
- (2) $s_1 \sim s_2$ entraîne $s'_1 \sim s'_2.$

DÉMONSTRATION. Soit $s_1 = h \circ s_2$, h étant un \sim -foncteur, et j_i l'involution dans \mathcal{K}_i ($i = 1, 2$); alors:

$$s_1^o = j_1 \circ s_1 \circ i_{\mathcal{C}^*} = j_1 \circ h \circ s_2 \circ i_{\mathcal{C}^*} = h \circ j_2 \circ s_2 \circ i_{\mathcal{C}^*} = h \circ s_2^o$$

done

$$s'_1 \sim s_1^0 < s_2^0 \sim s'_2.$$

5.13. Il s'ensuit que si s' est duale de s , s aussi est duale de s' . On dira que s et s' sont duales.

5.14. Toute symétrisation duale d'une symétrisation régulière, l'est aussi.

5.15. En conséquence de 5.12 et 5.14, pour toute catégorie \mathcal{C} :

- (1) $s_{\mathcal{C}^M}$ et $s_{\mathcal{C}^*M}$ sont duales,
- (2) $s_{\mathcal{C}^R}$ et $s_{\mathcal{C}^*R}$ sont duales,
- (3) $s_{\mathcal{C}^m}$ et $s_{\mathcal{C}^*m}$ sont duales.

IV. *La congruence opposée.*

5.16. Pour toute catégorie \mathcal{C} on a le \sim -isomorphisme $h_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^M \rightarrow \mathcal{C}^{*M}$ donné par la composition

$$(1) \quad \mathcal{C}^M \xrightarrow{(i_{\mathcal{C}})^M} \mathcal{C}^{*M} \xrightarrow{j} \mathcal{C}^{*M}$$

où j est l'involution.

5.17. Ce \sim -isomorphisme transforme toute \sim -congruence r de \mathcal{C}^M en une \sim -congruence r^* de \mathcal{C}^{*M} , qu'on dira *opposée* à r ; alors:

- (1) $\mathbf{s}(r)$ et $\mathbf{s}(r^*)$ sont duales.

V. *Symétriseurs et dualité.*

5.18. Soit le symétriseur \mathcal{S} ; si les catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}^* sont \mathcal{S} -catégories, on pourra considérer deux symétrisations de \mathcal{C} (généralement non isomorphes):

$$(1) \quad \mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathcal{S}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{S}} \quad (\mathbf{s}_{\mathcal{C}^*\mathcal{S}})^{\circ}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{*\mathcal{S}}.$$

5.19. Dans cette situation, on dira que deux symétrisations s et s' de la catégorie \mathcal{C} sont \mathcal{S} -duales si l'une est isomorphe à $\mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathcal{S}}$ et l'autre à $(\mathbf{s}_{\mathcal{C}^*\mathcal{S}})^{\circ}$; on dira que \mathcal{C} est \mathcal{S} -auto-duale si $\mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathcal{S}} \sim (\mathbf{s}_{\mathcal{C}^*\mathcal{S}})^{\circ}$.

5.20. Les symétriseurs S et S' sont *duals* si:

- (1) les S -catégories coïncident avec les catégories opposées aux S' -catégories,
- (2) pour toute S -catégorie C , \mathfrak{s}_{C_S} et $\mathfrak{s}_{C_{S'}}$ sont duales.

5.21. Un symétriseur S est dit *autodual* s'il est dual de lui-même; ou, de façon équivalente, si toute S -catégorie est S -autoduale.

VI. *Le type carré opposé.*

5.22. Soit $\varrho: \Sigma \rightarrow C$ un diagramme carré commutatif de C ; Σ est la catégorie engendrée par le graphe:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{v'} & B \\ \uparrow u & & \uparrow u' \\ A & \xrightarrow{v} & D \end{array}$$

sous la condition $v'u = u'v$; ϱ est un foncteur.

5.23. Considérons l'endofoncteur contravariant involutif $\iota: \Sigma \rightarrow \Sigma$ (réflexion autour de la diagonale C - D et renversement des flèches):

- (1) $\iota(A) = B \quad \iota(B) = A \quad \iota(C) = C \quad \iota(D) = D,$
- (2) $\iota(u) = v' \quad \iota(v) = u' \quad \iota(v') = u \quad \iota(u') = v,$
- (3) $\iota(v'u) = v'u.$

5.24. On a alors un diagramme carré commutatif de C^* :

$$(1) \quad \varrho' = i_C \circ \varrho \circ \iota: \Sigma \rightarrow C^*,$$

q'on dira *opposé de ϱ* ; évidemment $(\varrho')' = \varrho$.

5.25. Si q est un type carré sur la catégorie C , on peut donc définir le *type opposé* q^* de C^* : les q^* -carrés sont les diagrammes carrés ϱ de C^* tels que ϱ^* est en q . On définit de même l'*opposé* Q^* d'un type carré généralisé Q .

5.26. s étant une symétrisation de \mathcal{C} , q un type carré sur \mathcal{C} :

- (1) $\sigma(q)$ et $\sigma(q^*)$ sont symétrisations duales
 (2) $q(s^*) = (q(s))^*$.

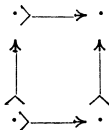
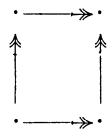
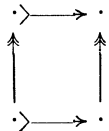
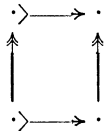
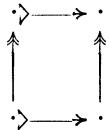
On a des relations analogues pour Σ et Q .

6. Exemples de symétriseurs.

Part des énoncés de ce numéro ne seront pas démontrés, du moins dans cet article; la section I sera développée dans les Parties II et III.

I. Les symétriseurs W , A , O .

6.1. Considérons, pour une catégorie arbitraire \mathcal{C} les diagrammes carrés des genres suivants:

- (1)  *cartésien* (1*)  *cocartésien*
- (2)  *cartésien* (2*)  *cocartésien*
- (3)  *bicartésien.*

6.2. On note Q_1 , Q_{1^*} , Q_2 , Q_{2^*} , Q_3 les types carrés généralisés assignant à chaque catégorie ses diagrammes carrés du genre 6.1.1, 1*, 2, 2*, 3, respectivement. Ces types carrés sont évidemment naturels

(cfr. 4.V); en outre (5.VI):

$$(1) \quad Q_1^* = Q_{1\bullet}, \quad Q_2^* = Q_{2\bullet}, \quad Q_3^* = Q_3,$$

$$(2) \quad Q_3 = Q_2 \cap Q_{2\bullet}^{(12)}.$$

6.3. On considère les symétriseurs naturels (4.20):

$$(1) \quad \mathcal{W} = \Sigma(Q_1 \cup Q_{1\bullet} \cup Q_2),$$

$$(2) \quad \mathcal{M} = \Sigma(Q_1 \cup Q_{1\bullet} \cup Q_{2\bullet}),$$

$$(3) \quad \mathcal{O} = \Sigma(Q_1 \cup Q_{1\bullet} \cup Q_3).$$

En utilisant 5.26 et la décroissance de Σ :

$$(4) \quad \mathcal{W} \text{ et } \mathcal{M} \text{ sont duals,}$$

$$(5) \quad \mathcal{O} \text{ est autodual,}$$

$$(6) \quad \mathcal{W} < \mathcal{O} \text{ et } \mathcal{M} < \mathcal{O}.$$

Pour toute catégorie \mathcal{C} on a donc les symétrisations $\mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathcal{W}}$, $\mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathcal{M}}$ et $\mathbf{s}_{\mathcal{C}\mathcal{O}}$; les deux premières sont \mathcal{W} -duales (5.19), et précèdent la troisième.

6.4. La catégorie \mathcal{E} étant exacte, $Q_{2\mathcal{E}} = Q_{2\bullet\mathcal{E}} = Q_{3\mathcal{E}}$ [5, p. 86], donc:

$$(1) \quad \mathcal{W}_{\mathcal{E}} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}},$$

la symétrisation $\mathbf{s}_{\mathcal{E}\mathcal{O}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{O}}$ qu'on obtient est la symétrisation canonique des catégories exactes; les carrés \mathcal{O} -exacts de \mathcal{E} sont les carrés exacts au sens de Puppe [5, p. 41]; les \mathcal{O} -foncteurs entre catégories exactes sont les foncteurs exacts; les \mathcal{O} -morphisms fonctoriels sont connus en fonction de la connaissance des carrés \mathcal{O} -exacts (3.12).

6.5. Si la catégorie \mathcal{C} vérifie les axiomes A.5.1-5 de Brinkmann [5]⁽¹³⁾ tout carré du genre 6.1.2 est forcément bicartésien; donc $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.

⁽¹²⁾ Les types carrés généralisés définis sur un *ensemble* donné de catégories forment évidemment un lattis (complet).

⁽¹³⁾ En particulier toute catégorie exacte et la catégorie des groupes.

La symétrisation construite par Brinkmann est justement $s_{\mathcal{C}\mathcal{W}} = s_{\mathcal{C}\mathcal{O}}$. Si la catégorie vérifie les axiomes duals on obtient la symétrisation $s_{\mathcal{C}\mathcal{A}} = s_{\mathcal{C}\mathcal{O}}$.

6.6. On peut affaiblir les axiomes de Brinkmann, et obtenir une caractérisation de $s_{\mathcal{C}\mathcal{W}}$ apte à l'étude des *sous-quotients* des objets de \mathcal{C} en tant que quotients de sousobjets (caractérisation qui n'entraîne pas $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$). De telles symétrisations seront appelées *quaternaires* et feront l'objet de la Partie II de cet article; elles sont toujours fidèles, invariantes et régulières.

6.7. De façon duale, les symétrisations *coquaternaires* ($s_{\mathcal{C}\mathcal{A}}$, \mathcal{C} satisfaisant certaines conditions) sont aptes à l'étude des *sous-quotients* en tant que sous-objets de quotients.

6.8. Si une symétrisation s de la catégorie \mathcal{C} est en même temps quaternaire et coquaternaire, alors $s \sim s_{\mathcal{C}\mathcal{W}} \sim s_{\mathcal{C}\mathcal{A}}$; elle est dite *biquaternaire*; les sous-quotients sont alors envisageables dans les deux formes rappelées plus haut; c'est toujours le cas si \mathcal{C} est exacte.

6.9. La catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$ admet symétrisation coquaternaire, et $\mathcal{E}ns^{\mathcal{A}}$ est la catégorie des transducteurs (voir l'introduction).

$\mathcal{E}ns$ n'admet pas de symétrisation quaternaire: sa \mathcal{W} -symétrisation se réduit à la symétrisation minimum, donc n'est pas fidèle.

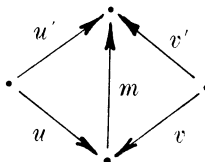
6.10. Au contraire, la catégorie des groupes admet symétrisation quaternaire (celle des *homomorphic relations* [19]), et non coquaternaire.

II. Les symétriseurs \mathcal{V}, \mathcal{A} .

Cet exemple — deux symétriseurs duals non carrés — est basé sur les procédés de symétrisation de Parodi [23-25].

6.11. \mathcal{C} étant une catégorie quelconque, on considère la \sim -congruence $r_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$ engendrée par les conditions suivantes:

a) si, dans le diagramme commutatif de \mathcal{C} :



m est un monomorphisme au sens de Arduini [27], alors :

$$(2) \quad (\tilde{v}u)r_{\mathbb{C}}(\tilde{v}'u') \quad (\text{en } \mathbb{C}^M),$$

b) pour tout carré cocartésien de \mathbb{C} :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{v'} & \cdot \\ \uparrow u & & \uparrow u' \\ & \xrightarrow{v} & \cdot \end{array}$$

on a :

$$(4) \quad (v\tilde{u})r_{\mathbb{C}}(\tilde{u}'v') \quad (\text{en } \mathbb{C}^M).$$

6.12. Soit encore V le symétriseur (naturel) défini sur toute catégorie \mathbb{C} par

$$(1) \quad s_{\mathbb{C}V} = s(r_{\mathbb{C}}).$$

Si la catégorie \mathbb{C} satisfait les axiomes 2.i-iv [24, p. 224], sa V -symétrisation est la symétrisation $\mathbb{C} \rightarrow \check{\mathbb{C}}$ de [24, th. 2.1].

6.13. Cette symétrisation est fidèle et invariante [24, th. 2.2 et 2.4], non nécessairement régulière (6.14). Les carrés V -exacts de \mathbb{C} sont [24, th. 2.8] les carrés V -exacts [23, déf. 1.5]. Les foncteurs V -exacts entre catégories du genre dit sont [25, th. 3.2.I] ceux qui préservent les monomorphismes de Arduini et les carrés V -exacts.

De façon duale on définit le symétriseur A .

6.14. En particulier $\mathcal{E}ns^V$ est la catégorie des transducteurs (involutive régulière), $\mathcal{E}ns^A$ celle des correspondances (non régulière); si \mathbb{C} est abélienne, on retrouve la symétrisation usuelle [24].

6.15. On remarquera que, si \mathbb{C} dénote la catégorie $\mathcal{E}ns$:

- (1) $s_{\mathbb{C}W}$ et $s_{\mathbb{C}A}$ sont W -duales,
- (2) $s_{\mathbb{C}A}$ et $s_{\mathbb{C}V}$ sont V -duales,
- (3) $s_{\mathbb{C}A} \sim s_{\mathbb{C}V}$ (symétrisation des transducteurs),
- (4) $s_{\mathbb{C}W} \sim s_{\mathbb{C}m} \sim s_{\mathbb{C}A}$.

BIBLIOGRAPHIE

I. *Symétrisations* (*).

- [1] H. B. BRINKMANN, *Exact couples and spectral sequences*, Arch. der Math., **18** (1967), pp. 493-507.
- [2] H. B. BRINKMANN, *Relations for groups and for exact categories*, Category theory, homology theory and their applications, II, Battelle Institut Conference, **2** (1968), pp. 1-9; Lecture Notes in Mathematics, **92** (1969).
- [3] H. B. BRINKMANN, *Relations for exact categories*, J. of Alg., **13** (1969), pp. 465-480.
- [4] H. B. BRINKMANN, *Addition von Korrespondenzen in abelschen Kategorien*, Mat. Zeitsch., **113** (1970), 344-352.
- [5] H. B. BRINKMANN - D. PUPPE, *Abelsche und exakte Kategorien, Korrespondenzen*, Lecture Notes in Mathematics, **96** (1969).
- [6] M. S. BURGIN, *Correspondence categories over semiabelian categories*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **189** (1969), pp. 1174-1176, Soviet Math. Dokl., **10** (1969), pp. 1564-1566.
- [7] M. S. BURGIN, *Categories with involution and correspondences in γ -categories*, Trudy Moscow Mat. Obšč., **22** (1970), Trans. Moscow Math. Soc., **22** (1970), pp. 183-257.
- [8] M. S. CALENKO, *Correspondences over a quasi-exact category*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **155** (1964), pp. 292-294, Soviet Math. Dokl., **5** (1964), pp. 416-418.
- [9] M. S. CALENKO, *Correspondences over a quasi-exact category.*, Mat. Sbornik, **73** (NS) (1967), pp. 564-584, Math. USSR Sbornik, **2** (1967), pp. 501-519.
- [10] M. S. CALENKO, (TSALENKO), *Semigrupperi con involuzione e categorie con involuzione*, Symposia Mathematica INDAM Roma, **4** (1968-1969), pp. 493-514, Academic Press, London 1970.
- [11] G. DARBO, *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica INDAM Roma, **4** (1968-1969), pp. 303-336, Academic Press, London 1970.
- [12] B. ECKMANN - P. J. HILTON, *Exact couples in an abelian category*, J. of Alg., **3** (1966), pp. 38-87.
- [13] P. J. FREYD, *Abelian categories*, Harper and Row, New York, 1964.
- [14] I. M. GEL'FAND - V. A. PONOMAREV, *Indecomposable representations of the Lorentz group*, Uspehi. Mat. Nauk, **23** (1968), n. 2, pp. 3-60, Russian Math. Surveys, **23** (1968), n. 2, pp. 1-58.

(*) Cette liste n'est pas « complète ».

- [15] M. GRANDIS, *I subquozienti nelle categorie abeliane*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **43** (1970), pp. 63-97.
- [16] P. HILTON, *Correspondences and exact squares*, Proc. of the Conf. on Categorical Algebra, La Jolla (1965), pp. 255-271, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [17] A. KLEIN, *Relations in categories*, Illinois J. of Math., **14** (1970), pp. 536-550.
- [18] A. KLEIN, *On categories of quotients*, Proc. of the A.M.S., **30** (1971), pp. 205-211.
- [19] J. LAMBEK, *Goursat's theorem and the Zassenhaus Lemma*, Can. J. Math., **10** (1958), pp. 45-56.
- [20] J. LAMBEK, *Goursat's theorem and homological algebra*, Can. Math. Bull., **7** (1964), pp. 597-608.
- [21] S. MAC LANE, *An algebra of additive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **47** (1961), pp. 1043-1051.
- [22] S. MAC LANE, *Homology*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [23] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria, I*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), pp. 185-222.
- [24] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria, II*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), pp. 223-262.
- [25] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria, III*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971), pp. 273-327.
- [26] D. PUPPE, *Korrespondenzen in abelschen Kategorien*, Math. Annalen, **148** (1962), pp. 1-30.

II. Autres sujets.

- [27] P. ARDUINI, *Monomorphisms and epimorphisms in abstract categories*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **42** (1969), pp. 135-166.
- [28] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.
- [29] B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, New York, 1965.
- [30] O. ORE, *Galois connexions*, Transact. of the A.M.S., **55** (1944), pp. 493-513.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 ottobre 1974.