

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERO PLAZZI

Su certe equazioni convolutorie per distribuzioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 54 (1975), p. 257-269

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__257_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su certe equazioni convolutorie per distribuzioni.

PIERO PLAZZI (*)

SUMMARY - In paragraphs 1 and 2 of this paper we define the « convolution product on a linear manifold » of two distributions (in [2], [3] it was defined for functions); the usual convolution turns out to be a special case of the former, but the main properties of the latter operation still hold: thus, we can prove exchange formulas for Fourier and Laplace transformations (theorems 3 and 5). In paragraph 3, the fore-going results are applied to the study of certain convolution-type equations of non-finite order for distributions: the classical results about these equations ([1], [4]) still hold, but now the solution may fail to be unique.

Notazioni.

Se $x, y \in R^p$, $x = (x_1 \dots x_p)$, $y = (y_1 \dots y_p)$ scriveremo $x \geq y$ se $x_j \geq y_j$, $\forall_j = 1 \dots p$ (analogamente sostituendo \geq con $>$); se $M \in R^p$ porremo $I(M) = \{x; x \in R^p, x \geq M\}$; se $A: R^k \xrightarrow{1-1} R^n$ è un operatore lineare iniettivo ($k, n \in N, 1 \leq k \leq n$), e \mathcal{A} è la sua matrice rispetto alle basi canoniche, diremo che A è positivo se i termini a_{ij} ($i=1, \dots, n, j=1 \dots k$) di \mathcal{A} sono tutti non negativi (scriveremo anche $\mathcal{A} \geq 0$); porremo $V = A(R^k)$.

Se α è un p -indice $|\alpha|$ e x^α hanno il significato consueto; D^α vale $\partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, ove le derivazioni s'intendono sempre nel senso delle distribuzioni.

Adotteremo le usuali notazioni per gli spazi di funzioni test e gli spazi di distribuzioni; se T è una distribuzione sullo spazio di funzioni

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico «S. Pincherle» - Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.

Lavoro eseguito mentre l'autore godeva di una borsa di Studio del CNR.

test Φ , indicheremo il suo valore in $\varphi \in \Phi$ con la scrittura $\langle T|\varphi \rangle$ oppure $\langle T_x|\varphi(x) \rangle$; indicheremo con $\mathcal{F}(T)$ la trasformata di Fourier di T (se $\varphi \in \mathcal{L}(R^p)$ intendiamo

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{R^p} \exp[i\langle x, y \rangle] \varphi(y) dy \quad \text{con} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^p x_j y_j.$$

§ 1. DEFINIZIONE 1. Sia A un operatore lineare positivo come quello sopra descritto; se $S \in \mathcal{D}'(R^k)$, $T \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\text{supp } S \subseteq I(M)$, $\text{supp } T \subseteq I(N)$ per costanti $M \in R^k$, $N \in R^n$ opportune (S, T hanno supporto inferiormente limitato) chiameremo convoluzione di S con T secondo la varietà lineare V , e la indicheremo con $S *_V T$, la distribuzione su R^n definita, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, da

$$\langle S *_V T|\varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y | \omega_\varphi(x, y) \varphi(y + Ax) \rangle$$

ove $\omega_\varphi \in \mathcal{D}(R^{k+n})$, $\omega_\varphi(x, y) \in [0, 1]$, $\forall (x, y) \in R^{k+n}$, $\omega_\varphi = 1$ su un intorno di $K_\varphi = \text{supp } \varphi(y + Ax) \cap (I(M) \times I(N))$. La definizione è corretta perchè: (x, y)

- i) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, K_φ è compatto in R^{k+n} e pertanto esiste una funzione ω_φ come quella descritta nella definizione;
- ii) la definizione non dipende dalla scelta di ω_φ ;
- iii) $S *_V T$ è una distribuzione di $\mathcal{D}'(R^n)$.

Notiamo che se $\text{supp } \varphi \cap I(N + AM) = \emptyset$, allora $K_\varphi = \emptyset$; perciò $\text{supp } (S *_V T) \subseteq I(N + AM)$.

TEOREMA 1. Sia A l'operatore già descritto, $S \in \mathcal{D}'(R^k)$; posto, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$,

$$\langle A(S)|\varphi \rangle = \langle S|\varphi \circ A \rangle = \langle S_x|\varphi(Ax) \rangle,$$

risulta:

- i) $A(S) \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\text{supp } A(S) = A(\text{supp } S) \subseteq V$,

$$A(D_x^\alpha S_x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{j1} D_j \right)^{\alpha_1} \dots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} D_j \right)^{\alpha_k} A(S_x) \quad \forall \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$$

k -indice;

- ii) $S \in \mathcal{S}'(R^k) \Rightarrow A(S) \in \mathcal{S}'(R^n)$;
- iii) se A è positivo, $S \in \mathcal{D}'(R^k)$, $\text{supp } S \subseteq I(M)$ per un $M \in R^k$

e $T \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\text{supp } T \subseteq I(N)$ per un $N \in R^n$, risulta

$$S * T = A(S) * T .$$

DIMOSTRAZIONE. i) È immediato che $A(S) \in \mathcal{D}'(R^n)$.

Se ora $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ e $\text{supp } \varphi \cap A(\text{supp } S) = \emptyset$ si ha $\langle A(S)|\varphi \rangle = \langle S_x|\varphi(\mathcal{A}x) \rangle = 0$ perchè $\text{supp}(\varphi \circ A) \cap \text{supp } S = \emptyset$ (se $x_0 \in \text{supp}(\varphi \circ A) \cap \text{supp } S$, $\mathcal{A}x_0 \in \text{supp } \varphi \cap A(\text{supp } S)$, assurdo); perciò $\text{supp } A(S) \subseteq \subseteq A(\text{supp } S)$.

Sia $\psi \in \mathcal{D}(R^k)$; allora $\forall \varepsilon \in R^+$, $\exists \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ tale che $\psi(x) = \varphi(\mathcal{A}x) \forall x \in R^k$ e $\text{supp } \varphi \subset V_\varepsilon(A(\text{supp } \psi))$ (*); ciò premesso, se $y \in A(\text{supp } S)$, $\exists x \in \text{supp } S \subseteq R^k$ tale che $y = \mathcal{A}x$; $\forall W \subseteq R^k$ aperto $x \in W$, $\exists \psi_0 \in \mathcal{D}(R^k)$, $\text{supp } \psi_0 \subset W$ tale che $\langle S|\psi_0 \rangle \neq 0$: se ora $y \in \Omega \subseteq R^n$ aperto, sia W un aperto di R^k tale che $y \in A(W) \subset V_\varepsilon(A(W)) \subset \Omega$; se φ_0 è la funzione già descritta, relativa a ψ_0 , si ha $\text{supp } \varphi_0 \subset \Omega$, $\langle A(S)|\varphi_0 \rangle = \langle S_x|\varphi_0(\mathcal{A}x) \rangle = \langle S|\psi_0 \rangle \neq 0$, cioè $y \in \text{supp } A(S)$: dunque $\text{supp } A(S) = A(\text{supp } S)$.

Infine, sia $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, $\alpha = e_r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, ($r = 1 \dots k$):

$$\begin{aligned} \langle (A(D_x^\alpha S_x))_y|\varphi(y) \rangle &= \langle D_x^\alpha S_x|\varphi(\mathcal{A}x) \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle S_x|D_x^\alpha(\varphi(\mathcal{A}x)) \rangle = - \langle S_x|D_{x_r}(\varphi(\mathcal{A}x)) \rangle = \\ &= - \left\langle S_x \left| \sum_{j=1}^n a_{jr} (D_j \varphi)(\mathcal{A}x) \right. \right\rangle = - \left\langle A(S) \left| \left(\sum_{j=1}^n a_{jr} D_j \right) \varphi \right. \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^n a_{jr} D_j \right) A(S) \right| \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Iterando si ha la tesi.

ii) Se $g \in \mathcal{S}(R^n)$ poniamo $\langle A(S)|g \rangle = \langle S|g \circ A \rangle$; è facile allora verificare che questa posizione estende $A(S)$ su $\mathcal{S}(R^n)$ in una distribuzione temperata.

iii) Osserviamo che se f è continua su R^m , F è continua da R^p a R^m , $K_1 \subset R^m$, $K_2 \subset R^p$ sono compatti, allora

$$f(y) = 1, \quad \forall y \in V_\varepsilon(K_1), \quad F(K_2) \subseteq K_1 \Rightarrow (f \circ F)(x) = 1, \quad \forall x \in V_\eta(K_2)$$

per un opportuno $\eta > 0$.

(*) Se $\varepsilon > 0$, $A \subseteq R^n$, denotiamo con $V_\varepsilon(A)$ l'intorno di raggio ε di A : $V_\varepsilon(A) = \{x; x \in R^n, \exists y \in A \text{ tale che } \|y - x\| < \varepsilon\}$.

Ciò premesso, siano $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, $\Omega_\varphi \in \mathfrak{D}(R^{2n})$ tale che $\Omega_\varphi = 1$ su

$$V_\varepsilon \left(\supp_{(t,y)} \varphi(t+y) \cap (I(\mathcal{A}M) \times I(N)) \right) = V_\varepsilon(K_1):$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(S) * T | \varphi \rangle &= \langle (\mathcal{A}(S_x))_t \otimes T_y | \Omega_\varphi(t, y) \varphi(t+y) \rangle = \\ &= \langle S_x \otimes T_y | \Omega_\varphi(\mathcal{A}x, y) \varphi(y + \mathcal{A}x) \rangle. \end{aligned}$$

Si ponga $\Omega_\varphi(\mathcal{A}x, y) = \omega_\varphi(x, y)$; è $\omega_\varphi \in \mathfrak{D}(R^{k+n})$ e, posto $\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{J} \end{bmatrix}$ (\mathfrak{J} è la matrice identica $n \times n$) è $\omega_\varphi = \Omega_\varphi \circ \tilde{\mathcal{A}}$ avendo indicato ancora con $\tilde{\mathcal{A}}$ l'operatore (lineare iniettivo) da R^{k+n} a R^{n+n} associato alla matrice $\tilde{\mathcal{A}}$ nelle basi canoniche.

Posto $K_2 = \supp_{(x,y)} \varphi(y + \mathcal{A}x) \cap (I(M) \times I(N)) \subset R^{k+n}$ si ha $\tilde{\mathcal{A}}K_2 \subseteq K_1$: per l'osservazione premessa segue $\omega_\varphi = 1$ su $V_\eta(K_2)$ per $\eta > 0$ opportuno: allora dalla definizione 1 segue $\langle S_x \otimes T_y | \Omega_\varphi(\mathcal{A}x, y) \varphi(y + \mathcal{A}x) \rangle = \langle S_* T | \varphi \rangle$ e perciò $\mathcal{A}(S) * T = S_* T$.

OSSERVAZIONI. 1) iii) offre una definizione alternativa di convoluzione secondo un varietà lineare; di più, ne segue la possibilità di definire $S_* T$ anche nella ipotesi che \mathcal{A} sia un operatore lineare iniettivo generico ed S (oppure T) sia a supporto compatto.

2) Se $k = n$ e $S_{\mathcal{A}x}$ è definita da $\langle S_{\mathcal{A}x} | \varphi(x) \rangle = |\det \mathcal{A}|^{-1} \langle S | \varphi \circ \mathcal{A}^{-1} \rangle$ $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, si ha $(\mathcal{A}(S_x))_y = |\det \mathcal{A}|^{-1} S_{\mathcal{A}^{-1}y}$; se \mathcal{A} è l'identità di R^n , $S_* T = S * T$.

TEOREMA 2. Siano $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, $S \in \mathfrak{D}'(R^k)$, $\supp S \subseteq I(M)$ per $M \in R^k$ opportuno, $T \in \mathfrak{D}'(R^n)$, $\supp T \subseteq I(N)$ per un $N \in R^n$, \mathcal{A}, \mathcal{V} abbiano il significato esposto nella definizione 1; allora risulta:

- i) $(D_x^\alpha S_x)_* T = \left(\sum_{j=1}^n a_{j1} D_j \right)^{\alpha_1} \dots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} D_j \right)^{\alpha_k} (S_* T)$, $\forall k$ -indice $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$;
- ii) $S_* (D_y^\beta T_y) = D^\beta (S_* T)$, $\forall n$ -indice $\beta = (\beta_1 \dots \beta_n)$;
- iii) $S \in \mathfrak{S}'(R^k)$, $T \in \mathfrak{S}'(R^n) \Rightarrow S_* T \in \mathfrak{S}'(R^n)$.

La dimostrazione è immediata: i)-iii) seguono dalle proprietà della convoluzione ordinaria e dal teorema 1.

OSSERVAZIONE. Analoghi risultati valgono se S (oppure T) è a supporto compatto e \mathcal{A} è un operatore lineare iniettivo generico.

TEOREMA 3. Λ, \mathcal{A}, V abbiano il significato convenuto all'inizio del paragrafo, \mathcal{F} sia l'operatore di Fourier;

- i) $S \in \mathcal{E}'(R^k), T \in \mathcal{S}'(R^n) \Rightarrow \mathcal{F}(S *_{\check{V}} T) = \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y) \cdot \mathcal{F}(T)$;
- ii) $S \in \mathcal{S}'(R^k), T \in \mathcal{E}'(R^n) \Rightarrow \mathcal{F}(S *_{\check{V}} T) = \mathcal{F}(T)(y) \cdot \mathcal{F}(\Lambda(S))$.

DIMOSTRAZIONE. I simboli scritti hanno senso perchè nelle ipotesi i) e ii) $S *_{\check{V}} T$ è temperata e $\mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y), \mathcal{F}(T)(y)$ sono funzioni di $C^\infty(R^n, \mathbf{C})$, moltiplicatori per $\mathcal{S}'(R^n)$. Dalla definizione segue

$$\mathcal{F}(S *_{\check{V}} T) = \mathcal{F}(\Lambda(S) * T) = \begin{cases} \mathcal{F}(\Lambda(S))(y) \cdot \mathcal{F}(T) & \text{se } S \in \mathcal{E}'(R^k) \\ \mathcal{F}(T)(y) \cdot \mathcal{F}(\Lambda(S)) & \text{se } T \in \mathcal{E}'(R^n) \end{cases}$$

Basterà ormai provare che se $S \in \mathcal{E}'(R^k), \mathcal{F}(\Lambda(S))(y) = \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y), \forall y \in R^n$. È $S = \sum_{|\alpha| \leq p} D^\alpha f_\alpha$ per un $p \in N$ (α k -indice) e certe $f_\alpha \in C(R^k, \mathbf{C}), \text{supp } f_\alpha \subseteq K \subset R^k, K$ compatto; la derivazione è nel senso delle distribuzioni. Allora, $\forall g \in \mathcal{S}(R^n)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\Lambda(S)) | g \rangle &= \langle (\Lambda(S_x))_{\check{V}} | \mathcal{F}(g)(y) \rangle = \\ &= \langle S_x | \mathcal{F}(g)(\mathcal{A}x) \rangle = \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) D_x^\alpha \mathcal{F}(g)(\mathcal{A}x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{j1} D_j \right)^{\alpha_1} \dots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} D_j \right)^{\alpha_k} \mathcal{F}(g) \right] (\mathcal{A}x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \mathcal{F} \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{j1} i y_j \right)^{\alpha_1} \dots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} i y_j \right)^{\alpha_k} g(y) \right) (\mathcal{A}x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \mathcal{F}((i \mathcal{A}^T y)^\alpha g(y))(\mathcal{A}x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \left(\int_{R^n} \exp[i \langle \mathcal{A}x, y \rangle] (i \mathcal{A}^T y)^\alpha g(y) dy \right) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \left(\int_{R^n} \exp[i \langle x, \mathcal{A}^T y \rangle] (i \mathcal{A}^T y)^\alpha g(y) dy \right) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{R^n} g(y) (-i \mathcal{A}^T y)^\alpha \left(\int_K f_\alpha(x) \exp[i \langle x, \mathcal{A}^T y \rangle] dx \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{R^n} g(y) (-i \mathcal{A}^x y)^\alpha \mathcal{F}(f_\alpha)(\mathcal{A}^x y) dy = \\
&= \int_{R^n} g(y) \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^x y) dy = \langle \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^x y) | g(y) \rangle.
\end{aligned}$$

Poichè $y \rightarrow \mathcal{F}(\Lambda(S))(y)$, $y \rightarrow \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^x y)$ sono continue, dall'uguaglianza come distribuzioni temperate segue la uguaglianza puntuale.

TEOREMA 4. Siano $S \in \mathcal{D}'(R^k)$, $T \in \mathcal{E}'(R^n)$; Λ, \mathcal{A}, V abbiano il solito significato. Se $\Gamma: R^n \xrightarrow{1-1} R^n$ è un operatore lineare invertibile di matrice \mathcal{B} e $\tilde{\Lambda} = \Gamma^{-1} \circ \Lambda$ ha matrice $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}$, posto $\tilde{\Lambda}(R^k) = \tilde{V}$ si ha

$$(S_x *_v T_t)_{\mathcal{B}v} = (S_x *_v (T_{\mathcal{B}t}))_v$$

DIMOSTRAZIONE. I simboli scritti hanno senso: infatti $\tilde{\Lambda}$ è 1-1 e $\text{supp}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}^{-1} \text{supp } T$ è compatto.

Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$:

$$\begin{aligned}
\langle (S_x *_v T)_{\mathcal{B}v} | \varphi(u) \rangle &= |\det \mathcal{B}|^{-1} \langle S_x *_v T | \varphi \circ \Gamma^{-1} \rangle = \\
&= |\det \mathcal{B}|^{-1} \langle \Lambda(S) * T | \varphi \circ \Gamma^{-1} \rangle = \\
&= |\det \mathcal{B}|^{-1} \langle (\Lambda(S_x))_t \otimes T_z | (\varphi \circ \Gamma^{-1})(t+z) \omega(t, z) \rangle,
\end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned}
\omega &\in \mathcal{D}(R^n \times R^n), \quad \omega(t, z) = 1, \quad \forall (t, z) \in V_\varepsilon(K_1) = \\
&= V_\varepsilon(\text{supp}_{(t,z)}(\varphi \circ \Gamma^{-1})(t+z) \cap [\Lambda(\text{supp } S) \times \text{supp } T]): K_1 \subset R^n \times R^n
\end{aligned}$$

è evidentemente compatto. Perciò

$$\begin{aligned}
\langle (S_x *_v T)_{\mathcal{B}v} | \varphi(u) \rangle &= |\det \mathcal{B}|^{-1} \langle S_x \otimes T_z | (\varphi \circ \Gamma^{-1})(\mathcal{A}x+z) \cdot \omega(\mathcal{A}x, z) \rangle = \\
&= \langle S_x | |\det \mathcal{B}|^{-1} \langle T_z | \varphi(\tilde{\mathcal{A}}x + \mathcal{B}^{-1}z) \omega(\mathcal{A}x, \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}z) \rangle \rangle = \\
&= \langle S_x | \langle T_{\mathcal{B}v} | \varphi(\tilde{\mathcal{A}}x + y) \omega(\mathcal{A}x, \mathcal{B}y) \rangle \rangle = \\
&= \langle T_{\mathcal{B}v} | \langle S_x | \varphi(\tilde{\mathcal{A}}x + y) \omega(\mathcal{B}\tilde{\mathcal{A}}x, \mathcal{B}y) \rangle \rangle = \\
&= \langle T_{\mathcal{B}v} | \langle (\tilde{\Lambda}(S_x))_t | \varphi(t+y) \omega(\mathcal{B}t, \mathcal{B}y) \rangle \rangle.
\end{aligned}$$

Posto $\tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{bmatrix}$, l'operatore associato a $\tilde{\mathcal{B}}$ risulta lineare e in-

vertibile su $R^n \times R^n$; poichè

$$K_2 = \supp_{(t,y)} \varphi(t+y) \cap [\tilde{A}(\supp S) \times \mathcal{B}^{-1} \supp T]$$

è un compatto tale che $\tilde{\mathcal{B}}K_2 \subseteq K_1$, per l'osservazione premessa alla dimostrazione di i)-iii) segue $\omega(\tilde{\mathcal{B}}(t,y)) = \omega(\mathcal{B}t, \mathcal{B}y) = 1, \forall (t,y) \in V_\eta(K_2)$ ($\eta > 0$ opportuno). Perciò l'ultima espressione scritta vale $\langle S \underset{\tilde{\nu}}{*} T_{\mathcal{B}} | \varphi \rangle$, e il teorema è provato.

§ 2. A, \mathcal{A}, V abbiano il significato già convenuto; d'ora in poi si supporrà $\mathcal{A} \geq 0$. Se $T \in \mathcal{D}'(R^n)$ è trasformabile secondo Laplace (L -trasformabile) sulla striscia (o tubo) di $\mathbf{C}^n: a < \text{Re } s < b, (a, b \in R^n)$, si denota con $L(T)(s)$ il valore in s della sua trasformata di Laplace (nel senso di Schwartz).

DEFINIZIONE 2. Si pone

$$\mathcal{L}'_+(R^n) = \{T; T \in \mathcal{D}'(R^n), \exists M, c \in R^n \text{ tali che} \\ \supp T \subseteq I(M), \exp[-\langle c, x \rangle] T_x \in \mathcal{S}'(R^n)\}.$$

$\mathcal{L}'_+(R^n)$ è uno spazio vettoriale complesso, sottospazio di $\mathcal{D}'(R^n)$; $\forall c_1 \in R^n$ tale che $c_1 \geq c$ si ha $\exp[-\langle c_1, x \rangle] T_x \in \mathcal{S}'(R^n)$; ancora, se $T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, T è L -trasformabile per $\text{Re } s > c$ e

$$(*) \quad L(T)(s) = \langle \exp[-\langle c, x \rangle] T_x | \omega(x) \exp[-\langle s - c, x \rangle] \rangle$$

ove, se $\mu = \min_{1 \leq j \leq n} M_j$, è $\omega(x) = \prod_{j=1}^n \hat{\omega}(x_j), \forall x \in R^n$ con $\hat{\omega} \in \mathcal{C}^\infty(R, [0, 1])$, $\hat{\omega}(y) = 1$ se $y \geq \mu - 1, \hat{\omega}(y) = 0$ se $y \leq \mu - 2$; si può verificare che il secondo membro di (*) ha senso perchè $x \rightarrow \omega(x) \exp[-\langle s - c, x \rangle] = \prod_{j=1}^n \omega(x_j) \exp[-(s_j - c_j)x_j]$ è a decrescenza rapida per $\text{Re } s > c$.

OSSERVAZIONE. $\mathcal{L}'_+(R^n)$ è chiuso per convoluzione su varietà, cioè $S \in \mathcal{L}'_+(R^k), T \in \mathcal{L}'_+(R^n) \Rightarrow S \underset{\nu}{*} T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$. È immediato che $S, T \in \mathcal{L}'_+(R^n) \Rightarrow S * T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$: basterà allora provare $S \in \mathcal{L}'_+(R^k) \Rightarrow \mathcal{A}(S) \in \mathcal{L}'_+(R^n)$. Intanto, per la positività di \mathcal{A} , $\supp \mathcal{A}(S)$ è inferiormente limitato; sia poi $c \in R^k$ tale che $\exp[-\langle c, x \rangle] S_x \in \mathcal{S}'(R^k)$; se $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$

e $h \in R^n$ risulta

$$\begin{aligned} \langle \exp[-\langle h, t \rangle](\Lambda(S_x))_i | \varphi(t) \rangle &= \langle S_x | \varphi(\mathcal{A}x) \exp[-\langle h, \mathcal{A}x \rangle] \rangle = \\ &= \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x | \varphi(\mathcal{A}x) \rangle = \langle (\Lambda(\exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x))_i | \varphi(t) \rangle : \end{aligned}$$

perciò se h è tale che $\mathcal{A}^T h > c$, $\exp[-\langle h, t \rangle](\Lambda(S))_i$ è temperata; ciò prova che $\Lambda(S) \in \mathcal{L}'_+(R^n)$: essa è inoltre L -trasformabile per $\operatorname{Re} s > h$ (purchè $\mathcal{A}^T h > c$).

TEOREMA 5. Λ, \mathcal{A}, V abbiano il significato solito, $S \in \mathcal{L}'_+(R^k)$, $T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$; siano $c \in R^k$, $c_1 \in R^n$ tali che $\exp[-\langle c, x \rangle] S_x \in \mathcal{S}'(R^k)$, $\exp[-\langle c_1, y \rangle] T_y \in \mathcal{S}'(R^n)$. Se $h \in R^n$ è tale che $h > c_1$, $\mathcal{A}^T h > c$ risulta

$$L(S * T)(s) = L(S)(\mathcal{A}^T s) L(T)(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Re} s > h.$$

DIMOSTRAZIONE. Basterà provare che per $\operatorname{Re} s > h$ è $L(\Lambda(S))(s) = L(S)(\mathcal{A}^T s)$. Infatti per $\operatorname{Re} s > h$

$$L(\Lambda(S))(s) = \langle \exp[-\langle h, t \rangle](\Lambda(S_x))_i | \omega(t) \exp[-\langle s - h, t \rangle] \rangle,$$

ove

$$\omega(t) = \prod_{j=1}^n \hat{\omega}(t_j), \quad \omega \in C^\infty(R, [0, 1]), \quad \hat{\omega}(y) = 1, \quad \forall y,$$

$$y \geq \min_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^k a_{ji} M_i \right) - 1, \quad \hat{\omega}(y) = 0, \quad \forall y, \quad y \leq \min_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^k a_{ji} M_i \right) - 2:$$

$$\begin{aligned} L(\Lambda(S))(s) &= \langle (\Lambda(\exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x))_i | \omega(t) \exp[-\langle s - h, t \rangle] \rangle = \\ &= \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x | \omega(\mathcal{A}x) \exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x \rangle] \rangle, \end{aligned}$$

ove $\operatorname{Re}(\mathcal{A}^T s) = \mathcal{A}^T \operatorname{Re} s > \mathcal{A}^T h$.

Sia

$$\Omega(x) = \prod_{j=1}^k \hat{\Omega}(x_j), \quad \hat{\Omega} \in C^\infty(R, [0, 1]), \quad \hat{\Omega}(y) = 1, \quad \forall y,$$

$$y \geq \min_{1 \leq j \leq k} M_j - 1, \quad \hat{\Omega}(y) = 0, \quad \forall y, \quad y \leq \min_{1 \leq j \leq k} M_j - 2;$$

su un aperto W di R^k contenente $\operatorname{supp} S$ le due funzioni a decrescenza

rapida (cfr. la dimostrazione del teorema 1, ii))

$$x \rightarrow \omega(\mathcal{A}x) \exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x \rangle], \quad x \rightarrow \Omega(x) \exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x \rangle]$$

coincidono; perciò

$$\begin{aligned} \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x | \omega(\mathcal{A}x) \exp[-\langle \mathcal{A}^T(s-h), x \rangle] \rangle = \\ = \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x | \Omega(x) \exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x \rangle] \rangle \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} L(A(S))(s) = \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x \rangle] S_x | \Omega(x) \exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x \rangle] \rangle = \\ = L(S)(\mathcal{A}^T s). \end{aligned}$$

§ 3. Se F è una distribuzione porremo $F^{*r} = F \underset{1}{*} \dots \underset{r}{*} F$ se $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$; $F^{*1} = F$, $F^{*0} = \delta$ (purchè i simboli abbiano senso); se $F = (F_1 \dots F_m) \in (\mathcal{D}'(R^p))^m$ denoteremo con $F^{*\alpha}$ l'espressione $F^{*\alpha_1} \underset{1}{*} \dots \underset{m}{*} F^{*\alpha_m}$.

Ciò premesso, siano dati degli operatori lineari iniettivi $\Lambda_j: R^{k_j} \xrightarrow{1-1} R^n$ ($1 \leq k_j \leq n, j = 1 \dots m$) di matrici $\mathcal{A}^{(j)} \geq 0$ (il generico termine di $\mathcal{A}^{(j)}$ si denoterà con $a_{sr}^{(j)}$); poniamo $V_j = \Lambda_j(R^{k_j})$ e $V = (V_1 \dots V_m)$; se il simbolo ha senso, scriveremo $X^{*\alpha} \underset{v}{*} Y^{*\beta}$ per $X_1^{*\alpha_1} \underset{v_1}{*} (X_2^{*\alpha_2} \underset{v_2}{*} \dots \underset{v_m}{*} (X_m^{*\alpha_m} \underset{v_m}{*} Y^{*\beta})) \dots$,) ove $X = (X_1 \dots X_m)$ e $Y = (Y_1 \dots Y_p)$ sono una m -upla ed una p -upla di distribuzioni, α un m -indice, β un p -indice. Infine sia $\varphi(z, w) = \varphi(z_1 \dots z_m; w_1 \dots w_p) = \sum_{(\alpha, \beta)} a_{(\alpha, \beta)} z^\alpha w^\beta$ una funzione intera su \mathbf{C}^{m+p} : questi simboli manterranno lo stesso significato per tutto il paragrafo.

TEOREMA 6. Siano $T_j \in \mathcal{L}'_+(R^{k_j})$, $X_l \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, ($j = 1 \dots m, l = 1 \dots p$) con $\text{supp } T_j, \text{supp } X_l \subseteq I(0)$, $\forall j, \forall l$, $\exp[-\langle c^{(j)}, x \rangle] T_j \in \mathcal{S}'(R^{k_j}) \exp[-\langle c, x \rangle] X_l \in \mathcal{S}'(R^n)$ per opportuni $c^{(j)} \in R^{k_j}, c \in R^n$; sia $h \in R^n$ tale che $h > c$, $(\mathcal{A}^{(j)})^T h > c^{(j)}, \forall j = 1 \dots m$.

Se $\exists K_j, K'_l$ costanti positive tali che

$$\begin{aligned} a) |L(T_j)(w^{(j)})| < K_j, \quad \forall w^{(j)} \in \mathbf{C}^{k_j}, \text{Re } w^{(j)} > c^{(j)}; \\ b) |L(X_l)(w)| < K'_l, \quad \forall w \in \mathbf{C}^n, \text{Re } w > c, \end{aligned}$$

e ciò $\forall j = 1 \dots m, \forall l = 1 \dots p$, risulta:

i) la serie $\sum_{(\alpha, \beta)} a_{(\alpha, \beta)} T^{*\alpha} \underset{v}{*} X^{*\beta}$ converge in $\mathcal{D}'(R^n)$ ad una distribuzione $S \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, $\text{supp } S \subseteq I(0)$;

ii) se $s \in \mathbf{C}^n, \text{Re } s > h$ si ha

$$L(S)(s) = \varphi(L(T_1)((\mathcal{A}^{(1)})^T s), \dots, L(T_m)((\mathcal{A}^{(m)})^T s); L(X_1)(s) \dots L(X_p)(s)).$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, $T^{*\alpha} * X^{*\beta} \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, $\text{supp}(T^{*\alpha} * X^{*\beta}) \subseteq \subseteq I(0)$, $\forall \alpha$ m -indice, $\forall \beta$ p -indice; poi, se $s \in \mathbf{C}^n$ e $\text{Re } s > h$, $L(T^{*\alpha} * X^{*\beta})(s)$ è definito e si ha (dal teorema 5)

$$L(T^{*\alpha} * X^{*\beta})(s) = \prod_{j=1}^m \left(L(T_j)((\mathcal{A}^{(j)})^T s) \right)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^p \left(L(X_l)(s) \right)^{\beta_l}.$$

Si consideri la serie in $\mathcal{S}'(R^n)$

$$(1) \quad \exp[-\langle \sigma, x \rangle] \sum_{(\alpha, \beta)} a_{(\alpha, \beta)} T^{*\alpha} * X^{*\beta}, \quad \sigma \geq h:$$

ogni sua ridotta è una distribuzione temperata; si ha

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{S}(R^n): \quad & \langle \exp[-\langle \sigma, x \rangle] T^{*\alpha} * X^{*\beta} | g \rangle = \\ & = \langle \mathcal{F}_x(\exp[-\langle \sigma, x \rangle] T^{*\alpha} * X^{*\beta})_\tau | (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(g)(-\tau) \rangle = \\ & = \langle L(T^{*\alpha} * X^{*\beta})(\sigma + i\tau) | (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(g)(\tau) \rangle = \\ & = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \prod_{j=1}^m \left(L(T_j)((\mathcal{A}^{(j)})^T(\sigma + i\tau)) \right)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^p \left(L(X_l)(\sigma + i\tau) \right)^{\beta_l} \mathcal{K}(\tau) d\tau = \\ & = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \prod_{j=1}^m \left(L(T_j)((\mathcal{A}^{(j)})^T \sigma + i(\mathcal{A}^{(j)})^T \tau) \right)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^p \left(L(X_l)(\sigma + i\tau) \right)^{\beta_l} \mathcal{K}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

avendo posto $\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{F}(g)(\tau)$, perchè, come è noto

$$L(T)(\sigma - i\tau) = \mathcal{F}_x(\exp[-\langle \sigma, x \rangle] T_x)_\tau \quad \text{e} \quad S = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(\mathcal{F}(S))_{-\tau}$$

se T è L -trasformabile, S è temperata.

Perciò sussiste la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} | \langle \exp[-\langle \sigma, x \rangle] T^{*\alpha} * X^{*\beta} | g \rangle | & \leq \\ & \leq (2\pi)^{-n} K_1^{\alpha_1} \dots K_m^{\alpha_m} (K'_1)^{\beta_1} \dots (K'_p)^{\beta_p} \int_{R^n} |\mathcal{K}(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

e dunque $\sum_{(\alpha, \beta)} a_{(\alpha, \beta)} \langle \exp[-\langle \sigma, x \rangle] T^{*\alpha} * X^{*\beta} | g \rangle$ converge (assolutamente) in \mathbf{C} , $\forall g \in \mathcal{S}(R^n)$; segue che (1) converge in $\mathcal{S}'(R^n)$ ad una distribu-

zione temperata S_0 ; perciò $\sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} T^{*\alpha} * X^{*\beta}$ converge in $\mathcal{D}'(R^n)$ a $\exp[\langle \sigma, x \rangle] S_0 = S$; è immediato che $S \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, $\text{supp } S \subseteq I(0)$.

Infine, se $\text{Re } s > h$ si ha, posto $s = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in R^n$)

$$\begin{aligned} L(S)(s) &= \mathcal{F}_x(\exp[-\langle \sigma, x \rangle] S_x)_{-\tau} = \\ &= \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_x(\exp[-\langle \sigma, x \rangle] (T^{*\alpha} * X^{*\beta}))_{-\tau} = \\ &= \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} L(T^{*\alpha} * X^{*\beta})(\sigma + i\tau) = \\ &= \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} \prod_{j=1}^m (L(T_j)((\mathcal{A}^{(j)})^T s))^{z_j} \cdot \prod_{l=1}^p (L(X_l)(s))^{\beta_l} = \\ &= \varphi(L(T_1)((\mathcal{A}^{(1)})^T s), \dots, L(T_m)((\mathcal{A}^{(m)})^T s); L(X_1)(s) \dots L(X_p)(s)). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI 1. Ipotesi del tipo di *a*) e *b*), non necessarie nel caso classico di funzioni ([4]), non si possono troppo attenuare: si considerino $\delta' \in \mathcal{L}'_+(R)$ e $\varphi(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$; è $L(\delta')(\sigma + i\tau) = \sigma + i\tau$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (\delta')^{*n}/n! = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}/n!$ non converge in $\mathcal{D}'(R)$; infatti se $g(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^j \omega(x)$ con $\omega \in \mathcal{D}(R)$, $\omega(x) = 1, \forall x, |x| \leq \frac{1}{2}$, $\omega(x) = 0, \forall x, |x| \geq \frac{3}{4}$, si ha $g \in \mathcal{D}(R)$, $g^{(k)}(0) = k!, k=0,1 \dots$ e le ridotte $\sum_{r=0}^m 1/r! \langle \delta^{(r)} | g \rangle = \sum_{r=0}^m (-1)^r/r! \cdot g^{(r)}(0) = \sum_{r=0}^m (-1)^r$ oscillano.

2) Un teorema analogo vale nell'ipotesi che φ sia olomorfa sul polidisco di $\mathbf{C}^{m+p} \prod_{j=1}^m S(0, R_j) \times \prod_{l=1}^p S(0, R'_l)$ (*) purchè sia $R_j > K_j, R'_l > K'_l, \forall j = 1 \dots m, \forall l = 1 \dots p$.

TEOREMA 7. $V, A_j, \mathcal{A}^{(j)}$ abbiano il significato già esposto; inoltre sia data $\varphi(z, w, u) = \varphi(z_1 \dots z_m; w_1 \dots w_p; u) = \sum_{(\alpha,\beta,r)} a_{(\alpha,\beta,r)} z^\alpha w^\beta u^r$ intera su \mathbf{C}^{m+p+1} (α *m*-indice, β *p*-indice, $r \in N \cup \{0\}$); siano $S_j \in \mathcal{L}'_+(R^{k_j}), T_l \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, $\text{supp } S_j, \text{supp } T_l \subseteq I(0)$ ($j = 1 \dots m, l = 1 \dots p$).

Si abbia l'equazione

$$(2) \quad \sum_{(\alpha,\beta,r)} a_{(\alpha,\beta,r)} (S^{*\alpha} * T^{*\beta}) * X^{*r} = 0:$$

(*) Si pone per $z \in \mathbf{C}, \varrho > 0, S(z, \varrho) = \{w; w \in \mathbf{C}, |z - w| < \varrho\}$.

si dice soluzione di (2) una $X \in \mathcal{L}'_+(R^n)$ (sicchè abbiano senso le convoluzioni scritte) che soddisfi (2) e tale che L commuti con Σ' . Allora, se

i) l'equazione $\varphi(z, w, u) = 0$ ha le soluzioni locali $u = \psi(z, w) = \sum_{(\alpha, \beta)} b_{(\alpha, \beta)} z^\alpha w^\beta$ olomorfe per $|z_j| < R_j$, $|w_l| < R'_l$, ($j = 1 \dots m$, $l = 1 \dots p$);

$$\text{ii)} \quad \begin{aligned} |L(S_j)(w^{(j)})| &< K_j && \text{per } \operatorname{Re} w^{(j)} > c^{(j)} \\ |L(T_l)(s)| &< K'_l && \text{per } \operatorname{Re} s > c \end{aligned}$$

con $K_j < R_j$, $K'_l < R'_l$, $\forall j = 1 \dots m$, $\forall l = 1 \dots p$, le distribuzioni del tipo

$$(3) \quad X = \sum_{(\alpha, \beta)} b_{(\alpha, \beta)} S^{*\alpha} *_{\vee} T^{*\beta}$$

sono tutte e sole le soluzioni di (2).

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, per l'osservazione 2 al teorema precedente, la serie (3) converge a un $X \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, $\operatorname{supp} X \subseteq I(0)$ e inoltre per $\operatorname{Re} s > h$ opportuno

$$\begin{aligned} L(X)(s) &= \sum_{(\alpha, \beta)} b_{(\alpha, \beta)} \prod_{j=1}^m \left(L(S_j)((\mathcal{A}^{(j)})^T s) \right)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^p \left(L(T_l)(s) \right)^{\beta_l} = \\ &= \varphi \left(L(S_1)((\mathcal{A}^{(1)})^T s), \dots; L(T_1)(s), \dots, L(T_p)(s) \right). \end{aligned}$$

Dunque $|L(X)(s)| < K''$ per $\operatorname{Re} s > h$ e perciò (2) converge se X è del tipo (3); di più per $\operatorname{Re} s > h'$ opportuno

$$\begin{aligned} L \left(\sum_{(\alpha, \beta, r)} a_{(\alpha, \beta, r)} (S^{*\alpha} *_{\vee} T^{*\beta}) * X^{*r} \right) (s) &= \\ &= \sum_{(\alpha, \beta, r)} a_{(\alpha, \beta, r)} (L(S)(\mathcal{A}^T s))^{\alpha} (L(T)(s))^{\beta} (L(X)(s))^r = \\ &= \varphi(L(S)(\mathcal{A}^T s), L(T)(s); L(X)(s)) = \\ &= \varphi(L(S)(\mathcal{A}^T s), L(T)(s); \varphi(L(S)(\mathcal{A}^T s), L(T)(s))) \equiv 0 \end{aligned}$$

avendo posto $L(S)(\mathcal{A}^T s) = (L(S_1)((\mathcal{A}^{(1)})^T s) \dots L(S_m)((\mathcal{A}^{(m)})^T s))$, $L(T)(s) = (L(T_1)(s) \dots L(T_p)(s))$: dunque (3) risolve (2). Viceversa, se X risolve (2), applicando L si ha ($\operatorname{Re} s > h''$ opportuno) $\varphi(L(S)(\mathcal{A}^T s), L(T)(s); L(X)(s)) \equiv 0$ allora, per le ipotesi su φ

$$L(X)(s) = \sum_{(\alpha, \beta)} b_{(\alpha, \beta)} (L(S)(\mathcal{A}^T s))^{\alpha} (L(T)(s))^{\beta}$$

ove i $b_{(\alpha, \beta)}$ sono i coefficienti di una generica soluzione locale; perciò per unicità $X = \sum_{(\alpha, \beta)} b_{(\alpha, \beta)} S^{*\alpha} *_{\vee} T^{*\beta}$, cioè X è del tipo (3).

Un risultato analogo al teorema 7 sussiste per sistemi; per semplicità, si omette la dimostrazione, analoga alla precedente.

TEOREMA 7 bis. $A_j, \mathcal{A}^{(j)}, V, S_j, T_l$ siano definiti come nel teorema precedente ($j = 1 \dots m, l = 1 \dots p$); siano assegnate le funzioni $\varphi_s(z, w; u) = \varphi_s(z_1 \dots z_m; w_1 \dots w_p; u_1 \dots u_r) = \sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} a_{(\alpha, \beta, \gamma)}^{(s)} z^\alpha w^\beta u^\gamma$ ($s = 1 \dots r$) intere su \mathbb{C}^{m+p+r} (α sarà allora un m -indice, β un p -indice, γ un r -indice). Sia dato il sistema

$$(4) \quad \sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} a_{(\alpha, \beta, \gamma)}^{(s)} (S^{*\alpha} *_{\frac{1}{\nu}} T^{*\beta}) * X^{*\gamma} = 0, \quad s = 1 \dots r;$$

si dirà soluzione del sistema una r -upla di distribuzioni di $\mathcal{L}'_+(R^n)$, $X = (X_1 \dots X_r)$ che soddisfi (4) e tale che L commuti con Σ . Allora se

i) le soluzioni locali del sistema $\varphi_s(z, w, u) = 0, s = 1 \dots r$ del tipo $u = \psi = (\psi_1 \dots \psi_r)$ sono olomorfe (cioè a componenti olomorfe) sul polidisco $|z_j| < R_j, |w_l| < R'_l, (j = 1 \dots m, l = 1 \dots p)$;

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & |L(S_j)(w^{(j)})| < K_j \quad \text{per } \text{Re } w^{(j)} > c^{(j)} \\ & |L(T_l)(s)| < K'_l \quad \text{per } \text{Re } s > c \end{aligned}$$

con $K_j < R_j, K'_l < R'_l \forall j, l$ le distribuzioni del tipo

$$(5) \quad X = (X_1 \dots X_r), \quad X_s = \sum_{(\alpha, \beta)} b_{(\alpha, \beta)}^{(s)} S^{*\alpha} *_{\frac{1}{\nu}} T^{*\beta}, \quad s = 1 \dots r$$

ove i $b_{(\alpha, \beta)}^{(s)}$ sono i coefficienti della s -esima componente di una generica soluzione locale, sono tutte e sole le soluzioni di (4).

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO, *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, classe di Scienze, **76** (1942-43).
 [2] L. AMERIO, *Sulla trasformata doppia di Laplace*, Memorie della R. Accademia d'Italia, **12** (1941).
 [3] A. PISTOIA, *Sulle operazioni di composizione secondo una varietà lineare per la trasformata multipla di Laplace*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, classe di Scienze, **84** [1951].
 [4] P. RIZZONELLI, *Sulla risoluzione delle equazioni integrali concernenti composizioni secondo varietà lineari*, Bollettino U.M.I., **14** (1959).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1976.