RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO BOVE

Sul problema di Dirichlet in un cono per l'equazione $\Delta^m u = f$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 231-244

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__231_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 54 (1975)

Sul problema di Dirichlet in un cono per l'equazione $\Delta^m u = f$.

ANTONIO BOVE (*)

SUMMARY - In the present paper we consider the Dirichlet problem for the iterated Laplace operator in a conic region of R^n and extend a preceding result of P. Grisvard [1]. We suppose that the space dimension n be greater than the order of the differential operator under consideration. Although in a particular case, we obtain some results analogous to V. A. Kondrat'ev's ones [2].

1. Sia $m \in N$ e $\Omega \subset R^n$,

$$\Omega = \{x;\, x = \varrho\omega,\, \varrho \in R^+,\, \omega \in G \subset S^{n-1}\}\,,$$

G aperto di S^{n-1}, essendo $S^{n-1} = \{x;\, x \in R^n,\ \|x\| = 1\}$.

Consideriamo il problema: determinare u tale che

$$\text{(1.1)}\qquad \begin{cases} \Delta^m u = f & \text{in } \Omega \\ \left.\dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\partial\Omega} = 0\,, & j = 0, 1, \ldots, m-1\,. \end{cases}$$

Precisamente, utilizzando coordinate polari: determinare $u(r, \omega) \in \in \mathcal{D}'(R^+; H_0^m(G))$ tale che

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}L\right)^m u(r, \omega) = f(r, \omega) \text{ in } \Omega$$

ove L denota l'operatore di Laplace-Beltrami su S^{n-1}.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle » - Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Ricordiamo che per $H^t(G)$, $H_0^t(G)$ si intendono gli ordinari spazi di Sobolev di ordine t sulla varietà G, costruiti servendosi delle carte locali per G (si veda [3] p. 38).

Supponiamo che ∂G sia almeno di classe C^{2m}; allora l'operatore L^m con dominio $\mathfrak{D}(L^m) = H^{2m}(G) \cap H_0^m(G)$ è autoaggiunto su $L^2(G)$.

Denotiamo con λ_k, $k \in N$, lo spettro dell'operatore L e con v_k, $k \in N$, le corrispondenti autofunzioni:

$$Lv_k = \lambda_k \cdot v_k\,, \qquad k \in N\,.$$

$\{v_k;\, k \in N\}$ costituisce una base ortonormale e completa in $L^2(G)$; si può allora scrivere

$$(2.1)\quad u(r,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r)\, v_k(\omega) \qquad \text{ove} \qquad u_k(r) = \langle u(r,\cdot), v_k(\cdot)\rangle_{L^2(G)}\,.$$

Ricordiamo che vale il risultato [3; p. 42]

$$H^t(G) = \left\{u;\ u \in \mathfrak{D}'(G),\ \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2t} |\langle u, v_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}.$$

Definizione 1.1. $\forall \gamma \in R$ poniamo

$$L_\gamma^2(R^+) = \{\varphi;\ \varphi\colon R^+ \to C,\ \varphi \text{ misurabile},\ \|x^\gamma \varphi(x)\|_{L^2(R^+)} < +\infty\}\,.$$

Assegnato $\sigma \in R$ e $u \in L^2_{\sigma-\frac{1}{2}}(R^+)$, indichiamo con

$$\tilde{u}(s) = \int_0^{+\infty} u(t)\, t^{s-1}\, dt\,, \qquad s \in C\,,\ \sigma = \operatorname{Re} s\,,$$

la trasformata di Mellin della u; si ha:

$$u(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{u}(s)\, t^{-s}\, ds$$

ove entrambi gli integrali convergono nella norma di L^2.

Poniamo

$$\tilde{\Delta}(s) = s^2 - (n-2)s + L .$$

Applicando formalmente la trasformazione di Mellin nella variabile radiale r, il problema si scrive nel modo seguente:

$$\tilde{\Delta}(s+2m-2)\tilde{\Delta}(s+2m-4)\ \dots\ \tilde{\Delta}(s+2)\ \tilde{\Delta}(s)\tilde{u}(s,\omega) = \tilde{f}(s+2m,\omega)$$

ove

$$\tilde{u}(s,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(s) v_k(\omega)$$

e analogamente per la $\tilde{f}(s,\omega)$.

Per le singole componenti nella base delle v_k, $k \in N$, si ha

$$\text{(3.1)} \qquad \left\{\prod_{j=1}^{m}[(s+2m-2j)^2-(n-2)(s+2m-2j)+\lambda_k]\right\}\tilde{u}_k(s) = \\ = \tilde{f}_k(s+2m), \qquad k \in N .$$

Indichiamo con

$$\left.\begin{matrix}\mu_{kj}\\ \nu_{kj}\end{matrix}\right\} = 2j-2m+n/2-1+\left\{\begin{matrix}-\left[\left(\dfrac{n}{2}-1\right)^2-\lambda_k\right]^{\frac12}\\ +\left[\left(\dfrac{n}{2}-1\right)^2-\lambda_k\right]^{\frac12}\end{matrix}\right.$$

$$(\lambda_k \leqslant 0)\ \ k \in N\ ,\ \ j = 1, \dots, m\ ,$$

le radici dell'equazione $(x+2m-2j)^2-(n-2)(x+2m-2j)+\lambda_k = 0$. Si ha:

Proposizione 1.1. Supponiamo $f_k \in L^2_{\sigma+2m-\frac12}(R^+)$, $\forall k \in N$, essendo $\sigma \in R$, $\sigma \neq \mu_{kj}$, $\sigma \neq \nu_{kj}$, $\forall k \in N$, $j = 1, \dots, m$. Allora esiste $u_k \in L^2_{\sigma-\frac12}(R^+)$, tale che $\tilde{u}_k$ soddisfa la (3.1) e che

$$r^j u_k^{(j)}(r) \in L^2_{\sigma-\frac12}(R^+)\ , \qquad j = 0, 1, \dots, 2m .$$

Dimostrazione. $f_k \in L^2_{\sigma+2m-\frac12}(R^+)$ implica che esiste in $\mathfrak{L}^2(R)$ $\tilde{f}_k(\sigma+2m+i\tau)$, $\tau \in R$.

Per la relazione di Parseval relativa alla trasformazione di Mellin in $L^2(R^+)$ si ha:

$$\|u_k\|^2_{L^2_{\sigma-\frac{1}{2}}(R^+)} = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}_k(\sigma + i\tau)|^2 \, d\tau =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_k(\sigma + 2m + i\tau)|^2 \left|\prod_{j=1}^{m} (\sigma - \mu_{kj} + i\tau)(\sigma - \nu_{kj} + i\tau)\right|^{-2} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{j=1}^{m} |\sigma - \mu_{kj}||\sigma - \nu_{kj}|\right)^{-2} \|f_k\|^2_{L^2_{\sigma+2m-\frac{1}{2}}(R^+)} < + \infty .$$

Analogamente si ragiona per $r^j u_k^{(j)}(r)$, $j = 1, \dots, 2m$.

Proposizione 2.1. Sia $\theta \in R$, tale che $r^\theta f(r, \omega) \in L^2(\Omega)$, $\theta \neq \mu_{kj} - n/2 + 2m$, $\theta \neq \nu_{kj} - n/2 + 2m$, $\forall k \in N$, $j = 1, \dots, m$. Allora

$$r^{\theta - 2m + |\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega) ,$$

ove α è un multiindice tale che $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2m$ $(r = \|x\|)$.

Dimostrazione Si prova facilmente che $r^\theta f(r) \in L^2(\Omega)$ equivale a $f_k \in L^2_{\sigma_\theta + 2m - \frac{1}{2}}(R^+)$, $\forall k \in N$, essendo $\sigma_\theta = \theta + n/2 - 2m$. La prova procede quindi in modo analogo a quella del teorema 1 di [1]. Infatti

$$\sum_{i=0}^{2m} \int_0^{+\infty} r^{2(\theta - 2m + i)} \|D_r^i u(r, \cdot)\|^2_{H^{2m-i}(G)} r^{n-1} \, dr \leqslant$$

$$\leqslant C' \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pari}}}^{2m} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2m-i}) \left(\prod_{l=1}^{m-i/2} |\sigma - \mu_{kl}||\sigma - \nu_{kl}|\right)^{-2} \|f_k\|^2_{L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}(R^+)}\right] +$$

$$+ C'' \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ dispari}}}^{2m} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2m-i}) \left(\prod_{l=1}^{m-(i+1)/2} |\sigma - \mu_{kl}||\sigma - \nu_{kl}|\right)^{-2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot |\sigma - \mu_{k,m-(i-1)/2}|^{-2} \|f_k\|^2_{L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}(R^+)}\right]$$

che converge poichè $\forall k \in N$, $\forall l = 1, \dots, m$, $\mu_{kl}, \nu_{kl} = 0((-\lambda_k)^{\frac{1}{2}})$ per $k \to \infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2_{L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}}(R^+) < + \infty$, poichè $r^\theta f(r, \omega) \in L^2(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 3.1. È possibile dare una rappresentazione della u_k, $k \in N$. Infatti sia

$$\begin{array}{ll} \sigma > \mu_{kj} & \text{per } j \in \{l_1, \dots, l_p) \subseteq \{1, \dots, m\}\,, \quad p \in N\,, \\ \sigma < \mu_{kj} & \text{in caso contrario} \\ \sigma > \nu_{kr} & \text{per } r \in \{l'_1, \dots, l'_q\} \subseteq \{1, \dots, m\}\,, \quad q \in N\,, \\ \sigma < \nu_{kr} & \text{in caso contrario}\,. \end{array}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k(s) = \Big[\prod_{j \in \{l_1, \dots, l_q\}} (s-\mu_{kj})^{-1}\Big] \cdot \Big[\prod_{j \in \{l'_1, \dots, l'_q\}} (s-\nu_{k_j})^{-1}\Big] \cdot \\ \cdot \Big[\prod_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l_1, \dots, l_q\}} (s-\mu_{kt})^{-1}\Big] \cdot \Big[\prod_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l'_1, \dots, l'_q\}} (s-\nu_{kt})^{-1}\Big] \cdot \tilde{f}(s+2m)\,. \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{array}{ll} a_{\mu_{kl}}(x) = x^{-\mu_{kl}}\big(H(x) - H(x-1)\big) & \text{se } l \in \{l_1, \dots, l_p\} \\ b_{\mu_{kl}}(x) = -x^{-\mu_{kl}} H(x-1) & \text{se } l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l_1, \dots, l_p\} \end{array}$$

e analogamente per ν_{kl}, $l = 1, \dots, m$, si ottiene

$$\begin{aligned} u_k = \Big(\bigvee_{j \in \{l_1, \dots, l_p\}} a_{\mu_{kj}}\Big) \vee \Big(\bigvee_{j \in \{l'_1, \dots, l'_q\}} a_{\nu_{kj}}\Big) \vee \Big(\bigvee_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l_1, \dots, l_p\}} b_{\mu_{kt}}\Big) \vee \Big(\bigvee_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l'_1, \dots, l'_q\}} b_{\nu_{kt}}\Big) \vee \\ \vee \big(x^{2m} f(x)\big) \end{aligned}$$

ove

$$(f \vee g)(x) = \int_0^{+\infty} f(y)\, g(x/y)\, dy/y = \int_0^{+\infty} f(x/y)\, g(y)\, dy/y$$

e

$$\bigvee_{j=1}^{k} f_j = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_k\,.$$

2. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ poniamo

$$|||\varphi|||^2 = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha \varphi\|_I^2$$

D'ora in poi si supporrà $n > 2m$. Indichiamo con V il completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla topologia data dalla norma $|||\cdot|||$.

Si ha:

PROPOSIZIONE 1.2. Sia $n > 2m$. Allora

$$\|r^{|\alpha|-m} D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C|||u|||^2$$

$(r = \|x\|)$, essendo C una opportuna costante > 0, $\forall u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$.

DIMOSTRAZIONE. La prova è analoga a quella del lemma 2(a) di [1].

Supponiamo $|\alpha| = 0$. Se $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ allora $\exists \varrho_0 > 0$ tale che $\operatorname{supp}(u) \subset S(0, \varrho_0) = \{x;\ x \in R^n,\ \|x\| < \varrho_0\}$. La diseguaglianza di Hardy iterata dà

$$\int_0^{+\infty} r^{-2m} |u(r, \omega)|^2 r^{n-1}\, dr \leqslant C \int_0^{+\infty} |D_r^m u(r, \omega)|^2 r^{n-1}\, dr < +\infty$$

q.d. rispetto a $\omega \in G$.

Integrando ambo i membri di tale disuguaglianza rispetto a ω si ha

$$\|r^{-m} u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|D_r^m u\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

La tesi segue osservando che

$$D_r^m u = \sum_{k_1, \ldots, k_m = 1}^{m} r^{-m} x_{k_1} \ldots x_{k_m} D_{k_1} \ldots D_{k_m} u \quad (D_{k_j} = \partial/\partial x_{k_j}) .$$

Se $0 < |\alpha| \leqslant m$ la dimostrazione procede in modo del tutto analogo utilizzando la seguente

PROPOSIZIONE ([2] lemma 4.5). Sia $f\colon R^+ \to C$, $f \equiv 0$ al di fuori di un intervallo finito. Supponiamo

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha |f^{(k)}(x)|^2\, dx < +\infty \qquad \text{per } \alpha \in R,\ \alpha > 2k - 1 .$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2k}|f(x)|^2\,dx \leqslant 4^k\left(\prod_{j=1}^{k}(2j-1-\alpha)\right)^{-2}\int_0^{+\infty} x^{\alpha}|f^{(k)}(x)|^2\,dx\,.$$

$\forall u,\ v \in V$ poniamo

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega} D^{\alpha}u\, D^{\alpha}v\, dx\,.$$

La forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ risulta continua e coercitiva su V. Se f è tale che $r^m f \in L^2(\Omega)$, per quanto si è detto sopra e per il teorema di Lax-Milgram, si ha che existe ed è unica $u \in V$ tale che

$$(-1)^m a(u, v) = \int_{\Omega} fv\, dx\,, \qquad \forall v \in V\,,$$

ossia il problema considerato ammette soluzione variazionale in V.

Osserviamo che, poichè le condizioni della Prop. 2.1.

$$\theta \neq \mu_{kj} - n/2 + 2m\,, \qquad \theta \neq \nu_{kj} - n/2 + 2m\,, \qquad \forall k \in N\,,\ j = 1, \ldots, m\,,$$

tenendo presenti le espressioni di μ_{kj}, ν_{kj}, sono equivalenti a

$$\lambda_k \neq (\theta + n/2 - 2j)(2j + n/2 - \theta - 2)\,,$$

si ha che, poichè $n > 2m$, la Prop. 2.1 è applicabile per $\theta = m$ e per $\theta = 0$. Indichiamo con $u^{(m)}$, $u^{(0)}$ le soluzioni corrispondenti a questi due valori del parametro θ. Si ha $u^{(m)} \in V$ e quindi $u^{(m)}$ coincide con la soluzione variazionale.

Proposizione 2.2. Sia, $\forall k \in N$

$$\lambda_k \neq (\theta + n/2 - 2j)(2j + n/2 - \theta - 2)\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,,\ \theta = 0, m\,.$$

Allora $u^{(0)} = u^{(m)}$ se e solo se

$$\langle \chi_{kr}, f\rangle_{L^2(\Omega)} = 0\,, \qquad \forall k, r \in N$$

tali che

$$\lambda_k > (n/2-1)^2 - (2j-1)^2 , \qquad j = j_k, \dots, m , \; j_k \leqslant r \leqslant m ,$$

ove si è posto

$$\chi_{kj}(r, \omega) = r^{\mu_{kj}+2m-n} v_k(\omega) \qquad (r = \|x\|)$$

$$\mu_{kj} = 2j - 2m + n/2 - 1 - \left((n/2-1)^2 - \lambda_k\right)^{\frac{1}{2}} , \qquad j = 1, \dots, m .$$

Dimostrazione. Per la prova ci si serve della formula di rappresentazione della u_k, $k \in N$, data nell'osservazione 3.1.

Si ha

$$\nu_{kj} - \sigma_\theta > 0 , \qquad \forall k \in N , \; \forall j = 1, \dots, m , \; \theta = 0, m ,$$

$$\mu_{kj} - \sigma_m < 0 , \qquad \forall k \in N , \; \forall j = 1, \dots, m ,$$

$\mu_{kj} - \sigma_0 < 0$ se e solo se $\lambda_k < (n/2-1)^2 - (2j-1)^2$, $j = 1, \dots, m$, $k \in N$.

Poniamo

$$j_k = \min\{j \in N ;\, j = 1, \dots, m ,\, \lambda_k > (n/2-1)^2 - (2j-1)^2\} ;$$

risulta, per le ipotesi fatte,

$$\lambda_k < (n/2-1)^2 - (2j-1)^2 \qquad \text{per } j = 1, \dots, j_k - 1$$

$$\lambda_k > (n/2-1)^2 - (2j-1)^2 \qquad \text{per } j = j_k, j_k + 1, \dots, m , \; \forall k \in N .$$

Sia $k \in N$ arbitrario. Per la formula di rappresentazione relativa a u_k si ha

$$u_k^{(0)} = u_k^{(m)} \Leftrightarrow \left(\bigvee_{r=j_k}^{m} b_{\mu_{kr}} - \bigvee_{r=j_k}^{m} a_{\mu_{kr}} \right) \vee (x^{2m} f_k) \equiv 0 .$$

Proviamo che

$$\left(\bigvee_{r=j_k}^{m} b_{\mu_{kr}} \right)(x) = - \sum_{r=j_k}^{m} \left(\prod_{\substack{i=j_k \\ i \neq r}}^{m} (\mu_{kr} - \mu_{ki}) \right)^{-1} x^{-\mu_{kr}} H(x-1) .$$

Eventualmente traslando sugli indici di somma, si può supporre $r = 1, \dots, m$, per semplificare le notazioni; la prova procede per induzione su m. La formula è banalmente vera per $m = 2$. Supponiamola vera per $m-1\in N$. Consideriamo

$$(b_{\mu_{km}}\vee b_{\mu_{k,m-1}}\vee\ldots\vee b_{\mu_{k1}})(x)=$$
$$=\left(b_{\mu_{km}}(y)\vee\left[-\sum_{j=1}^{m-1}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-1}(\mu_{kj}-\mu_{ki})\right)^{-1}y^{-\mu_{kj}}H(y-1)\right]\right)(x)=$$
$$=-\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(\mu_{kj}-\mu_{ki})\right)^{-1}x^{-\mu_{kj}}H(x-1)+$$
$$+x^{-\mu_{km}}\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(\mu_{kj}-\mu_{ki})\right)^{-1}H(x-1)\,.$$

Basta dunque provare che

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(\mu_{kj}-\mu_{ki})\right)^{-1}=0\,.$$

Ciò è vero per $m=2$. Supponiamolo vero per $m-1\in N$.
Poichè, se $t, t_1, \ldots, t_m$ sono numeri diversi tra loro, si ha

$$\prod_{k=1}^{m}(t-t_k)^{-1}=\sum_{k=1}^{m}(t-t_k)^{-1}\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(t_k-t_l)\right)^{-1}\;;$$

otteniamo:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(\mu_{kj}-\mu_{ki})\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(\mu_{kj}-\mu_{ki})^{-1}\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i,j}}^{m}(\mu_{ki}-\mu_{kl})\right)^{-1}=$$
$$=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i,j}}^{m}(\mu_{ki}-\mu_{kl})\right)^{-1}=0$$

per l'ipotesi induttiva.

In modo analogo si prova che

$$\left(\bigvee_{r=j_k}^{m}a_{\mu_{kr}}\right)(x)=\sum_{r=j_k}^{m}\left(\prod_{\substack{i=j_k\\ i\neq r}}^{m}(\mu_{kr}-\mu_{ki})\right)^{-1}x^{-\mu_{kr}}\big(H(x)-H(x-1)\big)\,.$$

Se ne conclude che

$$\left(\bigvee_{r=j_k}^{m}b_{\mu_{kr}}-\bigvee_{r=j_k}^{m}a_{\mu_{kr}}\right)(x)=-\sum_{r=j_k}^{m}\left(\prod_{\substack{i=j_k\\ i\neq r}}^{m}(\mu_{kr}-\mu_{ki})\right)^{-1}x^{-\mu_{kr}}H(x)=$$
$$=H(x)\sum_{r=j_k}C_{kr}x^{-\mu_{kr}}\,.$$

Affinchè $u^{(0)} = u^{(m)}$ dovrà dunque essere

$$\sum_{r=j_k}^{m} C_{kr} x^{-\mu_{kr}} \int_0^{+\infty} y^{\mu_k + 2m-1} f_k(y)\, dy = 0 \, ,$$

ossia, tenendo presente che f_k è il coefficiente di Fourier della f nella base delle v_k,

$$\int_G \Big(\int_0^{+\infty} y^{\mu_{kr}+2m-n} v_k(\omega) f(y, \omega) y^{n-1}\, dy \Big) d\omega = 0$$

e quindi

$$\langle \chi_{kr}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \, , \qquad \forall k \in N \, , \; r = j_k, \dots, m \, ,$$

che prova l'affermazione.

Come corollario immediato si ricava la seguente

Proposizione 3.2. Sia $(1 + r^m) f \in L^2(\Omega)$. Se $\lambda_k < (n/2 - 1)^2 - - (2j - 1)^2$ per $j = 1, \dots, m$, $\forall k \in N$, allora il problema in esame ammette una soluzione variazionale u tale che $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, $\forall \alpha$, $|\alpha| = 2m$.

Vale la seguente

Proposizione 4.2. $u \in H^m(\Omega) \Rightarrow r^{|\alpha|-m} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, $\forall \alpha$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $m \in N$ $(n > 2m)$.

Dimostrazione. Proviamo preliminarmente il seguente lemma:

L'insieme delle funzioni di $H^m(\Omega)$ che sono nulle per x abbastanza grande è denso in $H^m(\Omega)$.

Sia $\omega \colon R \to R$ così definita:

$$\omega(x) = \begin{cases} \Big(\int_0^1 \exp\big(-t^{-1}(1-t)^{-1}\big)\, dt \Big)^{-1} \int_{|x|}^1 \exp\big(-t^{-1}(1-t)^{-1}\big)\, dt & \text{se } |x| < 1 \\ 0 \quad \text{se } |x| \geqslant 1 \, . \end{cases}$$

Per $x \in R^n$, $\forall j \in N$ poniamo

$$\chi_j(x) = \sum_{k=-j}^{j} \omega\big(\|x\| - k \big) \, .$$

Risulta

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leqslant j \\ 0 & \text{se } \|x\| \geqslant j+1 \end{cases}$$

$$\chi_j \in C_0^\infty(R^n)\,, \qquad 0 \leqslant \chi_j \leqslant 1\,,\ \forall j \in N\,.$$

Sia $u \in H^m(\Omega)$ e $u_j = u \cdot \chi_j$. Si ha

$$\|u - u_j\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u - D^\alpha(u\chi_j)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\|D^\alpha u - D^\alpha(u\chi_j)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|(1-\chi_j)\, D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta \chi_j D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Ora, poichè

$$\|D^\beta \chi_j \cdot D^{\alpha-\beta} u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_G \Big(\int_j^{j+1} |D^\beta \chi_j(r,\omega)|^2 |D^{\alpha-\beta} u(r,\omega)|^2 r^{n-1}\, dr \Big)\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant M_\beta \int_G \Big(\int_j^{j+1} |D^{\alpha-\beta} u(r,\omega)|^2 r^{n-1}\, dr \Big)\, d\omega$$

per $M^\beta > 0$ opportuno, rimane provata l'affermazione del lemma. Sia ora $u \in H^m(\Omega)$, $u = 0$ per $\|x\|$ abbastanza grande. Supponiamo per semplicità $|\alpha| = 0$. Poichè $n > 2m$ si ha

$$\int_G \Big(\int_0^{+\infty} r^{-2m} |u(r,\omega)|^2 r^{n-1}\, dr \Big)\, d\omega \leqslant C_0 \int_G \Big(\int_0^{+\infty} |D_r^m u(r,\omega)|^2 r^{n-1}\, dr \Big)\, d\omega$$

e quindi si ricava l'asserto per densità.

PROPOSIZIONE 5.2. Sia $n > 2m$. Allora $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ implica che

$$\|r^{-2m+|\alpha|} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty\,, \qquad \forall \alpha\,,\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2m\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $m \leqslant |\alpha| \leqslant 2m$ si ha $D^\alpha u \in H^{2m-|\alpha|}(\Omega)$; per la Prop. 4.2 l'asserto risulta provato per $m \leqslant |\alpha| \leqslant 2m$.

Sia β un multiindice con $|\beta| = m - 1$; sia $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ e $f = D^\beta u$. Risulta $f \in H_0^1(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega)$ e quindi, eseguendo il cambiamento di coordinate, si ricava che q.d. rispetto a $r \in R^+$, $f(r,\omega) \in$

$\in H_0^1(G) \cap H^{m+1}(G)$. Per la disuguaglianza di Poincaré si ha:

$$\|f\|^2_{L^2(G)} \leqslant \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m+1} \|D^\alpha_\omega f\|^2_{L^2(G)} \leqslant \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m+1} C_\alpha r^{2|\alpha|}\|D^\alpha f\|^2_{L^2(G)} ,$$

ove D^α_ω indica la derivazione rispetto alle variabili angolari ω; risulta quindi

$$r^{2m-2}\|D^\beta u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \sum_{m\leqslant|\gamma|\leqslant 2m} C_\gamma r^{-4m+2|\gamma|}\|D^\gamma u\|^2_{L^2(G)} .$$

Moltiplicando ambo i membri per r^{n-1} e integrando rispetto a $r \in R^+$ si conclude che $r^{-2m+|\beta|}D^\beta u \in L^2(\Omega)$. Analogo ragionamento si fa se $0 \leqslant |\beta| \leqslant m-2$.

PROPOSIZIONE 6.2. Sia $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ a supporto limitato, tale che

$$\Delta^m u = f \quad \text{ in } \Omega$$

Allora

$$\langle \chi_{kr}, f\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

per quei $k \in N$ per cui $\lambda_k > (n/2-1)^2 - (2r-1)^2$, $r = r_k, \ldots, m$, essendo χ_{kr} la funzione definita nella Prop. 2.2.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $k \in N$, $r \in \{1, \ldots, m\}$ e $\varepsilon \in R^+$, poniamo $\alpha = \mu_{kr} + 2m - 1$,

$$I(\alpha, m) = \int_\varepsilon^{+\infty}\int_G r^\alpha v_k(\omega)\,\Delta^m u(r, \omega)\,dr\,d\omega$$

$$\Phi(r, m) = \int_G v_k(\omega)\,\Delta^m u(r, \omega)\,d\omega .$$

Si ha

$$\langle \chi_{kr}, f\rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{\varepsilon\to 0+} I(\alpha, m) .$$

Integrando per parti r volte rispetto alla variabile radiale, tenendo presente l'espressione di μ_{kr}, si ha che

$$(\alpha - 2r + 2)^2 - n(\alpha - 2r + 1) + \lambda_k - 1 = 0$$

e quindi

$$I(\alpha, m) = -\sum_{h=0}^{r-1}\left(\prod_{j=0}^{h-1}[(\alpha-2j)^2 - n(\alpha-2j-1)+\lambda_k-1]\right)\varepsilon^{\alpha-2h}\cdot$$
$$\cdot D_r\Phi(\varepsilon, m-h-1)+$$
$$+\sum_{h=0}^{r-1}(\alpha-2h+1-n)\left(\prod_{=0}^{h-1}[(\alpha-2j)^2-n(\alpha-2j-1)+\lambda_k-1]\right)\cdot$$
$$\cdot\varepsilon^{\alpha-2h-1}\,\Phi(\varepsilon, m-h-1)$$

over per convenzione $\prod_{j=0}^{-1} a_j = 1$.

Basta allora provare che

$$\mathrm{im}_{\varepsilon\to 0+}\,\varepsilon^{\alpha-2h-1+j}D_r^j\Phi(\varepsilon, m-h-1) = 0 \qquad \text{per } h = 0, 1, \ldots, r-1 \text{ e } j = 0, 1\,.$$

Sia ora $0 \leqslant l \leqslant m-1$. Per ipotesi u è tale che

$$r^{-2m+2l}\Delta^l u(r, \omega) \in L^2(\Omega);$$

inoltre si ha che

$$r^{\eta-2m+2l}\Delta^l u \in L^2(\Omega)\,, \qquad \forall\eta>0 \text{ arbitrariamente piccolo}\,.$$

Posto

$$\beta = \eta + n/2 - 2m + 2l - \tfrac{1}{2}\,,$$

si ha

$$D_r^k\Phi(\cdot, l) \in L^2_{\beta+k}(R^+)\,, \qquad k = 0, 1, 2\,,$$

e quindi

$$D_r^j\big(r^{\alpha-2h-1}\,\Phi(r, m-h-1)\big) \in L^2_{\eta-\frac{3}{2}+n/2-\alpha+j}(R^+)\,, \qquad j = 0, 1\,,$$
$$D_r^j\big(r^{\alpha-2h}\,D_r\,\Phi(r, m-h-1)\big) \in L^2_{\eta-\frac{3}{2}+n/2-\alpha+j}(R^+)\,, \qquad j = 0, 1\,.$$

Ora si ha la

PROPOSIZIONE ([1], lemma 7). Se $\psi\colon R^+ \to C$ è tale che $\psi(t)$, $t^{-1}\psi(t)$, $\psi'(t) \in L^2_\gamma(R^+)$, con $\gamma < \frac{1}{2}$, allora ψ è continua e $\psi(0) = 0$.

Da ciò si ricava,

$$\lambda_k > (n/2-1)^2 - (2r-1)^2\,, \qquad r = r_k, \ldots, m\,,$$

che prova l'asserto.

Se ne conclude:

PROPOSIZIONE 7.2. Sia $u \in H_0^m(\Omega)$, con supporto limitato, soluzione di $\Delta^m u = f$; allora $u \in H^{2m}(\Omega)$ se e solo se

a) $f \in L^2(\Omega)$

b) $\langle \chi_{kr}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ per

$$\lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2 , \qquad j = j_k, \ldots, m , \quad k \in N$$

se

$$\lambda_k \neq (m + n/2 + 2j)(2j + n/2 - m - 2) , \qquad j = 1, \ldots, m .$$

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella del teorema 3 di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] P. GRISVARD, *Problème de Dirichlet dans un cone*, Ric. di Mat., **20** (1971), p. 175.

[2] V. A. KONDRAT'EV, *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc., **16** (1967), p. 227.

[3] J. L. JIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Paris (1968).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1976.