Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Emma Previato

Gruppi in cui la relazione di Dedekind è transitiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 215-229

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__215_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 54 (1975)

Gruppi in cui la relazione di Dedekind è transitiva.

EMMA PREVIATO (*)

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice un sottogruppo di Dedekind in G, e si scrive $H \leqslant_d G$, se e solo se dati comunque due sottogruppi A, B di G da $H \leqslant B$ segue $H \cup (A \cap B) = (H \cup A) \cap B$ e da $A \leqslant B$ segue $A \cup (H \cap B) = (A \cup H) \cap B$. Diciamo che in un gruppo G la relazione di Dedekind è transitiva, o brevemente che G è un D-gruppo, se e solo se da $H \leqslant_d K \leqslant_d G$ segue $H \leqslant_d G$.

Nel presente lavoro, dopo aver osservato (proposizione 1.6) che la classe dei D-gruppi è una sottoclasse di quella dei (q)-gruppi [1], già studiata in [8], [2], [3], si ottiene un caratterizzazione dei D-gruppi risolubili [2]. Lo studio viene effettuato sfruttando la descrizione dei (q)-gruppi risolubili che si trova in [2], [3] ed esaminando separatamente i D-gruppi aperiodici, quelli periodici e quelli misti. I risultati ottenuti per tali classi sono esposti rispettivamente nei teoremi 2.1, 2.5, 2.8. L'ultimo paragrafo è dedicato ad alcune osservazioni sui gruppi in cui ogni sottogruppo è D-gruppo.

Notazioni.

Se G è un gruppo, la scrittura $H \leqslant_q G$ significa che H è un sottogruppo quasi-normale in G. Se $H \leqslant K \leqslant G$, $[K/H]$ denota l'intervallo

---

(*) Indirizzo dell'A.: Università di Padova - Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova. Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del CNR.

(1) Chiamasi (q)-gruppo un gruppo G in cui la relazione di quasi-normalità è transitiva: da $H \leqslant_q K$ e $K \leqslant_q G$ segue $H \leqslant_q G$ (quasi-normale).

(2) La definizione di risolubilità adottata è la seguente: il gruppo G è risolubile se e solo se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale abeliano non identico.

del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G di estremi H, K. $\Gamma_\infty(G)$ è l'intersezione dei termini della serie centrale discendente di G: $\Gamma_\infty(G) = \bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(G)$. $\bar{X}$ è l'immagine del sottoinsieme X di G nell'omomorfismo canonico $\varphi\colon G \to G/N$, dove N è un sottogruppo normale di G, ossia $\bar{X} = X^\varphi$. Se p è un numero primo, $G(p)$ è il sottogruppo di G generato dagli elementi il cui periodo è finito e divisibile solo per numeri primi maggiori di p. G^p è il sottogruppo di G definito dalla posizione: $G^p = \langle g^p | g \in G\rangle$. Il gruppo G si dice modulare se e solo se ogni sottogruppo di G è sottogruppo di Dedekind.

1. In questo numero ricordiamo alcune note proprietà dei sottogruppi di Dedekind in un gruppo e ne stabiliamo qualche altra utile per i nostri scopi.

1.1. Sia G un gruppo. Allora ([9]):

i) $H \leqslant_d G$ se e solo se per ogni sottogruppo K di G la posizione $X \mapsto X \cap K$ realizza un isomorfismo reticolare φ_K dell'intervallo $[H \cup K/H]$ sull'intervallo $[K/H \cap K]$;

ii) se $H_i \leqslant_d G$ per $i = 1, 2$ allora anche $H_1 \cup H_2 \leqslant_d G$;

iii) se $H \leqslant_d G$ e K è elemento di Dedekind in $[G/H]$, allora $K \leqslant_d G$;

iv) se $H \leqslant_d G$ e K è sottogruppo di G, allora $H \cap K \leqslant_d K$;

v) se $H \leqslant_d G$ ed N è un sottogruppo normale di G, allora $HN/N \leqslant_d G/N$.

Le dimostrazioni si possono trovare in [9], p. 72.

Dimostriamo ora due proposizioni, utili per riconoscere sottogruppi di Dedekind in gruppi infiniti.

1.2. Proposizione. Sia G un gruppo. Se $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una famiglia di sottogruppi di Dedekind di G, allora $\bigcup_\alpha H_\alpha \leqslant_d G$.

Dimostrazione. Posto $\bigcup_\alpha H_\alpha = H$, proviamo che $\varphi_K\colon [H \cup K/H] \to [K/H \cap K]$ è un isomorfismo reticolare per ogni $K \leqslant G$ (1.1 i)). Sia $H \leqslant X \leqslant H \cup K$: è intanto $(X \cap K) \cup H \leqslant X$. Viceversa, se $x \in X$, è $x \in H \cup K$ quindi $x = h_1 k_1 \dots h_t k_t$ con $h_i \in H$, $k_i \in K$; allora $\langle h_1, \dots, h_t\rangle \leqslant \bigcup_{1^i}^n H_{\alpha_i}$, per $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ opportuni, ed essendo $\bigcup_{1^i}^n H_{\alpha_i} = L \leqslant_d G$ (1.1 ii)), risulta $x \in X \cap (K \cup L) = (X \cap K) \cup L \leqslant (X \cap K) \cup H$, e dunque $(X \cap \cap K) \cup H = X$. Similmente si vede che da $H \cap K \leqslant X \leqslant K$ segue $(X \cup H) \cap K = X$. Pertanto le applicazioni isotone $\varphi_K\colon [H \cup K/H] \to \to [K/H \cap K]$ e $\varphi^H\colon [K/H \cap K] \to [H \cup K/H]$ definite rispettivamente da $\varphi_K(X) = K \cap X$, $\varphi^H(X) = H \cup X$ sono l'una l'inversa dell'altra, dunque isomorfismi reticolari.

1.3. Proposizione. Sia G un gruppo e $H \leqslant G$. Se $H \leqslant_d H \cup B$ per ogni sottogruppo finitamente generato B di G, allora H è di Dedekind in G.

Dimostrazione. Proviamo (1.1 i)) che $\varphi_K\colon [H \cup K/H] \to [K/H \cap K]$ è un isomorfismo reticolare per ogni $K \leqslant G$. Sia $H \leqslant X \leqslant H \cup K$: è $(X \cap K) \cup H \leqslant X$. Viceversa per $x \in X$ è $x = h_1 k_1 \dots h_t k_t$, $h_i \in H$, $k_i \in K$; per l'ipotesi, è $(H \cup \langle k_1, \dots, k_t \rangle) \cap \langle H, x \rangle = H \cup (\langle k_1, \dots, k_t \rangle \cap \cap \langle H, x \rangle) \leqslant H \cup (K \cap X)$, quindi $x \in H \cup (K \cap X)$ sicchè $X = (X \cap \cap K) \cup H$. Similmente si prova $(H \cup X) \cap K = X$ per $H \cap K \leqslant X \leqslant K$: le mappe isotone φ_K e φ^H sono dunque l'una l'inversa dell'altra, pertanto isomorfismi reticolari.

Immediata conseguenza delle proposizioni 1.2, 1.3 è il seguente

1.4. Corollario. Un gruppo G è modulare se e solo se ogni suo sottogruppo finitamente generato è modulare.

Ricordato ([6]) che un $H \leqslant G$ si dice sottogruppo subpermutabile se e solo se esiste una catena finita $H_0 = H \leqslant H_1 \leqslant \dots \leqslant H_n = G$ con $H_i \leqslant_q H_{i+1}$ per $i = 0, \dots, n-1$, proviamo la seguente

1.5. Proposizione. Sia H un sottogruppo subpermutabile del gruppo G. Allora $H \leqslant_d G$ se e solo se è quasi-normale.

Dimostrazione. Se $H \leqslant_d G$, usiamo induzione sull'indice di subpermutabilità r (3) di H. Per $r = 0, 1$, H è quasi-normale; sia $r > 1$. Se $H_0 = H < H_1 < \dots < H_r = G$ è una catena con $H_i \leqslant_q H_{i+1}$ per $i = 0, \dots, r-1$ e se K è un qualunque sottogruppo di G, allora, per l'ipotesi induttiva, si ha: $H \cup (K \cap H_{r-1}) = H(K \cap H_{r-1})$. D'altra parte, è $H(K \cap H_{r-1}) = (H \cup K) \cap H_{r-1} \leqslant_q H \cup K$ perchè $H_{r-1} \leqslant_q G$. Infine $H \cup K = (H(K \cap H_{r-1}))K = H((K \cap H_{r-1})K) = HK$, dunque $H \leqslant_q G$.

(3) Chiamiamo indice di subpermutabilità di H in G il minimo dell'insieme delle lunghezze delle catene finite $H_0 = H \leqslant H_1 \leqslant \dots \leqslant H_n = G$ per cui $H_i \leqslant_q H_{i+1}$.

La sufficienza è ben nota.

1.6. Proposizione. Ogni D-gruppo è un (q)-gruppo.

Dimostrazione. Sia G un D-gruppo, e siano $H, K \leqslant G$ con $H \leqslant_q K \leqslant_q G$. H è subpermutabile in G e $H \leqslant_d G$ per transitività della relazione di Dedekind; allora per 1.5 è $H \leqslant_q G$. Dunque G è un (q)-gruppo.

La 1.6 riconduce lo studio dei D-gruppi nell'ambito di quello dei (q)-gruppi. Una caratterizzazione dei (q)-gruppi risolubili si trova in [2], [3]; riportiamo qui di seguito alcuni dei risultati ivi esposti, utili per la lettura delle nostre dimostrazioni e a tale scopo opportunamente riformulati.

1.7. ([2]). Sia p un numero primo dispari e G un p-gruppo risolubile. G è (q)-gruppo se e solo se è modulare.

1.8. ([2]). Sia G un 2-gruppo risolubile. Se G è (q)-gruppo e se non è modulare, allora è del tipo $\langle A \times A_1, z \rangle$, ove $A \times A_1$ è un gruppo abeliano di indice 2 in G, $A = \Gamma_\infty(G)$ è divisibile non identico e $a^z = a^{-1}$ per ogni $a \in A$. Inoltre G/A è modulare (4).

1.9. ([2]). Sia G un gruppo risolubile periodico. G è un (q)-gruppo se e solo se

i) $\Gamma_\infty(G) = A \times B$, con A 2-gruppo divisibile, B di Hall in G e privo di elementi di ordine 2,

ii) G/B è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, ciascuno dei quali è un (q)-gruppo,

iii) ogni sottogruppo di $\Gamma_\infty(G)$ è normale in G.

Ed anche

1.10. ([2]). Sia G un gruppo risolubile periodico. G è un (q)-gruppo se e solo se possiede un sottogruppo normale N tale che

i) N è di Hall e privo di elementi di periodo 2,

ii) G/N è prodotto diretto dai suoi sottogruppi di Sylow, ciascuno dei quali è un (q)-gruppo

(4) Tali condizioni non sono sufficienti affinchè G sia (q)-gruppo: una caratterizzazione completa si trova nel lavoro originale.

iii) ogni sottogruppo di N è normale in G.

Un gruppo misto G è un gruppo che ha almeno un elemento aperiodico e un elemento periodico non identico; diciamo che un gruppo misto è separato se e solo se l'insieme degli elementi periodici costituisce un sottogruppo, non separato nel caso contrario.

1.11. ([3]). Sia G un gruppo non abeliano, misto e separato. G è un (q)-gruppo risolubile se e solo se, detto T il sottogruppo di G generato dagli elementi periodici,

i) T è prodotto diretto dai suoi p-sottogruppi di Sylow T_p, tutti abeliani,

ii) G/T è abeliano di rango 1,

iii) ogni elemento aperiodico $g \in G$ induce su T_p una potenza

$$\alpha_p(g) \equiv 1 \bmod p \ \ \big(\alpha_2(g) \equiv 1 \bmod 4 \ \text{ se } \ T_2^4 \neq T_2^2\big).$$

1.12. ([3]). Sia G un (q)-gruppo risolubile misto non separato. Allora G contiene un sottogruppo abeliano C di indice 2 in G tale che $G = \langle z, C\rangle$, $C = A \times B$ con A gruppo abeliano misto 2-divisibile, B 2-gruppo limitato, z 2-elemento, $z^{-1}az = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ (4). Inoltre ogni sottogruppo di C è quasi-normale in G e G/A è modulare.

Terminiamo il numero con l'osservazione seguente

1.13. Proposizione. Ogni sottogruppo di Dedekind ed ogni immagine omomorfa di un D-gruppo è un D-gruppo.

Dimostrazione. Sia G un D-gruppo: se $A \leqslant_d G$, da $H \leqslant_d K \leqslant_d A$ segue $K \leqslant_d G$, quindi $H \leqslant_d G$ e, a maggior ragione, $H \leqslant_d A$; pertanto A è D-gruppo. Sia ora $A \lhd G$: da $H/A \leqslant_d K/A \leqslant_d G/A$ segue $H \leqslant_d K \leqslant_d G$ (1.1 iii)), quindi $H \leqslant_d G$ e $H/A \leqslant_d G/A$ (1.1 v)) e si conclude che G/A è D-gruppo.

2. D-gruppi risolubili.

2.1. Teorema. Un gruppo risolubile aperiodico è D-gruppo se e solo se è abeliano.

Dimostrazione. Sia G un D-gruppo risolubile aperiodico; G è un (q)-gruppo per 1.6, quindi abeliano ([2], teorema B). La sufficienza è ovvia.

La proposizione che segue permette di determinare i D-gruppi risolubili primari.

2.2. PROPOSIZIONE. Sia G un $\tilde{N}$-gruppo (5) periodico. G è un D-gruppo se e solo se è un (q)-gruppo.

DIMOSTRAZIONE. Tenuto presente 1.6, per concludere basterà far vedere che in un $\tilde{N}$-gruppo periodico G un sottogruppo di Dedekind è quasi-normale. Se $H \leqslant_d G$, allora per ogni $g \in G$ risulta $[H \cup \langle g \rangle / H] \cong [\langle g \rangle / \langle g \rangle \cap H]$, reticolo di lunghezza finita. Ne segue, essendo G un $\tilde{N}$-gruppo, che H è subnormale in $H \cup \langle g \rangle$ e così per 1.5 quasi-normale in $H \cup \langle g \rangle$. La conclusione è ora semplice.

2.2.1. COROLLARIO. Sia G un p-gruppo risolubile. G è un D-gruppo se e solo se è un (q)-gruppo.

DIMOSTRAZIONE. Si tenga presente che un p-gruppo risolubile è un $\tilde{N}$-gruppo ([1], vol. II, p. 222).

Sia ora G un gruppo periodico: indichiamo con $\omega(G)$ l'insieme dei numeri primi che dividono l'ordine di qualche elemento non identico di G.

Allo scopo di stabilire una proprietà di un D-gruppo G nel caso $\omega(G)$ finito (proprietà che in seguito verrà estesa al caso generale), premettiamo una proposizione, in cui sono riunite alcune utili osservazioni.

2.3. Sia G un gruppo.

i) Se $N \lhd G$ e $N \leqslant \Gamma_\infty(G)$, allora $\Gamma_\infty(G/N) = \Gamma_\infty(G)/N$.

ii) Se $N \leqslant H \leqslant G$, se $N \lhd G$ e se è normale il p-sottogruppo di Sylow S_p di H, allora il p-sottogruppo di Sylow di H/N è $S_p N/N$.

iii) Se $N \leqslant H \leqslant G$, se $N \lhd G$, se S_p è un p-sottogruppo di Sylow di H e $p \notin \omega(N)$, allora $(S_p N/N)^p$ è completo (6) non identico se e solo se S_p^p è completo non identico.

DIMOSTRAZIONE. i) Risulta $\Gamma_1(G/N) = (G/N)' = G'N/N = G'/N = \Gamma_1(G)/N$; per induzione (transfinita) si ottiene $\Gamma_\alpha(G/N) = \Gamma_\alpha(G)/N$

(5) Per la definizione cfr. [1], p. 221.

(6) Un gruppo G si dice completo se e solo se, dati comunque un elemento a di G e un intero positivo n, l'equazione $x^n = a$ ha almeno una soluzione in G. Un gruppo abeliano completo si dice di solito gruppo divisibile.

per ogni α; infatti $\Gamma_{\alpha+1}(G/N) = [\Gamma_\alpha(G/N), G/N] = [\Gamma_\alpha(G)/N, G/N] = [\Gamma_\alpha(G), G]N/N = \Gamma_{\alpha+1}(G)/N$ e se β è un ordinale limite $\Gamma_\beta(G/N) = \bigcap_{\gamma<\beta} \Gamma_\gamma(G/N) = (\bigcap_{\gamma<\beta} \Gamma_\gamma(G))/N = \Gamma_\beta(G)/N$. Infine $\Gamma_\infty(G/N) = \bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(G/N) = \bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(G)/N = (\bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(G))/N = \Gamma_\infty(G)/N$.

ii) Sia P/N un p-sottogruppo di Sylow di H/N: allora $S_pN/N \leqslant P/N$. D'altra parte, se $xN \in P/N$ sarà $x^{p^\alpha} \in N$, $|x^{p^\alpha}| = p^\beta m$, $(m, p) = 1$, e x si scompone nel prodotto di un elemento di N per uno di ordine $p^{\alpha+\beta}$ di H, che appartiene a S_p in quanto S_p è l'unico p-sottogruppo di Sylow di H. Dunque $P/N \leqslant S_pN/N$, e così l'uguaglianza.

iii) È infatti $(S_pN/N)^p = S_p^pN/N \cong S_p^p$.

2.4. Proposizione. Sia G un D-gruppo risolubile periodico. Risulta:

i) $\Gamma_\infty(G) = A \times B$, con A 2-gruppo divisibile, B sottogruppo di Hall in G privo di elementi di ordine 2, inoltre ogni sottogruppo di $\Gamma_\infty(G)$ è normale in G.

ii) Se $\omega(G)$ è finito, detta $B = G_{p_1} \times \ldots \times G_{p_n}$ la decomposizione di B nelle sue componenti primarie tale che $G_{p_i}^{p_i}$ sia divisibile non identico per $i = 1, \ldots, t$, allora $G/\prod_{i=1}^{t} G_{p_i}^{p_i} \times A$ è modulare e per $t < j \leqslant n G_{p_j}$ è abeliano elementare.

Dimostrazione. i) È conseguenza del fatto che G è (q)-gruppo risolubile periodico (1.6 e 1.9). ii) Detto L il sottogruppo $\prod_{i=1}^{t} G_{p_i}^{p_i} \times A$, osserviamo che G/L è un D-gruppo (1.13); inoltre $\Gamma_\infty(G/L) = \Gamma_\infty(G)/L$ il p_i-sottogruppo di Sylow di $\Gamma_\infty(G/L)$ è $G_{p_i}L/L$ $(i = 1, \ldots, n)$, il 2-sottogruppo di Sylow è $AL/L = \{1\}$ e risulta $(G_{p_i}L/L)^{p_i}$ divisible non identico se e solo se $G_{p_i}^{p_i}$ è divisibile non identico (2.3). Di conseguenza, il sottogruppo divisibile di $\Gamma_\infty(G/L)$ ottenuto come in ii) è identico; per concludere che G/L è modulare proviamo dunque che è modulare il gruppo G nell'ipotesi $\prod_{i=1}^{t} G_{p_i}^{p_i} \times A = \{1\}$. Usiamo induzione su $|\omega(G)|$: se G è un p-gruppo, allora è modulare (1.7 se $p > 2$, 1.8 e ipotesi $A = \{1\}$ se $p = 2$). Supponiamo pertanto $|\omega(G)| > 1$. Consideriamo un p-sottogruppo di Sylow G_p di G, ove p è il massimo dell'insieme $\omega(G)$. Possiamo supporre che G_p non sia un fattore diretto di G perchè da $G = G_p \times R$ segue ([7], p. 5) $\mathfrak{L}(G) = \mathfrak{L}(G_p) \times \mathfrak{L}(R)$, ed $\mathfrak{L}(G_p)$ ed $\mathfrak{L}(R)$ sono modulari per l'ipotesi induttiva; pertanto $G_p \leqslant \Gamma_\infty(G)$

([2], proposizione 5.1) e G_p è normale in G per i); in virtù di 2.3, a G/G_p si applica l'ipotesi induttiva, dunque G/G_p è modulare. Dato un $g \in G$, risulta dunque $\langle g, G_p\rangle \leqslant_d G$ (1.1 iii)): proviamo che $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g, G_p\rangle$, da cui, per la transitività, $\langle g\rangle \leqslant_d G$ e dunque G modulare (1.2). In conseguenza della proposizione 1.3, è sufficiente provare $\langle g\rangle \leqslant_d \leqslant_d \langle g, h_1, \ldots, h_r\rangle$ dove $h_1, \ldots, h_r \in G_p$; inoltre non è evidentemente restrittivo supporre che l'ordine di g sia potenza di un primo. Se $|g| = q$, allora per la scelta di p si ha $q < p$ e inoltre g induce un automorfismo potenza nel gruppo abeliano G_p (per i)); se tale automorfismo è l'identità, allora $\langle g\rangle G_p$ è abeliano e $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g\rangle G_p$. Diversamente, l'automorfismo indotto ha ordine q: in tale ipotesi il gruppo $\langle g, h_1, \ldots, h_r\rangle$ ($h_i \in G_p$) è modulare se e solo se $|h_1| = \ldots = |h_r| = p$ ([7], p. 13). Per lo stesso motivo, è $\langle g\rangle G_p^{p^2}/G_p^{p^3} \leqslant_d \langle g\rangle G_p^p/G_p^{p^2}$, essendo il p-sottogruppo di Sylow di $\langle g\rangle G_p^p/G_p^{p^2}$ abeliano elementare; analogamente $\langle g\rangle G_p^p \leqslant_d \leqslant_d \langle g\rangle G_p$, e dunque $\langle g\rangle G_p^{p^2} \leqslant_d \langle g\rangle G_p$ per la transitività della relazione di Dedekind in $\langle g\rangle G_p$ (1.13). Allora necessariamente $G_p/G_p^{p^2}$ è un gruppo abeliano elementare, per cui $G_p^p = G_p^{p^2}$ e G_p^p è divisibile; dunque, per l'ipotesi, $G_p^p = \{1\}$, ossia G_p è abeliano elementare. Pertanto $\langle g, h_1, \ldots, h_r\rangle$ è un P-gruppo, quindi $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g, h_1, \ldots, h_r\rangle$, come si voleva. Sia ora $|g| = q^n$ con $n > 1$ e ragioniamo per induzione su n. Se G_p non è abeliano elementare, $g^{q^{n-1}}$, avendo ordine q, induce su G_p l'identità, per quanto visto; si conclude per induzione che g induce l'identità in $\langle g\rangle G_p/\langle g^{q^{n-1}}\rangle$, quindi in $\langle g\rangle G_p$. Dunque $\langle g\rangle G_p$ è abeliano e di nuovo $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g\rangle G_p$. Se poi G_p è abeliano elementare, e se $\langle g\rangle \nleqslant_d \langle g, h\rangle$, ($h \in G_p$) consideriamo in $\langle g, h\rangle$ un coniugato $\langle g\rangle^x \neq \langle g\rangle$. Sarà $\langle g^m\rangle = \langle g\rangle \cap \langle g\rangle^x$ normale in $\langle g, h\rangle$: se fosse non identico si potrebbe concludere per induzione in $\langle g\rangle G_p/\langle g^m\rangle$ (g^m centralizza h, quindi anche G_p), e sarebbe $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g, h\rangle$. Dunque è $\langle g\rangle = (\langle g^q\rangle \cup \cup \langle g\rangle^x) \cap \langle g\rangle \neq (\langle g\rangle \cap \langle g\rangle^x) \cup \langle g^q\rangle = \langle g^q\rangle$, mentre, per l'ipotesi induttiva, $\langle g^q\rangle \leqslant_d G$. Questa contraddizione permette di concludere $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g, h\rangle$, e così $\langle g, h\rangle$ ha reticolo modulare, perchè ogni suo sottogruppo primario è di Dedekind. Se non è abeliano, $\langle g, h\rangle$ è pertanto un P_0^*-gruppo ([7], p. 13) e risulta $g^{-1}hg = h^s$, con $s^q \equiv 1$, $s \not\equiv 1 \bmod p$ per ogni $h \in G_p$, per cui $\langle g, h_1, \ldots, h_r\rangle$ è P_0^*-gruppo e $\langle g\rangle \leqslant_d \langle g, h_1, \ldots, h_r\rangle$.

Dimostrata così la modularità di G/L, osserviamo che $L = \prod_{i=1}^{t} G_{p_i}^{p_i} \times A$ è il massimo sottogruppo divisibile di $\Gamma_\infty(G)$ e inoltre G_{p_j} è abeliano elementare per $t < j \leqslant n$: infatti nel gruppo modulare G/L i p_j-sottogruppi di Sylow non sono fattori diretti, avendosi $\Gamma_\infty(G/L) = \Gamma_\infty(G)/L$ (2.3), sono quindi abeliani elementari ([7], p. 13): ii) risulta così provata.

Ci proponiamo ora di arrivare a provare il seguente

2.5. Teorema. Sia G un gruppo periodico. G è un D-gruppo risolubile se e solo se possiede un sottogruppo normale (abeliano) N che gode delle seguenti proprietà:

i) $N = A \times B$, A è 2-gruppo divisibile, B è di Hall in G e privo di elementi di ordine 2, ogni sottogruppo di N è normale in G;

ii) G/B è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, ciascuno dei quali è un D-gruppo risolubile;

iii) se M è il sottogruppo divisibile massimale di N, allora G/M è modulare;

iv) se il 2-Sylowgruppo P/B di G/B è abeliano, allora G/M_1 è modulare, ove M_1 è il sottogruppo divisibile massimale di B.

Alla dimostrazione premettiamo due lemmi.

2.6. Lemma. Sia G un D-gruppo risolubile periodico. Se M è il sottogruppo divisibile massimale di $\Gamma_\infty(G)$, allora G/M è modulare.

Dimostrazione. In virtù di 1.2, 1.3 basterà far vedere che se $h_1, \ldots, h_t \in G$ allora $\langle h_1, \ldots, h_t \rangle M/M$ è modulare. Essendo G un (q)-gruppo risolubile periodico, da 1.9 segue facilmente che G è supersolubile (7); pertanto se p è il massimo dell'insieme $\omega(\langle h_1, \ldots, h_t \rangle)$, allora $G(p)$ non contiene elementi di ordine minore o uguale a p (8). $L = G/G(p)$ è un D-gruppo e $\omega(L)$ è finito, quindi ad L si può applicare 2.4. Tenuto conto che $\Gamma_\infty(G)$ è abeliano periodico, risulta $\Gamma_\infty(G)G(p) = T \times G(p)$; visto che $\Gamma_\infty(L) = \Gamma_\infty(G)G(p)/G(p)$ ([2], proposizione 5.2), affermiamo che il massimo sottogruppo divisibile di $\Gamma_\infty(L)$ è $MG(p)/G(p)$; infatti, detto $D/G(p)$ il massimo sottogruppo divisibile di $\Gamma_\infty(L)$, per quanto detto si ha $D = R \times G(p)$ e dunque $D/G(p) \cong$ $\cong R \leqslant \Gamma_\infty(G)$ è divisibile per cui si ha $RG(p) = MG(p)$. Allora $G/MG(p)$ è modulare (2.4); scriviamo $M = M_1 \times M_2$ in modo che sia $MG(p) =$ $= M_1 \times G(p)$: (M_1, M_2) è una coppia intersezione-distributiva ([7],

---

(7) Un gruppo G è supersolubile se e solo se ogni immagine omomorfa non identica di G contiene un sottogruppo normale ciclico non identico.

(8) Questo fatto è ben noto: una dimostrazione si può trovare nel lavoro di R. Baer, *Supersoluble groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955).

p. 3) e tale è anche $(M_1, G(p))$. Ora

$$\langle h_1, \dots, h_t\rangle MG(p)/MG(p) \cong$$
$$\langle h_1, \dots, h_t\rangle/(M_1G(p)) \cap \langle h_1, \dots, h_t\rangle = \langle h_1, \dots, h_t\rangle/M_1 \cap \langle h_1, \dots, h_t\rangle =$$
$$\langle h_1, \dots, h_t\rangle/(M_1 \times M_2) \cap \langle h_1, \dots, h_t\rangle \cong \langle h_1, \dots, h_t\rangle M/M$$

è modulare, come si voleva.

2.7. Lemma. Sia G un gruppo periodico e C un suo sottogruppo normale abeliano; supponiamo inoltre che G/C sia modulare localmente finito e che ogni sottogruppo di C sia di Dedekind in G. Se g è un elemento del centralizzante $\mathrm{C}_G(C)$ tale che ogni primo di $\omega(\langle g\rangle)$ sia maggiore di ogni primo di $\omega(C) \cap \omega(\mathrm{C}_G(C)/C)$, allora risulta $\langle g\rangle \leqslant_d G$.

Dimostrazione. Consideriamo la decomposizione $\mathrm{C}_G(C) = C_1 \times R$, ove C_1 è sottogruppo di C ed è di Hall in $\mathrm{C}_G(C)$, $C = C_1 \times C_2$ e $\omega(C_2) = \omega(C) \cap \omega(\mathrm{C}_G(C)/C)$. Poichè $\langle g\rangle \cap C_1 \leqslant_d G$ per ipotesi, è sufficiente provare che $\langle g\rangle \cap R \leqslant_d G$. Sia dunque $|g| = q^n$, $q \notin \omega(C)$, e siano $h_1, \dots, h_r$ elementi di G, con $|h_i|$ potenza di numero primo. Per ipotesi, $\langle g, h_1, \dots, h_r\rangle C/C = \langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_r\rangle$ è un gruppo modulare. Osserviamo che se $\bar{h}_i$ normalizza $\langle \bar{g}\rangle$ allora h_i normalizza $\langle g\rangle$; non è dunque restrittivo supporre $\langle \bar{g}\rangle \ntriangleleft \langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_r\rangle$. Pertanto abbiamo le seguenti due possibilità, previa opportuna numerazione ([7], p. 13): $\langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_r\rangle = \langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s\rangle \times \langle \bar{h}_{s+1}, \dots, \bar{h}_r\rangle$ dove $\langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s\rangle$ è un P_0^*-gruppo, $|\bar{h}_i| = p > q$ per $1 \leqslant i \leqslant s$, e

$$\left(|\langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s\rangle|, |\langle \bar{h}_{s+1}, \dots, \bar{h}_r\rangle|\right) = 1,$$

oppure $\langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_r\rangle = \langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s\rangle \times \langle \bar{h}_{s+1}, \dots \bar{h}_r\rangle$, dove il primo fattore del prodotto è un q-gruppo modulare e il secondo ha ordine primo con q. Supponiamo che si verifichi il primo caso: allora in $\langle \bar{g}, \bar{h}_i\rangle = \bar{H}_i$ $(i = 1, \dots, s)$ è $\langle \bar{g}\rangle^{\bar{H}_i} = \bar{H}_i \leqslant \mathrm{C}_G(C)/C$, per cui $h_i \in \mathrm{C}_G(C)$. Poichè $|\bar{h}_i| = p \notin \omega(C)$, allora risulta $|h_i| = p$ e in definitiva $K = \langle g, h_1, \dots, h_s\rangle \leqslant R$, $K \cap C_2 = \{1\}$ (si tenga presente che $\mathrm{C}_G(C)$ risulta un gruppo supersolubile e K è generato da elementi di ordine p e q^n, ove p e q sono maggiori di ogni primo in $\omega(C_2)$), per cui K è modulare ed ha proprio ordine $q^n p^m = |\langle \bar{g}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s\rangle|$, mentre $\langle g, h_1, \dots, h_r\rangle = K \times H$, dove H è generato da $h_{s+1}, \dots, h_r$; il prodotto è diretto perchè essendo $K \leqslant R$, $K \cap C_2 = \{1\}$, se un suo elemento è centralizzato modulo C, è realmente centralizzato. Infine $(|K|, |H|) = 1$ perchè $|K| = p^m q^n$, primo con $|\langle \bar{h}_{s+1}, \ldots, \bar{h}_r \rangle|$, d'altra parte

$$|\langle h_{s+1}, \ldots, h_r \rangle| = |\langle h_{s+1}, \ldots, h_r \rangle : \langle h_{s+1}, \ldots, h_r \rangle \cap C| \cdot |\langle h_{s+1}, \ldots, h_r \rangle \cap C| = \\ = |\langle \bar{h}_{s+1}, \ldots, \bar{h}_r \rangle| \cdot |\langle h_{s+1}, \ldots, h_r \rangle \cap C| ,$$

mentre $p, q \notin \omega(C)$. Allora il reticolo di $\langle g, h_1, \ldots, h_r \rangle$ è prodotto diretto dei reticoli di K e H ([7], p. 5) e poichè $\langle g \rangle$ è di Dedekind in K, $\langle g \rangle$ è di Dedekind in $\langle g, h_1, \ldots, h_r \rangle$. Secondo caso: $\langle \bar{g}, \bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_s \rangle$ è un q-gruppo modulare, quindi quasi-Hamiltoniano. Proviamo che, dato $h \in G$, risulta $\langle g \rangle \leqslant_a \langle g, h \rangle$ non appena $\langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$ è un q-gruppo e $|h| = q^t$. Infatti, posto $S = \langle x \in R \,|\, |x| = p_1^\alpha,\ p_1$ primo e $p_1 \geqslant q \rangle$, risulta $S \lhd G$, $S \cap C = \{1\}$, $\langle g, h \rangle = \langle h \rangle (\langle g, h \rangle \cap S)$ e dunque $\langle g, h \rangle \simeq \langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$, quasi-Hamiltoniano. Si conclude che $\langle g \rangle$ è quasi-normale in $\langle g, h_1, \ldots, h_r \rangle$ perchè se $y \in \langle g, h_1, \ldots, h_r \rangle$, allora $|y| = q^b c$, con $(c, q) = 1$; pertanto $\langle y \rangle = \langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle$ con $|y_1| = q^b$, $|y_2| = c$: per quanto visto, $\langle g \rangle$ è permutabile con $\langle y_1 \rangle$, mentre y_2 centralizza g. Infine $\langle g \rangle \leqslant_d G$ in virtù della proposizione 1.3, quindi il lemma è dimostrato.

2.7.1. Corollario. Sia G un gruppo periodico e C un suo sottogruppo normale abeliano. Se G/C è modulare localmente finito, se C è di Hall nel suo centralizzante e se ogni sottogruppo di C è di Dedekind in G, allora ogni sottogruppo del centralizzante $\mathfrak{C}_G(C)$ è di Dedekind in G.

Dimostrazione. Conseguenza immediata di 2.7 e di 1.2.

Siamo ora in grado di provare il teorema 2.5. La necessità è provata per il sottogruppo $N = \Gamma_\infty(G)$ (1.9, 2.6). Sufficienza. Osserviamo anzitutto che i), ii), assicurano che G è (q)-gruppo (1.10). Dimostriamo ora che per ogni $g \in G$ tale che $g \in \mathfrak{C}_G(M)$ risulta $\langle g \rangle \leqslant_d G$; a tale scopo esaminiamo anzitutto il caso $A = \{1\}$. Se diciamo C il sottogruppo di N tale che $\omega(C) = \omega(M)$ e massimale rispetto a tale proprietà, allora C è di Hall in N, e di conseguenza in G. Inoltre $\mathfrak{C}_G(C) = \mathfrak{C}_G(M)$ in quanto un elemento di G induce su C un automorfismo potenza. Il lemma 2.7 si può pertanto applicare a C, per concludere. Passiamo al caso $A \neq \{1\}$. E sia ora il sottogruppo di N massimale rispetto alla proprietà $\omega(E) = \omega(M \cap B)$; è $\mathfrak{C}_G(M) = \mathfrak{C}_G((M \cap B) \times A) = E \times R$, essendo E di Hall in G e nel centro di $\mathfrak{C}_G(M)$. Sia $g \in \mathfrak{C}_G(M)$: se $(|g|, 2) = 1$ mediante il lemma 2.7 si conclude $\langle g \rangle \leqslant_d G$. Sia ora $g \in \mathfrak{C}_G(M)$, $|g| = 2^n$. Proviamo anzitutto che un 2-sottogruppo di Sylow Q di G è D-gruppo. Infatti, se P/B è un 2-Sylowgruppo di G/B, allora P/B è D-gruppo per ii); inoltre $\Gamma_\infty(P/B) \leqslant AB/B$ perchè P/AB

è modulare (iii), risolubile, quindi nilpotente ([7]). Ma $A \leqslant Q$ perchè $A \lhd G$, dunque $\Gamma_\infty(P/B) \leqslant QB/B$: per 1.8, $QB/B \leqslant_d P/B$ e quindi $QB/B \cong Q$ è D-gruppo (1.13). Ora, se P/B è abeliano, per iv) possiamo ricondurci al caso $A = \{1\}$, assumendo $N = B$. Se invece P/B non è abeliano, allora è del tipo $\langle AB/B \times A_1/B, zB \rangle$ con $|z| = 2^m$, $z^{-1}az = a^{-1}$ per ogni $a \in A$, $z^2 \in AA_1$ (1.8); proviamo che esiste un 2-Sylowgruppo Q di G che contiene g e che non è modulare. Infatti, essendo $g \in \mathfrak{C}_G(A)$, risulta $g = aa_1$ per opportuni $a \in A$, $a_1 \in A_1$, $|a_1| = 2^r$: un coniugato z^x di z, per $x \in G$ opportuno, starà in un 2-Sylowgruppo di $\langle a_1, z \rangle$ che contiene a_1, pertanto $\langle a_1, z^x \rangle$ è un 2-gruppo: ma allora $\langle A, aa_1, z^x \rangle$ è un 2-gruppo che contiene g e che non è modulare, in quanto z^x induce su A l'inversione. Sia dunque Q un 2-Sylowgruppo di G tale che $g \in Q = \langle A \times A_2, z' \rangle$ $a^{z'} = a^{-1}$ per ogni $a \in A$, $A \times A_2$ ha indice 2 in Q: poichè $g \in \mathfrak{C}_G(A)$ è $g \in A \times A_2$. Proviamo che è $\langle g \rangle \leqslant_q \mathfrak{C}_G(M)$. Infatti, se $h \in \mathfrak{C}_G(M)$ e $|h| = q^m$, $q \neq 2$, allora $\langle h \rangle \langle g \rangle = \langle g \rangle \langle h \rangle$ perchè $\langle h \rangle \leqslant_d \leqslant_d G$ ([5]). Sia $|h| = 2^m$, e supponiamo che $\langle h \rangle$ e $\langle g \rangle$ non siano permutabili; poichè R/A è modulare, $\langle g, h \rangle A/A = \langle \bar{g}, \bar{h} \rangle$ è un P_0^*-gruppo non abeliano: non può essere un 2-gruppo altrimenti g e h starebbero in uno stesso 2-Sylowgruppo $T = \langle A \times A_3, z'' \rangle$, ma da $\langle g \rangle \leqslant \mathfrak{C}_T(A) = A \times A_3$ segue $\langle g \rangle <_q T$, essendo T (q)-gruppo. Allora consideriamo un P_0^*-gruppo, modulo A, del tipo $\langle \bar{g}, \bar{k} \rangle$, dove $|\bar{k}| = p > 2$, $k \in R$. Poichè $\langle g, k \rangle \leqslant R$, $\langle g, k \rangle$ è un P_0^*-gruppo anche modulo M; quindi $\langle \bar{z}', \bar{g}, \bar{k} \rangle$ è un P_0^*-gruppo, modulo M. In un P_0^*-gruppo un 2-sottogruppo di Sylow è ciclico, quindi sarà $\langle \bar{z}' \rangle \leqslant \langle \bar{g} \rangle$, $\langle \bar{g} \rangle \leqslant \langle \bar{z}' \rangle$, oppure $\bar{g}$ e $\bar{z}$ appartengono a 2-Sylowgruppi distinti. Ma da $\langle \bar{z}' \rangle \leqslant \langle \bar{g} \rangle$ segue $z' \in \mathfrak{C}_G(M)$, il che è contro l'ipotesi. Se fosse $\langle \bar{g} \rangle \lneqq \langle \bar{z}' \rangle$, $\bar{g}$ commuterebbe con $\bar{k}$, ancora contro l'ipotesi. Se $\bar{g}$ e $\bar{z}'$ appartengono a 2-Sylowgruppi distinti, allora $\langle g, z' \rangle$ non è un 2-gruppo, mentre $g, z' \in Q$. Si conclude $\langle g \rangle \leqslant_q \mathfrak{C}_G(M)$, quindi, essendo G (q)-gruppo, $\langle g \rangle \leqslant_q G$. Allora per ogni $g \in E \times R$ risulta $\langle g \rangle \leqslant_q G$, e dunque ogni sottogruppo di $\mathfrak{C}_G(M)$ è di Dedekind in G (proposizione 1.2).

Vediamo infine che in G la relazione di Dedekind è transitiva: siano $H \leqslant_d K \leqslant_d G$; decomponiamo M nei suoi fattori primari: $M = \prod_{i \varepsilon I} G_{p_i}$, dove $A = G_{p_0}$: se $H \leqslant \mathfrak{C}_G(M)$, allora $H \leqslant_d G$ come si è visto. Proviamo che se $H \nleqq \mathfrak{C}_G(G_{p_i})$ allora $H \geqslant G_{p_i}$. Sia anzitutto $x \in H$, $x \notin \mathfrak{C}_G(G_{p_i})$ con $G_{p_i} \neq A$: non è restrittivo assumere $|x| = q^n$, $(q \neq p_i)$. Sia α il massimo intero per cui $x^{q^\alpha} = x_1 \notin \mathfrak{C}_G(G_{p_i})$; allora se $y \in G_{p_i}$ è $|yx_1| = q \bmod \langle x_1^q \rangle$. Infatti in $\langle y, x_1 \rangle / \langle x_1^q \rangle$, $\langle \bar{y} \rangle$ è normale, quindi $q \mid |\bar{y}\bar{x}_1|$, e tale ordine non può essere composto, altrimenti x_1 commuterebbe con un elemento di G_{p_i}, e sarebbe $x_1 \in \mathfrak{C}_G(G_{p_i})$. Poichè $K \leqslant_d G$, se $y \notin K$ è $[\langle K, y\rangle/K] \simeq [\langle yx_1\rangle/\langle yx_1\rangle \cap K] = [\langle yx_1\rangle/\langle x_1^q\rangle]$. Allora deve essere $\langle K, y^{p_i}\rangle = \langle K, y\rangle$ oppure $\langle K, y^{p_i}\rangle = K$: ma da $\langle K, y^{p_i}\rangle = \langle K, y\rangle$ seguirebbe $y = y^{p_i m}k$, $k \in K$, da cui $y \in K$. Quindi è $y^{p_i} \in K$ per ogni $y \in G_{p_i}$, cioè $G_{p_i}^{p_i} \leqslant K$, ma essendo M divisibile risulta $G_{p_i}^{p_i} = G_{p_i} \leqslant K$. Analogamente, $G_{p_i} \leqslant H$. Sia ora $x \in H$, $x \notin \mathrm{C}_G(A)$, e x di ordine potenza di primo; risulta $|x| = 2^m$. Sia Q un 2-Sylowgruppo di G che contiene A e x (A è normale in G). Q non è abeliano e contiene un 2-gruppo divisibile non identico; pertanto Q non è modulare, ma è del tipo $\langle A \times A^*, z^*\rangle$, con $a^{z^*} = a^{-1}$ per ogni $a \in A$: allora $a^x = a^{-1}$ per ogni $a \in A$, e risulta $(xa)^2 = x^2$. Se $a \notin K$, poichè K è di Dedekind si ha $[\langle K, a\rangle/K] \simeq [\langle xa\rangle/\langle x^2\rangle]$ quindi $\langle K, a^2\rangle = \langle K, a\rangle$ oppure $\langle K, a^2\rangle = K$. Ma da $\langle K, a^2\rangle = \langle K, a\rangle$ segue $a \in K$ quindi è $\langle K, a^2\rangle = K$, $A^2 = A \leqslant K$, $A \leqslant H$ per lo stesso motivo. Allora da $H \leqslant_d K \leqslant_d G$ e $H \nleqslant \mathrm{C}_G(G_{p_i})$ per $i \in I_1 \subseteq I$ segue $\prod_{i \in I_1} G_{p_i} \leqslant H$: ma il gruppo $G/\prod_{i \in I_1} G_{p_i}$ soddisfa a i)-iv), quindi da $H/\prod_{i \in I_1} G_{p_i} \leqslant \mathrm{C}_{G/\prod G_{p_i}}\left(M/\prod_{i \in I_1} G_{p_i}\right)$ segue $H \leqslant_d G$, così G è D-gruppo, come si voleva.

Osservazione. In 2.5, iv) non è conseguenza di i)-iii), come prova il gruppo $\langle E \times A, g\rangle$ ottenuto estendendo un 3-gruppo abeliano elementare E mediante il 2-gruppo $\langle g\rangle \times A$, ove A è divisibile non identico e $g^{-1}xg = x^r$, $r \not\equiv 1 \bmod 3$, $r^2 \equiv 1 \bmod 3$ per ogni $x \in E$, $a^{-1}xa = x$ per ogni $a \in A$. È $\Gamma_\infty(G) = E$.

Con il teorema che segue si prova che la classe dei D-gruppi risolubili misti coincide con quella dei (q)-gruppi risolubili misti: in virtù di 1.6 è sufficiente dimostrare che:

2.8. Teorema, Un (q)-gruppo risolubile misto è un D-gruppo.

Dimostrazione. Tratteremo distintamente i due casi: G separato e G non separato. Sia G un (q)-gruppo risolubile misto separato. Escludiamo che G sia abeliano o quasi-Hamiltoniano: la struttura di G è descritta in 1.11, inoltre ogni sottogruppo di G^2 è quasi-normale in G ([3], lemma 1.2), quindi di Dedekind; siano H, K sottogruppi di G tali che $H \leqslant_d K \leqslant_d G$, e sia $H \nleqslant G^2$. Possiamo inoltre supporre che H contenga un elemento aperiodico x che induce su T_2 (notazioni di 1.11) una potenza non congrua ad 1 mod 4: infatti se H non contenesse un tale x sarebbe $H \leqslant \langle g^2 | g \in G,\ g \text{ aperiodico}\rangle \cup T = L \lhd G$; d'altra parte L è quasi-Hamiltoniano ([7]) quindi $H \leqslant_q L$, da cui segue $H \leqslant_q G$ essendo G (q)-gruppo. Supponiamo ora che per $h \in T_2$ sia $h \notin K$: risulta $[\langle K, h\rangle/K\rangle \simeq [\langle hx\rangle/\langle hx\rangle \cap K]$, dunque

$$[\langle K, h\rangle/\langle K, h^4\rangle] \simeq [\langle hx\rangle/\langle K, h^4\rangle \cap \langle hx\rangle];$$

poichè $x^{-1}hx \equiv h^{-1}$ modulo $\langle h^4 \rangle$, e di conseguenza $(xh)^2 \equiv x^2 \bmod \langle h^4 \rangle$, il reticolo $[\langle K, h \rangle / \langle K, h^4 \rangle]$ ha lunghezza 1, dunque $h^2 \in K$. In conclusione, $T_2^2 \leqslant K$; analogamente si prova che $T_2^4 = T_2^2 \leqslant H$, ma allora $H \leqslant_q G$ perchè G/T_2^2 è un gruppo quasi-Hamiltoniano. Sia ora G un (q)-gruppo risolubile misto non separato e siano H, K sottogruppi di G tali che $H \leqslant_d K \leqslant_d G$, con $H \nleqslant C$ e $z \in H$ (notazioni di 1.12). Per ogni $a \in A$ risulta $(za)^2 = z^2$, dunque se $a \notin K$ è $[\langle K, a \rangle / K] \simeq [\langle za \rangle / \langle z^2 \rangle]$. Allora $\langle K, a^2 \rangle = \langle K, a \rangle$, oppure $\langle K, a^2 \rangle = K$: poichè la prima uguaglianza implicherebbe $a \in K$, si conclude $a^2 \in K$ per ogni $a \in A$, quindi $A^2 = A \leqslant K$; per lo stesso motivo è $A \leqslant H$, ma G/A è modulare, quindi è $H \leqslant_d G$ e la dimostrazione è conclusa.

3. $\bar{D}$-gruppi.

Una sottoclasse della classe dei D-gruppi è quella dei $\bar{D}$-gruppi, definiti in analogia ai $\bar{T}$-gruppi ([4], n. 6). Un gruppo G è un $\bar{D}$-gruppo se e solo se ogni sottogruppo di G è un D-gruppo, ossia se da $H \leqslant_d \leqslant_d K \leqslant_d L \leqslant G$ segue $H \leqslant_d L$.

Poichè conosciamo la struttura dei D-gruppi risolubili, otteniamo facilmente il seguente

3.1. Teorema. Un gruppo risolubile è $\bar{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

Dimostrazione. La sufficienza è immediata. Necessità: sia G un $\bar{D}$-gruppo risolubile. Se G è periodico, ogni sottogruppo F di G finitamente generato è un D-gruppo finito risolubile: F è pertanto modulare, come segue dal teorema 2.5 (un gruppo finito è divisibile se e solo se è il gruppo identico), e G è modulare per 1.4. Sia ora G un $\bar{D}$-gruppo misto: un sottogruppo generato da un numero finito di elementi periodici è periodico (conseguenza di 1.12); G è così un gruppo separato e, se non è abeliano, ha la struttura descritta in 1.11: G è modulare se $\alpha_2(x) \equiv 1 \bmod 4$ (notazioni di 1.11) per ogni $x \in G$, x aperiodico. Supponiamo pertanto che sia $T_2^2 = T_2^4 \neq \{1\}$ e $\alpha_2(x) \not\equiv 1 \bmod 4$ per un $x \in G$, x aperiodico: non appena $y \in T_2$ con $|y| > 2$, $\langle x, y \rangle$ non è D-gruppo essendo $\langle y \rangle$ il suo 2-Sylowgruppo ed essendo $\langle y^2 \rangle \neq \langle y \rangle^4$ ma $\alpha_2(x) \not\equiv 1 \bmod 4$. Tale contraddizione permette di concludere.

Per la classe dei $\bar{D}$-gruppi finiti si può ottenere un risultato più completo.

3.2. PROPOSIZIONE. Ogni $\bar{D}$-gruppo finito è risolubile.

DIMOSTRAZIONE. Sia G un controesempio di ordine minimo. G è semplice, perchè se G avesse un sottogruppo normale non banale N si potrebbe concludere che N e G/N sono risolubili, dunque anche G. D'altra parte, ogni sottogruppo prioprio di G, essendo $\bar{D}$-gruppo, è risolubile, ma un $\bar{D}$-gruppo risolubile è modulare (3.1), dunque anche supersolubile: di conseguenza G è risolubile ([10], p. 718), assurdo.

Immediata conseguenza di 3.2 è il

3.3. TEOREMA. Un gruppo finito è $\bar{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

3.3.1. COROLLARIO. Un gruppo localmente finito è $\bar{D}$-gruppo se se e solo se modulare.

3.3.2. COROLLARIO. Un gruppo localmente risolubile è $\bar{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. G. KUROSH, *The theory of groups*, Chelsea, New York, 1956.

[2] F. MENEGAZZO, *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Padova, **40** (1968), pp. 1-15.

[3] F. MENEGAZZO *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva, II*, Rend. Sem. Mat. Padova, **42** (1969), pp. 389-399.

[4] D. J. S. ROBINSON, *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **60**, part 1 (1964), pp. 21-38.

[5] R. SCHMIDT, *Modular subgroups of finite groups, II*, Illinois J. Math., **14** (1970), pp. 344-362.

[6] S. E. STONEHEWER, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[7] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer (1958).

[8] G. ZACHER, *I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali*, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. scienze, s. VIII, **37** (1964), pp. 150-154.

[9] H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, 2-nd edition, Chelsea, New York (1958).

[10] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen, I*, Springer (1967).

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 agosto 1975.