

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALESSANDRO BELCASTRO

**Somme directe nella categoria degli spazi  
vettoriali topologici**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 54 (1975), p. 185-199

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1975\\_\\_54\\_\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__185_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Somme dirette nella categoria degli spazi vettoriali topologici.

ALESSANDRO BELCASTRO (\*)

### Introduzione.

È data una famiglia (anche infinita) di spazi vettoriali topologici  $(E_i)_{i \in I}$  su un corpo topologico  $k$ ; ricordiamo che uno spazio vettoriale topologico  $E$  ed una famiglia  $j_i: E_i \rightarrow E$  ( $i \in I$ ) di omomorfismi continui si dicono *somma diretta*, nella categoria degli spazi vettoriali topologici, della famiglia  $(E_i)_{i \in I}$  se per ogni spazio vettoriale topologico  $M$  e per ogni famiglia  $u_i: E_i \rightarrow M$  di omomorfismi continui, esiste uno ed uno solo omomorfismo continuo  $g: E \rightarrow M$  che rende commutativi i diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\sigma} & M \\
 \uparrow j_i & \nearrow u_i & \\
 E_i & & 
 \end{array}$$

Lo spazio somma diretta  $E$  è individuato a meno di isomorfismo, e viene indicato usualmente con il simbolo  $\bigoplus_{i \in I} E_i$ .

Ovviamente, se la famiglia è finita la sua somma diretta coincide con l'usuale prodotto diretto.

Analoga definizione di somma diretta si dà per la categoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi su  $\mathbf{R}$  oppure su  $\mathbf{C}$  (più

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, via L. B. Alberti, 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

in generale, per ogni categoria). Resta da provare, se possibile, l'esistenza della somma diretta nelle categorie in questione; nel secondo caso il problema è risolto da Bourbaki ([2], chap. II § 4, n. 5, Def. 2 e Prop. 6 e § 8 n.2); i risultati sono qui riassunti in 3.2.

Il primo caso sembra non sia stato finora affrontato (per famiglie infinite).

Questo lavoro prova l'esistenza delle somme dirette nella categoria degli spazi vettoriali topologici su un qualsiasi corpo topologico (cfr. 1.3): si tratta dello spazio vettoriale somma diretta (algebraica) degli spazi dati, munito della topologia più fine fra quelle compatibili con la struttura algebrica, e rendenti continue le inclusioni canoniche. Se il corpo base è valutato, viene data una caratterizzazione della topologia di somma diretta nel caso che la famiglia di spazi vettoriali topologici sia numerabile (cfr. 2.6). Nel caso in cui gli spazi dati siano localmente convessi (su  $\mathbf{R}$  oppure su  $\mathbf{C}$ ) lo spazio somma può non essere localmente convesso; lo è (cfr. 3.4 e 3.6) se e solo se la sottofamiglia degli addendi con topologia non grossolana è numerabile: allora e solo allora (cfr. 3.6) la somma diretta della famiglia considerata coincide con la somma diretta della stessa famiglia nella categoria degli spazi vettoriali localmente convessi (che è ovviamente localmente convessa); in caso contrario, la prima ha topologia strettamente più fine della seconda, sullo stesso supporto algebrico (la somma diretta algebrica).

Le dimostrazioni sono standard, tranne forse 2.6 e 3.6.

In appendice (§ 4 e § 5) vengono dati analoghi teoremi per la categoria dei gruppi topologici e dei moduli topologici su un anello topologico.

### Convenzioni.

Si considerano spazi vettoriali topologici definiti: nel 1° paragrafo, su un corpo topologico  $k$ ; nel secondo paragrafo, su un corpo valutato; nel 3° paragrafo, sui corpi  $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{C}$ . La citazione del corpo base è spesso omessa.

Per quanto riguarda la nomenclatura relativa agli spazi vettoriali topologici, oppure alla teoria delle categorie, si fa riferimento rispettivamente a [2] e [1].

Useremo inoltre i seguenti simboli:

**SV:** categoria degli spazi vettoriali e omomorfismi;

**SVT**: categoria degli spazi vettoriali topologici e omomorfismi continui;

$|-|$ : il funtore « forgetful » di **SVT** in **SV** che ad ogni spazio vettoriale topologico  $X$  associa lo spazio vettoriale « soggiacente » (analogamente sui morfismi); l'indicazione di tale funtore sui morfismi verrà sempre omessa.

Indichiamo inoltre

$$\sigma \leq \tau \quad (\sigma \text{ è meno fine di } \tau)$$

l'ordinamento del reticolo completo delle topologie su un dato insieme;  $(X, \sigma)$  denota invece lo spazio topologico ottenuto munendo l'insieme  $X$  della topologia  $\sigma$  (senza con ciò pretendere che quest'ultima sia compatibile con un'eventuale struttura vettoriale di  $X$ ).

### 1. Esistenza della somma diretta di spazi vettoriali topologici.

1.1. Si prova che, nella categoria degli spazi vettoriali topologici su un corpo topologico  $k$ , esiste la somma diretta di una qualsiasi famiglia di oggetti (1.3); alcune proprietà relative alla somma diretta sono data in 1.4 e 1.5.

1.2. È facile provare che, se una famiglia  $(E_i)_{i \in I}$  ha somma diretta  $E$  in **SVT**, allora il supporto algebrico  $|E|$  è somma diretta (algebrica) degli spazi vettoriali  $|E_i|$ ; in effetti il funtore  $|-|: \mathbf{SVT} \rightarrow \mathbf{SV}$  ha aggiunto a destra (il funtore  $b: \mathbf{SV} \rightarrow \mathbf{SVT}$  che munisce uno spazio vettoriale della topologia grossolana), quindi conserva le somme dirette. Tuttavia tale fatto è conseguenza del teorema seguente.

#### 1.3. TEOREMA. Esistenza della somma diretta in **SVT**.

Sia  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali topologici (indiciata su un qualsiasi insieme  $I$ ),  $\bigoplus |E_i|$  la somma diretta dei loro spazi vettoriali soggiacenti. Sia  $\Sigma$  l'insieme di tutte le topologie  $\sigma$  su  $\bigoplus |E_i|$ , compatibili con la struttura di spazio vettoriale di questo e tali che tutte le inclusioni canoniche

$$j_i: E_i \rightarrow (\bigoplus |E_i|, \sigma)$$

siano continue. Posto ancora

$$\tau = \sup \Sigma, \quad E = (\bigoplus |E_i|, \tau)$$

$E$  è uno spazio vettoriale topologico ([2], chap. 1, § 1, n. 7, corollario 4) e, insieme alle preesistenti inclusioni  $j_i: E_i \rightarrow E$ , rappresenta la somma diretta della famiglia  $(E_i)_{i \in I}$  nella categoria degli spazi vettoriali topologici.

**DIMOSTRAZIONE.** Le inclusioni canoniche  $j_i: E_i \rightarrow E$  sono continue, perchè munendo l'insieme soggiacente a  $\bigoplus |E_i|$  della topologia  $\varphi$  finale rispetto alla famiglia di inclusioni  $j_i: E_i \rightarrow \bigoplus |E_i|$  (cioè la topologia più fine per cui le  $j_i$  risultano continue), ogni  $\sigma \in \Sigma$  è meno fine di  $\varphi$ , quindi anche  $\tau$  è meno fine di  $\varphi$ .

Sia ora data una famiglia  $(u_i)_{i \in I}$  di omomorfismi continui  $u_i: E_i \rightarrow Y$  a valori in uno spazio vettoriale topologico  $Y$ ; se esiste un omomorfismo continuo  $g: E \rightarrow Y$  che rende commutativi i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & Y \\ \uparrow j_i & \nearrow u_i & \\ E_i & & \end{array}$$

allora, necessariamente:

$$g(x) = \sum u_i(x_i), \quad x = (x_i)_{i \in I}.$$

Definito  $g$  in tale modo, proviamo che è continuo.

Poniamo su  $|E|$  la topologia  $\tau_\sigma$  iniziale rispetto a  $g$  (cioè la topologia meno fine per cui  $g$  è continua). Allora ([2], chap. 1, § 1, n. 7, lemma alla prop. 7),  $(|E|, \tau_\sigma)$  è uno spazio vettoriale topologico e, poichè nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} (|E|, \tau_\sigma) & \xrightarrow{g} & Y \\ \uparrow j_i & \nearrow u_i & \\ E_i & & \end{array}$$

gli omomorfismi  $u_i$  e la  $g$  sono continue, segue da un noto teorema di topologia generale che le  $j_i$  sono tutte continue. Allora  $\tau_\sigma \in \Sigma$ , quindi è meno fine di  $\tau$ , e perciò  $g$  è continua anche rispetto a  $\tau$ .

1.4. Sia  $I$  un insieme,  $J$  un sottoinsieme di  $I$ ,  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali topologici. Si verifica facilmente che la topologia  $\tau'$  che  $\bigoplus_{i \in J} E_i$  ha in quanto somma diretta della famiglia  $(E_i)_{i \in J}$  nella

categoria degli spazi vettoriali topologici coincide con la topologia indotta da  $\bigoplus_{i \in I} E_i$ .

Infatti (come in ogni categoria dotata di somme diretta) è

$$\bigoplus_{i \in I} E_i = \left( \bigoplus_{i \in J} E_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in I-J} E_i \right).$$

Utilizzando l'esistenza dell'oggetto nullo, si prova che  $\bigoplus_{i \in J} E_i$  è retracts di  $\bigoplus_{i \in I} E_i$ , quindi la sua topologia è indotta da quella di quest'ultimo.

1.5. In modo parzialmente analogo a quanto fatto in [2] si può provare quanto segue:

Sia  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali topologici e sia  $E$  la loro somma diretta; per ogni  $i \in I$ , sia  $N_i$  un sottospazio di  $E_i$  e sia  $N$ , con topologia indotta la somma diretta degli  $N_i$  (in  $\mathbf{SV}$ ). Allora:

- 1) l'applicazione canonica  $h: \bigoplus_{i \in I} (E_i/N_i) \rightarrow E/N$  è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici;
- 2) se per ogni  $i \in I$ ,  $N_i$  è chiuso in  $E_i$ , allora  $N$  è chiuso in  $E$ ;
- 3) se ogni  $E_i$  è separato,  $E$  è separato e tutti i sottospazi  $E_i$  sono chiusi in  $E$ .

1.6. La categoria degli spazi vettoriali topologici, essendo additiva, e avendo conuclei e somme dirette, è cocompleta, cioè ha colimiti ([2], Cap. 2°; 2.5\*).

La completezza della categoria suddetta era già nota (derivando dall'esistenza dei nuclei e dei prodotti diretti).

## 2. Spazi vettoriali topologici su un corpo valutato.

2.1. In questo paragrafo  $k$  è sempre un corpo valutato.

Viene introdotta, su  $\bigoplus |E_i|$ , una topologia  $\tau_1$  dipendente dalla topologia degli  $E_i$ ; se  $I$  è numerabile,  $\tau_1$  coincide con la topologia di somma diretta (2.6), mentre in caso contrario ciò non avviene, per lo meno nel caso in cui gli  $E_i$  sono localmente convessi e non grossolani (3.4 e 3.6).

2.2. È noto ([2], pag. 9; prop. 4) che se  $X$  è uno spazio vettoriale topologico su un corpo valutato  $k$  esiste un sistema fondamentale  $B$  di intorni dello 0 tale che:

- 1)  $B \neq \emptyset$  e  $\emptyset \notin B$ ,
- 2) se  $U, U' \in B$  allora esiste  $W \in B$  tale che  $W \subset U \cap U'$ ,
- 3) se  $U \in B$  allora  $U$  è equilibrato e assorbente (\*),
- 4) se  $U \in B$  allora esiste  $W \in B$  tale che  $W + W \subset U$
- 5) se  $U \in B$  e  $0 \neq \lambda \in k$ , allora  $\lambda U \in B$ .

È anche noto che, viceversa, se  $X$  è uno spazio vettoriale (su  $k$ ) e  $B$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  verificante le proprietà suddette, allora esiste una ed una sola topologia su  $X$ , compatibile con la struttura di spazio vettoriale di  $X$ , per la quale  $B$  è un sistema fondamentale di intorni dello 0 di  $X$ .

Se  $X$  è uno spazio vettoriale topologico, chiamiamo *sistema normale* un sistema fondamentale di intorni dello 0 di  $X$  verificante le suddette proprietà.

2.3. Rileviamo esplicitamente che ogni elemento  $U$  di un sistema normale dello spazio  $X$ , soddisfa le seguenti proprietà:

- contiene lo 0 di  $X$  (essendo equilibrato),
- è simmetrico rispetto allo 0 (essendo equilibrato),
- per ogni sottospazio vettoriale non nullo  $W$  di  $X$ ,  $U \cap W$  è un sottoinsieme non nullo di  $X$ , simmetrico rispetto allo 0, a causa dell'assorbenza di  $U$ .

2.4. DEFINIZIONE. Sia  $(X_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali e, per ogni  $i \in I$ , sia  $A_i$  un sottoinsieme di  $X_i$  contenente lo 0. Sia inoltre  $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ : consideriamo il sottoinsieme  $A$  di  $X$  avente per elementi le famiglie  $(x_i)$  di  $X$  tali che  $x_i \in A_i$  per ogni  $i \in I$ .

Useremo la notazione:

$$A = \bigoplus_{i \in I}^* A_i$$

omettendo la specificazione dell'insieme degli indici quando non necessaria.

---

(\*)  $U$  è equilibrato se per ogni  $\lambda \in k$  tale che  $|\lambda| \leq 1$ , si ha  $\lambda U \subset U$ ;  $U$  è assorbente se per ogni  $x \in X$  esiste  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha > 0$  tale che se  $|\lambda| \geq \alpha$ ,  $x \in \lambda U$ .

2.5. **TEOREMA.** Sia  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali topologici, su un corpo valutato  $k$ , indicata su un qualsiasi insieme  $I$ .

Per ogni  $i \in I$ , sia  $B_i$  un sistema normale in  $E_i$ ; consideriamo i sottoinsiemi  $U$  di  $|E|(E = \bigoplus E_i$  in **SVT**) ottenibili come

$$U = \bigoplus_{i \in I}^* U_i \quad \text{dove } U_i \in B_i.$$

La famiglia  $B$  degli  $U$  così formati è un sistema normale in  $E$  per una topologia  $\tau_1$ , compatibile con la struttura vettoriale di  $|E|$ , rispetto alla quale le inclusioni canoniche  $j_i: E_i \rightarrow (E, \tau_1)$  sono continue;  $\tau_1$  dipende solo dalle topologie degli spazi  $E_i$ , e non dai sistemi normali  $B_i$  scelti per costruire  $B$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che la famiglia  $B$  dell'enunciato è un sistema normale, verificando le proprietà 1-5) di 2.2.

1) Banale.

2) Sia  $U = \bigoplus^* U_i$  e  $U' = \bigoplus^* U'_i$  con  $U_i, U'_i \in B_i$  per ogni  $i \in I$ . Essendo  $B_i$  normale esiste  $W_i \in B_i$  tale che  $W_i \subset U_i \cap U'_i$  si ha allora

$$\bigoplus^* W_i \subset \bigoplus^* (U_i \cap U'_i) = (\bigoplus^* U_i) \cap (\bigoplus^* U'_i) = U \cap U'.$$

3) Ogni  $U \in B$  è equilibrato.

Sia  $\lambda \in k$ ,  $|\lambda| < 1$  e  $U = \bigoplus^* U_i$  con  $U_i \in B_i$ .

Poichè ogni  $U_i$  è equilibrato, è  $\lambda U_i \subset U_i$ , allora

$$\lambda U = \lambda(\bigoplus^* U_i) = \bigoplus^* (\lambda U_i) \subset \bigoplus^* U_i = U.$$

Ogni  $U \in B$  è assorbente.

Sia  $U = \bigoplus^* U_i \in B$   $x \in E$ . Sia inoltre  $J$  il sottoinsieme finito di  $I$  su cui  $x$  ha coordinate non nulle, e  $E_J = \bigoplus_{i \in J} E_i$ . Allora  $x \in E_J$  e, chiaramente,  $U \cap E_J$  assorbe  $x$ .

4) Sia  $U = \bigoplus^* U_i$  con  $U_i \in B_i$ . Essendo  $B_i$  normale per ogni  $i \in I$ , esiste  $W_i \in B_i$  tale che  $W_i + W_i \subset U_i$ ; posto  $W = \bigoplus^* W_i$  si ha  $W + W \subset U$ .

5) Sia  $U = \bigoplus^* U_i$  con  $U_i \in B_i$  e  $0 \neq \lambda \in k$ . Allora  $\lambda U = \lambda(\bigoplus^* U_i) = \bigoplus^* (\lambda U_i) \in B$ .



La  $\tau_1$ -continuità delle inclusioni canoniche è ovvia; come è ovvio che se  $B'_i$  è un sistema normale « equivalente » a  $B_i$  per ogni  $i \in I$  il sistema normale  $B'$  ottenuto a partire dai  $B'_i$  è equivalente a  $B$ .

**2.6. TEOREMA.** Caratterizzazione delle somme dirette numerabili nella categoria degli spazi vettoriali topologici su un corpo valutato (\*).

Sia  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali topologici su un corpo valutato  $k$ , indicata su un insieme numerabile  $I$ ; detto  $X = \bigoplus_{i \in I} |E_i|$  la somma diretta degli spazi vettoriali soggiacenti agli  $E_i$ , lo spazio vettoriale topologico  $E = (X, \tau_1)$  ottenuto munendo  $X$  della topologia  $\tau_1$  (cfr. 2.5) è la somma diretta della famiglia  $(E_i)_{i \in I}$  nella categoria **SVT**.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $I = N^*$ , insieme di naturali positivi. È noto (2.5) che le inclusioni  $j_i: E_i \rightarrow X$  sono continue. Sia poi data una famiglia  $u_i: E_i \rightarrow F$  ( $i \in I$ ) di morfismi in **SVT**; se esiste un morfismo  $g: E \rightarrow F$  tale che

$$(1) \quad g \circ j_i = u_i$$

allora  $g$  è univocamente individuato, e:

$$(2) \quad g(x) = \sum_{i \in I} u_i(x_i), \quad x = (x_i)_{i \in I}.$$

Ciò assicura « l'unicità di  $g$  »; quanto « all'esistenza », basta provare che l'omomorfismo di spazi vettoriali  $g$  definito dalla (2) è continuo (da  $E = (X, \tau_1)$  in  $F$ ) ciò che è continuo nell'origine.

Sia  $V$  un intorno dello 0 in  $F$ ; definiamo per ricorrenza la famiglia decrescente  $(W_i)_{i \in I}$  di intorni di 0 in  $F$  mediante:

$$\begin{aligned} a) \quad & W_0 = V, \\ b) \quad & W_i + W_i \subset W_{i-1} \quad (\text{per ogni } i \geq 1) \end{aligned}$$

Sia inoltre  $U_i = u_i^{-1}(W_i)$ , intorno di 0 di  $E_i$ , e  $U = \bigoplus_{i \in I}^* U_i$ , intorno di 0 in  $E = (X, \tau_1)$ ; resta da provare che  $g(U) \subset V$ .

---

(\*) In effetti la dimostrazione seguente prova al tempo stesso l'esistenza (indipendentemente da 1.3) e la caratterizzazione voluta delle somme dirette numerabili.

Proviamo innanzitutto che data una famiglia finita  $(y_h)_{1 \leq h \leq n}$  di elementi di  $F$  tale che  $y_h \in W_{i_h}$  ( $1 \leq h \leq n$ ), gli interi  $i_1, i_2, \dots, i_n$  essendo supposti positivi e distinti tra loro, allora

$$\sum_{h=1}^n y_h \in V.$$

Permutando gli elementi  $y_1, \dots, y_n$ , si può sempre supporre

$$i_1 > i_2 > \dots > i_n > 0$$

giacchè tali indici sono positivi e distinti. Quindi:

$$y_1 \in W_{i_1} \subset W_{i_2}; \quad y_2 \in W_{i_2} \quad y_1 + y_2 \in W_{i_2} + W_{i_2} \subset W_{i_2-1} \subset W_{i_3}$$

e finalmente  $y_1 + y_2 + \dots + y_n \in W_{i_{n-1}} \subset W_0 = V$ .

Se ora  $x \in U$ ,  $g(x) = \sum_{i \in I} u_i(x_i)$  è somma finita di elementi non nulli di  $F$ :

$$y_h = u_{i_h}(x_{i_h}) \in W_{i_h} \quad (1 \leq h \leq n)$$

e gli interi  $i_1, i_2, \dots, i_n$  sono positivi ( $I = N^*$ ) e distinti tra loro.

Per quanto precede  $g(x) = \sum_{h=1}^n y_h \in V$ .

### 3. Somme dirette di spazi vettoriali topologici localmente convessi.

3.1. È noto (cfr. 3.2) che la categoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi ha somme dirette.

Questo paragrafo è dedicato allo studio delle somme dirette di spazi vettoriali localmente convessi, fatte nella categoria degli spazi vettoriali. I risultati sono raccolti in 3.5 dove si dimostra che tale somma è localmente convessa se e solo se la sottofamiglia degli addendi con topologia non grossolana è numerabile.

3.2. Indichiamo con **SLC** la categoria degli spazi (vettoriali topologici) localmente convessi su  $\mathbf{R}$  (resp. su  $\mathbf{C}$ ), con omomorfismi continui, e ancora con  $|-|: \mathbf{SLC} \rightarrow \mathbf{SV}$  il funtore che trascura la struttura topologica.

Ciò posto, da [2] chap. II, § 4, n. 5, Def. 2 e Prop. 6 (risp. e § 8, n. 2), risulta quanto segue. Sia  $I$  un insieme,  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali localmente convessi. Sia inoltre, per ogni  $i \in I$ ,  $B_i$  un sistema normale di intorni convessi in  $E_i$ ; e sia  $\bigoplus_{i \in I} |E_i|$  la somma diretta vettoriale degli  $E_i$ .

La famiglia  $B$  dei sottoinsiemi  $U$  di  $\bigoplus_{i \in I} |E_i|$  definiti da  $U = \Gamma(\bigcup_{i \in I} j_i(U_i))$  con  $U_i \in B_i$  e dove  $\Gamma(A)$  indica il convessizzato di  $A$ , è un sistema fondamentale di intorni convessi dello 0 per una topologia  $\tau_c$  che gode delle seguenti proprietà:

1)  $(\bigoplus_{i \in I} |E_i|, \tau_c)$  è uno spazio localmente convesso.

2)  $\tau_c$  è la più fine tra le topologie localmente convesse su  $\bigoplus_{i \in I} |E_i|$  che rendono continue le inclusioni canoniche (in particolare  $\tau_1 \leq \tau_c \leq \tau^*$ ), anche per 2.5).

3)  $(\bigoplus_{i \in I} |E_i|, \tau_c)$  è la somma diretta degli  $E_i$  nella categoria degli spazi vettoriali localmente convessi.

Di conseguenza  $\tau_c = \tau$  se e solo se  $\tau$  è localmente convessa.

3.3. Osserviamo che una famiglia di spazi vettoriali topologici  $(E_i)_{i \in I}$  ciascuno con topologia grossolana ha, come somma diretta, (sia in **SVT** che in **SLC**), la somma diretta algebrica munita della topologia grossolana (che è localmente convessa)\*\*). Grazie alla associatività della somma diretta, in ogni famiglia di spazi vettoriali topologici la sottofamiglia di quelli aventi topologia grossolana può essere sempre « sommata a parte ».

Pertanto in 3.5 b) potremo supporre, senza alterare la generalità dei casi, che tutti gli  $E_i$  abbiano topologia non grossolana (e quindi, siano non nulli).

3.4. Osserviamo ancora che se  $(E_i)_{i \in I}$  è una famiglia di spazi vettoriali topologici ed  $E$  la loro somma diretta, allora  $(|E|, \tau_1)$  è localmente convesso se e solo se ogni  $E_i$  è localmente convesso.

Infatti, se gli  $E_i$  sono localmente convessi per ogni  $i \in I$ , sia  $B_i$

(\*) Dove  $\tau$  è la topologia di somma diretta in **SVT** (vedi 1.3) e  $\tau_1$  la topologia definita in 2.5.

(\*\*) Siano:  $U$  un intorno dello 0 di  $E$ ,  $x \in E$  e  $J$  il sottoinsieme finito di  $I$  su cui  $x$  ha coordinate non nulle. Allora  $E_J = \bigoplus_{i \in J} E_i$ , quale somma diretta finita, ha topologia grossolana; quindi:  $U \cap E_J = E_J$ , e  $U$  contiene  $x$ .

un sistema normale di interni convessi di  $E_i$ ; proviamo la convessità di:

$$U = \bigoplus^* U_i \quad (U_i \in B_i)$$

Se  $x, y \in U$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ , sia  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ .

Dette  $z_i, x_i, y_i$ , le  $i$ -esime coordinate rispettivamente di  $z, x$ , e  $y$ , si ha  $z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i$ . Poichè  $U_i$  è convesso per ogni  $i \in I$ , e poichè  $x_i, y_i \in U_i$ , ne segue che  $z_i \in U_i$  e quindi che  $z \in U$ .

Il viceversa è ovvio.

**3.5. TEOREMA.** Somma diretta di spazi vettoriali localmente convessi nella categoria degli spazi vettoriali topologici.

Siano  $I$  un insieme,  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali localmente convessi,  $E$  la somma diretta degli  $E_i$  nella categoria **SVT**.

- a) se  $I$  è numerabile  $E$  è localmente convesso e coincide con la  $\bigoplus E_i$  nella categoria **SCL** (ovvero  $\tau = \tau_1 = \tau_c$ );
- b) se  $I$  è più che numerabile e gli  $E_i$  hanno topologia non grossolana,  $E$  non è localmente convesso.

**DIMOSTRAZIONE.**

- a) Se  $I$  è numerabile,  $\tau = \tau_1$  per 2.6, e quindi  $E$  è localmente convesso per 3.4.
- b) Conseguenza del teorema seguente.

**3.6. TEOREMA.** Sia  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali localmente convessi con topologia non grossolana (\*); per ogni  $i \in I$  sia  $P_i$  l'insieme delle seminorme continue in  $E_i$  ( $P_i$  definisce la topologia di  $E_i$ ), e sia  $P = \prod_{i \in I} P_i$  il prodotto cartesiano dei  $P_i$ .

Detta  $B$  la famiglia di sottoinsiemi di  $X = \bigoplus |E_i|$  del tipo  $U_{p, \varepsilon} = \{x = (x_i)_{i \in I} \in X \mid \sum_i (p_i(x_i))^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\}$  con  $p = (p_i)_{i \in I} \in P$ ,  $\varepsilon > 0$  si ha:

- a)  $B$  è un sistema normale in  $X$  per una topologia  $\tau_p$ , e quindi  $(X, \tau_p)$  è uno spazio vettoriale topologico.
- b) Le inclusioni canoniche  $j_i: E_i \rightarrow (X, \tau_p)$  sono continue.

---

(\*) Ciò equivale a dire che esiste una seminorma continua non nulla. In particolare gli  $E_i$  sono tutti non nulli.

- c) Se  $I$  è più che numerabile,  $U_{p,1}$  non contiene alcun sottoinsieme equilibrato, assorbente e convesso (qualsiasi sia  $p \in P$  tale che  $p_i \neq 0$  per ogni  $i \in I$ ).

**DIMOSTRAZIONE.**

a) Per dimostrare che la famiglia  $B$  dell'enunciato è un sistema normale, basta dimostrare che essa soddisfa le prime 4 proprietà dei sistemi normali ([2], Chap, 1, § 1, n. 6, Remarque 1)

1) Banale.

2) Siano  $U_{p,\varepsilon}, U_{p',\varepsilon'} \in B$ ; allora, detti  $q = \max(p, p')$  e  $\eta = \min(\varepsilon, \varepsilon')$  si ha facilmente  $U_{q,\eta} \subset U_{p,\varepsilon} \cap U_{p',\varepsilon'}$ .

3) Ogni  $U_{p,\varepsilon} \in B$  è equilibrato.

Sia  $\lambda \in \mathbf{R}$ , (risp.  $\lambda \in \mathbf{C}$ )  $|\lambda| < 1$ . Allora, se  $x \in U_{p,\varepsilon}$  dalla

$$\sum (p_i(\lambda x_i))^{\frac{1}{2}} \leq \sum |\lambda| (p_i(x_i))^{\frac{1}{2}} \leq \sum (p_i(x_i))^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

segue  $\lambda U_{p,\varepsilon} \subset U_{p,\varepsilon}$ .

Ogni  $U_{p,\varepsilon} \in B$  è assorbente.

Sia  $p = (p_i)_{i \in I}$  e  $\varepsilon > 0$ . Sia  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ , e sia  $n$  il numero di coordinate non nulle di  $x$ . Poichè  $p_i(0) = 0$ , esiste un reale  $\alpha > 0$  tale che

$$\left(\frac{p_i(x_i)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{per ogni } i \in I.$$

Se  $\lambda \in \mathbf{R}$  (risp.  $\lambda \in \mathbf{C}$ ) e  $|\lambda| \geq \alpha$  è

$$\sum \left(p_i\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sum \left(\frac{p_i(x_i)}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum \left(\frac{p_i(x_i)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

da cui discende  $x \in \lambda U_{p,\varepsilon}$ .

4) Sia  $U_{p,\varepsilon} \in B$ .

Allora  $U_{p,\varepsilon/2} + U_{p,\varepsilon/2} \subset U_{p,\varepsilon}$ ; infatti se  $x, y \in U_{p,\varepsilon/2}$  si ha

$$\sum (p_i(x_i + y_i))^{\frac{1}{2}} \leq \sum (p_i(x_i) + p_i(y_i))^{\frac{1}{2}} \leq \sum (p_i(x_i))^{\frac{1}{2}} + \sum (p_i(y_i))^{\frac{1}{2}} \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) La continuità delle inclusioni canoniche  $j_i: E_i \rightarrow (X, \tau_p)$  segue subito dalla relazione

$$j_i^{-1}(U_{p,\varepsilon}) = U_{p,\varepsilon} \cap E_i = \{x \in E_i \mid (p_i(x_i))^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\} = p_i^{-1}[0, \varepsilon^2]$$

valida per ogni  $i \in I$ ,  $p \in P$  e  $\varepsilon > 0$ .

e) Sia  $U_{p,1} \in B$ ,  $p \in P$  e  $p_i \neq 0$  per ogni  $i \in I$ ; supponiamo per assurdo che  $U_{p,1}$  contenga un insieme  $A$  equilibrato, assorbente e convesso.

Per ogni  $i \in I$  esiste  $y_i \in E_i$  tale che  $p_i(y_i) = 1$ ; essendo  $A$  assorbente, esiste una famiglia  $(\alpha_i)_{i \in I}$  di numeri reali strettamente positivi tali che  $\alpha_i y_i \in A$ , per ogni  $i \in I$ ; inoltre  $p_i(\alpha_i y_i) = \alpha_i$ .

Se ogni somma finita di elementi della famiglia  $(\alpha_i)_{i \in I}$  fosse maggiorata da 1, la famiglia data sarebbe sommabile e ne seguirebbe che tutti gli  $\alpha_i$ , tranne al più una quantità numerabile, sarebbero nulli ([3], chap. IV, § 7, n. 1, thèor. 1, e chap. III, § 4; cor. della prop. 1).

Esiste quindi un sottoinsieme finito  $J$  di  $I$  tale che  $\sum_{i \in J} \alpha_i > 1$ .

Poniamo

$$\alpha = \sum_{i \in J} \alpha_i, \quad \lambda_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}$$

per cui  $\sum_{i \in J} \lambda_i = 1$ .

Allora  $x = \sum_{i \in J} \lambda_i \alpha_i y_i \in A$ , per la convessità di  $A$ .

Ci rimane da dimostrare che  $x \notin U_{p,1}$ ; infatti

$$\sum_{i \in J} (p_i(x_i))^{\frac{1}{2}} = \sum (p_i(\lambda_i \alpha_i y_i))^{\frac{1}{2}} = \sum \left( \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha_i \right)^{\frac{1}{2}} = \sum \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha}} > \sum \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$$

dove l'ultima diseuguaglianza vale in quanto è  $\alpha > 1$ .

**3.7. COROLLARIO.** Sia  $(E_i)_{i \in I}$  una famiglia di spazi vettoriali localmente convessi,  $E$  la loro somma diretta nella categoria degli spazi vettoriali topologici.  $E$  è localmente convesso se e solo se la sottofamiglia degli addendi con topologia non grossolana è numerabile; in tal caso le somme dirette della famiglia  $(E_i)_{i \in I}$  in **SVT** e in **SLC** coincidono.

**DIMOSTRAZIONE.** Per 3.3, possiamo supporre che gli  $E_i$  siano non grossolani. Una implicazione è già dimostrata in 3.5a); l'altra è una conseguenza immediata di 3.6c) e del fatto che  $\tau \geq \tau_p$ .

#### 4. Appendice: somme dirette di gruppi topologici.

4.1. Indichiamo con **GT** la categoria dei gruppi topologici. Analogamente a quanto fatto in [2], chap. 1, § 1, n. 7, è possibile dimostrare

che se  $f: G \rightarrow H$  è un omomorfismo da un gruppo  $G$  in un gruppo topologico  $H$ , la topologia controimmagine (mediante  $f$ ) della topologia di  $H$  è compatibile con la struttura di gruppo di  $G$ ; da cui segue ([2], stesso riferimento) che, in un gruppo, la topologia estremo superiore di una famiglia di topologie compatibili con la struttura di gruppo è compatibile con la struttura di gruppo.

4.2. In analogia con 1.3 si dimostra che, data una famiglia  $(G_i)_{i \in I}$  di gruppi topologici, la somma diretta della stessa si ottiene munendo la somma diretta algebrica della topologia più fine fra quelle compatibili con la struttura di gruppo che rendono continue le inclusioni canoniche. Si può inoltre dimostrare che, nella categoria **GT**, valgono proprietà analoghe alle 1.4, 1.5, 1.6.

4.3. In un gruppo topologico  $G$ , chiamiamo *sistema normale* un sistema fondamentale di intorni  $B$  dell'identità di  $G$  che verifica le seguenti proprietà:

- 1)  $B \neq \emptyset$ ;  $\emptyset \notin B$ ;
- 2) se  $U, U' \in B$  allora esiste  $W \in B$  tale che  $W \subset U \cap U'$ ;
- 3) se  $U \in B$ , esiste  $V \in B$  tale che  $V \cdot V \subset U$ ;
- 4) se  $U \in B$ , esiste  $V \in B$  tale che  $V^{-1} \subset U$ ;
- 5) se  $g \in G$  e  $U \in B$ , esiste  $V \in B$  tale che  $gUg^{-1} \subset U$ .

4.4. Sussiste il seguente teorema (analogo a 2.5): Sia  $(G')_{i \in I}$  una famiglia di gruppi topologici indicata su un insieme qualsiasi  $I$ . Per ogni  $i \in I$ , sia  $B_i$  un sistema normale in  $G_i$ , consideriamo i sottoinsiemi  $U$  di  $|G|$  ( $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$  in **GT**;  $|G|$  gruppo «soggiacente» di  $G$ ) ottenibili come

$$U = \bigoplus_{i \in I}^* U_i$$

dove  $U_i \in B_i$  (e dove  $\bigoplus^*$  ha lo stesso significato che in 2.4). La famiglia  $B$  degli  $U$  così formati è un sistema normale in  $G$  per una topologia  $\tau_1$ , compatibile con la struttura di gruppo di  $G$ , rispetto alla quale le inclusioni canoniche  $j_i: G_i \rightarrow G$  sono continue.  $\tau_1$  dipende dalle topologie dei  $G_i$  ma non dai sistemi normali  $B_i$  scelti per costruire  $B$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che la famiglia  $B$  dell'enunciato è un sistema normale, verificando le proprietà di 4.3.

- 1) e 2) sono evidenti.
- 3) Corrisponde alla 4) di 2.5 scritta in forma moltiplicativa.
- 4) Siano  $U = \bigoplus^* U_i \in B$  e  $W_i \in B_i$  tali che  $W_i^{-1} \subset U$ , allora, posto  $W = \bigoplus^* W_i$ , si ha  $W^{-1} \subset U$ .
- 5) La proprietà vale su ogni  $i$ -esimo spazio, da cui si deduce facilmente la sua validità totale.

Le altre proprietà enunciate si dimostrano come in 2.5.

**4.5. TEOREMA.** Sia  $(G_i)_{i \in I}$  una famiglia di gruppi topologici indicata su un insieme numerabile  $I$ ;  $X$  la somma diretta dei gruppi soggiacenti ai  $G_i$ , il gruppo topologico  $G = (X, \tau_1)$  ottenuto munendo  $X$  della topologia  $\tau_1$  (cfr. 4.4) è la somma diretta della famiglia  $(G_i)_{i \in I}$  nella categoria **GT**.

**DIMOSTRAZIONE.** Si ottiene da quella di 2.6 sostituendo sistematicamente il termine « spazio vettoriale topologico » col termine « gruppo topologico ».

4.6. Si noti che, come si deduce subito da 3.4, la topologia  $\tau_1$  (cfr. 4.4) non è, in generale, quella di somma diretta.

## 5. Somme dirette di moduli topologici su un anello topologico.

Seguendo la via indicata in 4.1 e in 4.2, è possibile estendere tutti i teoremi del primo paragrafo alla categoria dei moduli topologici su un anello (commutativo o meno, con o senza identità) topologico. Omettiamo l'enunciato dei risultati e la loro verifica.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] B. MITCHELL, *Theory of Categories*, Academic Press, New York and London, 1965.
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces Vectoriels topologiques*, II ed., Hermann, Paris, 1966.
- [3] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, II ed., Hermann, Paris, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1974 e in forma riveduta il 23 dicembre 1974.