Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Edvige Pucci

Esistenza e determinazione delle precessioni semiregolari ad asse verticale di un corpo rigido in un campo di forze newtoniano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 133-146

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__133_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 54 (1975)

Esistenza e determinazione delle precessioni semiregolari ad asse verticale di un corpo rigido in un campo di forze newtoniano.

Edvige Pucci (*)

Nell'ambito della ricerca di moti di assegnata caratterizzazione cinematica, dinamicamente possibili per un solido con un punto fisso soggetto a forze newtoniane in seconda approssimazione, sono state studiate in modo completo le classi di precessioni regolari degeneri e non degeneri [1, 2, 3]. Si è riconosciuto che le uniche classi di precessioni regolari non degeneri dinamicamente possibili sono precessioni regolari con asse di precessione parallelo alla congiungente il punto fisso 0 con il centro di attrazione Q (verticale) sia per il solido asimmetrico che per il giroscopio.

Nel caso classico del solido pesante (forze newtoniane in prima approssimazione) è stato risolto il problema della possibilità dinamica di moti di precessione semiregolare ad asse verticale, cioè di moti precessionali in cui una componente della velocità angolare varia nel tempo, mentre l'altra rimane costante. Si è riconosciuto che non sono dinamicamente possibili moti di precessione semiregolari con velocità di precessione variabile e velocità di rotazione propria costante (I specie) [4]. È stata invece determinata da G. Grioli [5] una classe di precessioni semiregolari in cui è costante la velocità di precessione e varia nel tempo la velocità di rotazione propria (II specie).

Si pone qui il problema di vedere se, nel caso in cui la sollecitazione è valutata in seconda approssimazione, esistono classi di precessioni semiregolari ad asse verticale che siano dinamicamente possibili; queste

---

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Perugia.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

classi potrebbero essere o analoghe a quelle che sono possibili per il solido pesante, oppure ampliamenti della classe delle precessioni regolari determinate in [2], riducendosi come queste alla quiete quando si trascuri il termine correttivo.

È possibile in tutta generalità fissare un riferimento solidale $R\Gamma(0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ in cui $\boldsymbol{i}_3$ sia parallelo all'asse di figura e rispetto al quale l'omografia d'inerzia del corpo assuma la forma ridotta

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}.$$

Per moti di precessione ad asse verticale (di versore $\boldsymbol{c}$) la velocità angolare ha la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{i}_3 .$$

Nel seguito per la ricerca di condizioni necessarie per la possibilità dinamica di precessioni semiregolari ci si basa principalmente sugli integrali primi classici delle equazioni di Eulero e di Poisson che hanno la forma:

$$(1) \qquad (\nu^2 + \eta)(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2 - 2A'c_2c_3 - 2B'c_1c_3) + \\ + 2\mu\nu(-B'c_1 - A'c_2 + Cc_3) + C\mu^2 + \\ + 2\xi_1c_1 + 2\xi_2c_2 + 2\xi_3c_3 = 2E_0$$

e

$$(2) \qquad \nu(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2 - 2A'c_2c_3 - 2B'c_1c_3) + \\ + \mu(-B'c_1 - A'c_2 + Cc_3) = k,$$

in cui si sono usate le notazioni abituali (¹).

Sussiste inoltre la relazione

$$c_3 = \text{costante}$$

(¹) Per le notazioni cfr. [2] e [3].

che caratterizza nel riferimento scelto le precessioni ad asse verticale, ed accanto a questa l'integrale primo particolarizzato

$$c_1^2 + c_2^2 = a^2 = 1 - c_3^2 \,. \tag{3}$$

1. Precessioni semiregolari di prima specie.

Nelle precessioni semiregolari di prima specie varia in genere nel tempo la velocità di precessione ν mentre rimane costante la velocità di rotazione propria μ.

Una condizione necessaria per la possibilità dinamica del moto è che siano compatibili le (1), (2) e (3) nelle variabili di moto $c_1 = c_1(t)$ $c_2 = c_2(t)$, $\nu = \nu(t)$ nel senso che le tre equazioni algebriche abbiano infinite soluzioni nelle tre variabili c_1, c_2, ν ([2]). Risulta vantaggioso sostituire alla (1) l'equazione più semplice che si ottiene da una combinazione di (1) e (2):

$$\begin{aligned}\eta(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2 - 2A'c_2c_3 - 2B'c_1c_3) &+ \\ + \mu\nu(-B'c_1 - A'c_2 + Cc_3) + k_c + C\mu^2 &+ \\ + 2\xi_1c_1 + 2\xi_2c_2 + 2\xi_3c_3 - 2E_0 &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

Le equazioni (2) e (4) sono entrambe lineari nella variabile ν con coefficienti che sono polinomi in c_1 e c_2; ponendo

$$P_1 = -\mu B'c_1 - \mu A'c_2 + k_c + C\mu c_3$$

$$\begin{aligned}Q_2 = -\eta Ac_1^2 - \eta Bc_2^2 + (2\eta B'c_3 - 2\xi_1)c_1 + (2\eta A'c_3 - 2\xi_2)c_2 &+ \\ + (-C\mu^2 - \eta Cc_3^2 - 2\xi_3c_3 + 2E_0)&\end{aligned}$$

$$R_2 = Ac_1^2 + Bc_2^2 - 2B'c_1c_3 - 2A'c_2c_3 + Cc_3^2$$

$$S_1 = B'\mu c_1 + A'\mu c_2 + k_c - C\mu c_3$$

([2]) Le (1), (2), (3) ammettono in generale un numero finito di soluzioni, ma i moti corrispondenti ad una soluzione c_1, c_2, ν sono rotazioni uniformi intorno alla verticale; d'altra parte se le soluzioni sono infinite essendo costituite da uno o più valori della coppia c_1, c_2 ad ognuno dei quali corrispondano infiniti valori di ν, i moti corrispondenti sono rotazioni non uniformi; mentre dette equazioni assumono la forma:

$$(4') \qquad P_1 \nu - Q_2 = 0$$

e

$$(2') \qquad R_2 \nu - S_1 = 0 .$$

Eliminando tra (2′) e (4′) si ottiene

$$(5) \qquad \Phi(c_1, c_2) \equiv P_1 S_1 - Q_2 R_2 = 0 .$$

Poichè in una precessione semiregolare di prima specie c_1 e c_2 assumono tutti i valori reali soddisfacenti la (3), la compatibilità del moto con gli integrali primi comporta che la quartica rappresentata in $R^2(c_1, c_2)$ dalla (5) contenga tutti i punti della circonferenza rappresentata dalla (3), sia reali che complessi, propri ed impropri. Si deduce una condizione necessaria per la possibilità dinamica del moto imponendo che la (5) passi per i punti ciclici di $R^2(c_1, c_2)$. Per fare questo è sufficiente considerare soltanto i termini di grado massimo della Φ che si ottengono per altro soltanto nel prodotto $Q_2 R_2$, si riconosce allora agevolmente che la condizione di passaggio per i punti ciclici è verificata se e solo se

$$A = B .$$

Eventuali precessioni semiregolari sono dunque dinamicamente possibili soltanto se l'asse di figura è ortogonale ad una sezione ciclica dell'ellissoide d'inerzia. Essendo $A = B$ si può inoltre, in tutta generalità, assumere $B' = 0$ [3].

---

se le soluzioni sono infinite essendo costituite da uno o più valori di ν ad ognuno dei quali corrispondano infiniti valori per la coppia c_1, c_2 i moti corrispondenti sono precessioni regolari. Le precessioni semiregolari cercate corrispondono invece ad un numero infinito di soluzioni in cui i valori di c_1, c_2 varino in modo tale che ad ognuno di questi valori sia associato uno o più valori di ν, i quali variano al variare di c_1, c_2.

[3] Cfr. [6].

Con queste condizioni scompaiono in Q_2 ed R_2 i termini di secondo grado e si hanno le forme semplificate:

$$P_1' = -\mu A' c_2 + k_c + C\mu c_3$$

$$Q_2' = -2\xi_1 c_1 + (2A'\eta c_3 - 2\xi_2)c_2 + (-C\mu^2 - C\eta c_3^2 - A\eta a^2 - 2\xi_3 c_3 + 2E_0)$$

$$R_2' = -2A' c_2 c_3 + C c_3^2 + A a^2$$

$$S_1' = A' \mu c_2 + k_c - C\mu c_3$$

e quindi la (5) diventa:

$$P_1' S_1' - Q_2' R_2' = a_0 c_2^2 + a_1 c_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_2 + a_4 = 0 \tag{6}$$

con

$$a_0 = -4\xi_1 A' c_3$$

$$a_1 = 4\eta A'^2 c_3^2 - 4\xi_2 A' c_3 - \mu^2 A'^2$$

$$a_2 = 2\xi_1 (A a^2 + C c_3^2)$$

$$a_3 = 2(A a^2 + C c_3^2)(\xi_2 - \eta A' c_3) - 2A'\eta c_3 (A a^2 + C c_3^2) - 2A' c_3 (2\xi_3 c_3 - 2E_a)\,.$$

$$a_4 = \eta (A a^2 + C c_3^2)^2 + A C a^2 \mu^2 + (A a^2 + C c_3^2)(2\xi_3 c_3 - 2E_0) + k_c^2$$

La conica (6) non può mai coincidere con la circonferenza perchè manca il termine in c_1^2 e quindi condizione necessaria e sufficiente per la possibilità del moto è che la (6) risulti identicamente soddisfatta.

Si conclude quindi che sono compatibili con gli integrali primi tutti i moti di precessione che avvengono con le condizioni strutturali e di moto:

$$A = B; \qquad B' = 0; \qquad \xi_1 = 0;$$

$$\mu^2 A'^2 + 4\xi_2 A' c_3 - 4\eta A'^2 c_3^2 = 0$$

$$\eta (A a^2 + C c_3^2)^2 + A C a^2 \mu^2 + (A a^2 + C c_3^2)(2\xi_3 c_3 - 2E_0) + k_c^2 = 0$$

$$(\xi_2 - \eta A' c_3)(A a^2 + C c_3^2)^2 + A' c_3 k_c^2 + A C A' a^2 \mu^2 c_3 = 0$$

Questi moti avvengono con velocità di precessione

$$\nu = \frac{S_1'}{R_2'} = \frac{k_c + \mu A' c_2 - C\mu c_3}{A a^2 + C c_3^2 - 2A' c_2 c_3} \tag{7}$$

da cui tenendo conto delle equazioni di Poisson si ottiene:

$$\dot{\nu} = \frac{\dot{S}_1' R_2' - S_1' \dot{R}_2'}{(R_2')^2} = \frac{-A' c_1[\mu^2 A a^2 - \mu^2 C c_3^2 + 2\mu c_3 k_c]}{(A a^2 + C c_3^2 - 2A' c_2 c_3)^2}\,. \tag{8}$$

I moti compatibili con gli integrali primi verificano anche le equazioni che si ottengono proiettando la seconda equazione cardinale sulle direzioni di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{c}$. È chiaro quindi che risulta verificata da tutti i moti compatibili con gli integrali primi anche la terza equazione di Eulero essendo $\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{c}$ complanari.

Per la possibilità dinamica del moto è sufficiente che sia verificata una delle prime due equazioni di Eulero, perchè in genere $\boldsymbol{i}_1$ ed $\boldsymbol{i}_2$ sono complanari ad $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{c}$ soltanto in istanti isolati.

La seconda equazione di Eulero nelle condizioni strutturali e di moto assegnate assume la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(A c_2 - A' c_3) + \nu^2(A c_1 c_3 - C c_1 c_3 + A' c_1 c_2) - C\mu c_1 \nu = \\ = -\xi_3 c_1 + \eta(A - C) c_1 c_3 + \eta A' c_1 c_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Esprimendo ν e $\dot{\nu}$ in funzione di c_1 e c_2 per mezzo di (7) e (8) si ottiene:

$$\begin{aligned} c_1\{-TA'(A c_2 - A' c_3) + S_1'^2(A c_3 - C c_3 + A' c_2) - C\mu S_1' R_2' + \\ + R_2'^2[\xi_3 - \eta(A - C) c_3 - \eta A' c_2]\} = 0 \end{aligned}$$

dove si è posto $T = \mu^2 A a^2 - \mu^2 C c_3^2 + 2\mu c_3 \mathrm{k}_c$.

Essendo c_1 non identicamente nullo deve risultare nulla l'espressione tra parentesi che è un polinomio in c_2 del terzo ordine, la quale per altro, poichè c_2 assume infiniti valori deve avere nulli tutti i coefficienti. Deve quindi essere:

$$A'^3(\mu^2 - 4\eta c_3^2) = 0$$

$$A'^2\{\mu^2 c_3(A - C) + 2\mu k_c - 4c_3[\eta(A - C) c_3 - \xi_3] + 4\eta c_3(A a^2 + C c_3^2)\} = 0$$

$$\begin{aligned} A'\{-AT + 2\mu A c_3(k_c - C\mu c_3) + (k_c - C\mu c_3)^2 - \mu^2 C(A a^2 + C c_3^2) + \\ + 4c_3(A a^2 + C c_3^2)[(A - C)\eta c_3 - \xi_3] - \eta A'(A a^2 + C c_3^2)^2\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'^2 T c_3 + (k_c - C\mu c_3)^2(A - C) c_3 - C\mu(k_c - C\mu c_3)(A a^2 + C c_3^2) - \\ - (A a^2 + C c_3^2)[\eta(A - C) c_3 - \xi_3] = 0\,. \end{aligned}$$

Si riconosce che sono dinamicamente possibili moti di precessione se sono verificate queste condizioni:

$$a)\ A = B;\ A' = B' = 0;\ \xi_1 = \xi_2 = 0;$$

$$(k_c - C\mu c_3)^2(A - C)c_3 - C\mu(k_c - C\mu c_3)(Aa^2 + Cc_3^2) - \\ - (Aa^2 + Cc_3^2)[\eta(A - C)c_3 - \xi_3] = 0;$$

$$\eta(Aa^2 + Cc_3^2)^2 + ACa^2\mu^2 + (Aa^2 + Cc_3^2)(2\xi_3 c_3 - 2E_0) + k_c^2 = 0 .$$

oppure queste condizioni:

$$b)\ A = B;\ B' = 0;\ \xi_1 = \xi_2 = 0;\ \xi_3 = -2C\eta c_3;$$

$$\mu = \pm 2c_3\sqrt{\eta}; \qquad E_0 = \eta(Aa^2 - Cc_3^2); \qquad k_c = 2\eta c_3(Cc_3^2 - Aa^2)/\mu .$$

Nel caso *a*) da (7) risulta $\nu =$ costante e si ritrovano le precessioni regolari del giroscopio. Nel caso *b*) sostituendo in (7) i valori di μ e k_c si ottiene $\nu = \mp\sqrt{\eta}$, per cui anche in questo caso moti dinamicamente possibili sono precessioni regolari, e sono i moti di precessione regolare del corpo rigido asimmetrico individuati da E. Bentsik [2].

2. Precessioni semiregolari di seconda specie.

Nelle precessioni semiregolari di seconda specie varia in genere nel tempo la velocità di rotazione propria μ mentre rimane costante la velocità di precessione ν.

Una condizione necessaria per la possibilità dinamica del moto è che sia compatibile il sistema Σ delle tre equazioni algebriche (1), (2) e (3) nelle variabili di moto $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$, $\mu = \mu(t)$. Se si escludono precessioni degeneri in rotazioni attorno alla verticale (già determinate in [3]) tale compatibilità va intesa nel senso che il sistema Σ ammette infinite soluzioni reali corrispondenti ad infiniti valori per la coppia c_1, c_2. Escluso il caso in cui $\nu = 0$ (precessioni degeneri in rotazioni) il sistema Σ è equivalente al sistema Σ' costituito da (2), (3) e da:

$$(10) \qquad \mu(\nu^2 - \eta)(-B'c_1 - A'c_2 + Cc_3) + C\mu^2\nu + \\ + 2\nu(\xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \xi_3 c_3 - E_0) + k_c(\nu^2 + \eta) = 0$$

ottenuta combinando (1) e (2).

In $R^3(c_1, c_2, \mu)\Sigma'$ rappresenta un sistema di tre quadriche e la condizione necessaria enunciata si traduce nell'esistenza di una curva algebrica reale comune alle tre superficie che non si riduca ad un numero finito di generatrici del cilindro rappresentato da (3). Questa eventuale curva che è al più del quarto ordine ha intersezioni reali o complesse, proprie o improprie con ogni piano π in numero uguale al suo ordine: queste intersezioni sono i punti comuni alle curve intersezioni delle tre superficie con il piano π.

Le curve intersezioni di dette superficie con il piano improprio π_∞ hanno equazioni:

$$(2') \qquad \nu(Ac_1^2 + Bc_2^2) - \mu(B'c_1 + A'c_2) = 0$$

$$(3') \qquad c_1^2 + c_2^2 = 0$$

$$(10') \qquad \mu[(\nu^2 - \eta)(B'c_1 + A'c_2) - C\mu\nu] = 0 \,.$$

Le $(2')$ e $(3')$ hanno due intersezioni riunite in $(0, 0, 1)$, mentre per questo punto non passa la $(10')$ essendo $C \neq 0$. Le intersezioni comuni alle tre coniche del piano π_∞ sono le due ulteriori intersezioni di $(2')$ e $(3')$ se per queste passa $(10')$; l'eventuale curva Γ comune alle tre superficie è dunque al più del secondo ordine ([4]), e quindi è piana. La conica $(3')$ è costituita, se si eccettua il punto $(0, 0, 1)$ tutta da punti complessi coniugati, mentre la $(10')$ è costituita dalle due rette r di equazione $\mu = 0$ ed s di equazione $(\nu^2 - \eta)(B'c_1 + A'c_2) - C\mu\nu = 0$. Poichè è necessario che la curva Γ sia reale, se ad essa appartiene un punto complesso deve appartenere anche il complesso coniugato. Questo comporta che la Γ passa o per i punti di intersezione di $(3')$ con r o per i punti di intersezione di $(3')$ con s. L'eventuale conica Γ appartiene dunque o ad un piano del fascio per r o ad un piano del fascio per s. Nel primo caso la Γ appartiene ad un piano $\mu =$ costante e quindi eventuali moti sono precessioni regolari; nel secondo caso la Γ appartiene ad un piano π_λ di equazione

$$(11) \qquad (\nu^2 - \eta)(-B'c_1 - A'c_2) + C\mu\nu + \lambda = 0 \,.$$

([4]) Potrebbe infatti verificarsi che i punti comuni siano punti isolati comuni alle tre superficie.

Le intersezioni di s e (3′) sono i due punti di coordinate

$$\big(iC\nu,\ C\nu,\ (\nu^2-\eta)(A'+iB')\big) \quad \text{e} \quad \big(-iC\nu,\ C\nu,\ (\nu^2-\eta)(A'-iB')\big)\,.$$

La (2′) passa per questi punti se è verificata la relazione

$$C\nu^2(B-A)+(\nu^2-\eta)(B'^2-A'^2\pm 2iA'B')=0$$

che equivale alle due condizioni:

$$C\nu^2(B-A)+(\nu^2-\eta)(B'^2-A'^2)=0\,;\qquad A'B'(\nu^2-\eta)=0\,. \tag{12}$$

La curva Γ esiste quindi al più nei tre casi:

a) $\nu^2=\eta$; $\quad A=B$.

b) $B'=0$; $\quad C\nu^2(B-A)-A'^2(\nu^2-\eta)=0$.

c) $A'=0$; $\quad C\nu^2(B-A)+B'^2(\nu^2-\eta)=0$.

Nel caso *a*) i piani del fascio (11) sono piani $\mu=$ costante e quindi eventuali precessioni sono regolari. I casi *b*) e *c*) sono equivalenti, infatti si può ottenere un caso dall'altro semplicemente scambiando $\boldsymbol{i}_1$ con $\boldsymbol{i}_2$; per questo si discute il solo caso *b*) in cui si esclude che risulti $A'(\nu^2-\eta)=0$ perchè questa condizione, unitamente a $B'=0$ porterebbe per (11) ancora a precessioni regolari.

L'eventuale curva Γ è rappresentata dal sistema Σ^* delle quattro superficie:

$$(\nu^2-\eta)A'c_2-C\mu\nu=\lambda \tag{13}$$

$$\mu(\nu^2-\eta)(-A'c_2+Cc_3)+C\mu^2\nu+ \\ +2\nu(\xi_1c_1+\xi_2c_2+\xi_3c_3-E_0)+k_c(\nu^2+\eta)=0 \tag{14}$$

$$\nu[(B-A)c_2^2-2A'c_2c_3+Aa^2+Cc_3^2]-\mu(A'c_2-Cc_3)-k_c=0 \tag{15}$$

$$c_1^2+c_2^2=a^2\,. \tag{3}$$

Le curve intersezioni delle superficie Σ^* con il piano $\mu = 0$ sono

(13′) $\quad (\nu^2 - \eta) A' c_2 = \lambda$

(14′) $\quad 2\nu(\xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \xi_3 c_3 - E_0) + k_c(\nu^2 + \eta) = 0$ ([5])

(15′) $\quad \nu[(B - A) c_2^2 - 2A' c_2 c_3 + A a^2 + C c_3^2] - k_c = 0$

(3′) $\quad c_1^2 + c_2^2 = a^2 .$

Per l'esistenza della Γ è necessario che queste curve abbiano due punti in comune: (14′) e (15′) devono dunque passare per i due punti comuni a (3′) e (13′) che sono:

$$\left(\sqrt{a^2 - \frac{\lambda^2}{A'^2(\nu^2 - \eta)^2}},\ \frac{\lambda}{A'(\nu^2 - \eta)},\ 0\right)$$

e

$$\left(-\sqrt{a^2 - \frac{\lambda^2}{A'^2(\nu^2 - \eta)^2}},\ \frac{\lambda}{A'(\nu^2 - \eta)},\ 0\right).$$

Si vede agevolmente che affinchè (14′) passi per entrambi questi punti occorre che sia $\xi_1 = 0$.

La quadrica (15) è un cilindro con generatrici parallele all'asse c_1; se si pone $\xi_1 = 0$ anche la quadrica (14) degenera in un cilindro con generatrici parallele allo stesso asse. Poichè il piano (13) è parallelo all'asse c_1 condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della curva Γ è che il piano e i due cilindri (14) e (15) abbiano infinite rette comuni. Devono quindi essere identicamente soddisfatte le equazioni nella sola variabile μ ottenute eliminando c_2 tra (13) e (14) e tra (13) e (15).

Tenendo conto della condizione $(\nu^2 - \eta) A'^2 = C\nu^2(B - A)$ si ottengono le due equazioni lineari in μ:

$$U\mu + V = 0$$

$$W\mu + Z = 0$$

([5]) Oltre a questa retta la (14) ha in comune con il piano $\mu = 0$ la retta impropria; questa può però essere trascurata in quanto i punti comuni a (13′) e (3′) sono propri.

con

$$
\begin{aligned}
U &= A'^2(\nu^2-\eta)[\lambda - Cc_3(\nu^2+\eta)]\\
V &= \lambda^2\nu(B-A) - 2A'^2\nu c_3\,\lambda(\nu^2-\eta) + A'^2(\nu^2-\eta)^2(C\nu c_3^2 + A\nu a^2 - k_c)\\
W &= -(\nu^2-\eta)A'\lambda + 2\xi_2 C\nu + A'Cc_3(\nu^2-\eta)^2\\
Z &= 2\nu\lambda\xi_2 + A'(\nu^2-\eta)(2\xi_3 c_3\nu - 2\nu E_0 + k_c\nu^2 + k_c\eta).
\end{aligned}
$$

Annullando U, V, W, Z si ottengono le condizioni:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = Cc_3^2(\nu^2+\eta)\,; \qquad A'\xi_2 = Cc_3\eta(B-A)\,;\\
&A\nu^2 a^2 - C\eta c_3^2 - k_c\nu = 0\,;\\
&(\nu^2+\eta)(C\eta c_3^2 + A\nu^2 a^2) + \nu^2(2\xi_3 c_3 - 2E_0) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

La classe delle precessioni semiregolari compatibile con gli integrali primi è costituita da moti che avvengono con le condizioni strutturali e di moto:

$$
C\nu^2(B-A) = A'^2(\nu^2-\eta)\,;\ B'=0\,;\ \xi_1 = 0\,;\ \xi_2 = C\eta c_3(B-A)/A' \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&A\nu^2 a^2 - C\eta c_3^2 - k_c\nu = 0\,;\\
&(\nu^2+\eta)(C\eta c_3^2 + A\nu^2 a^2) + \nu^2(2\xi_3 c_3 - 2E_0) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{17'}
$$

Durante questi moti le variabili $c_2 = c_2(t)$ e $\mu = \mu(t)$ sono legate dalla legge lineare

$$
\mu = \frac{A'(\nu^2-\eta)c_2 - Cc_3(\nu^2+\eta)}{C\nu} \tag{13}
$$

da cui si può ricavare, tenendo conto delle equazioni di Poisson

$$
\dot{\mu} = \frac{(\eta-\nu^2)A'\mu c_1}{C\nu}\,. \tag{18}
$$

Per quanto detto nel paragrafo precedente è sufficiente, per dimostrare la possibilità dinamica di questa classe di precessioni semiregolari, verificare la seconda equazione di Eulero che per $\xi_1 = 0$ e per

$B'=0$ ha la forma:

$$-B\mu\nu c_1 - A'\dot{\mu} + (\nu c_3 + \mu)A\nu c_1 - \nu c_1(-A'\nu c_2 + C\nu c_3 + C\mu) =$$
$$= -\xi_3 c_1 + \eta(A-C)c_1c_3 + A'\eta c_1 c_2 \,.$$

Sostituendo a μ e $\dot{\mu}$ le rispettive espressioni, tenendo conto delle condizioni strutturali e di moto trovate in precedenza si ottiene:

$$c_1[2C\eta c_3 + \xi_3 + Ac_3(\nu^2-\eta)] = 0 \,. \tag{19}$$

Poichè c_1 non è identicamente nullo la (18) risulta verificata se e solo se

$$\xi_3 = -Ac_3(\nu^2-\eta) - 2C\eta c_3 \,. \tag{20}$$

Sotto le condizioni strutturali e di moto espresse da (17), (17′) e (20) sono dinamicamente possibili per un corpo rigido fissato senza attrito per un suo punto, precessioni semiregolari ad asse verticale di seconda specie.

In particolare, dovendo essere $B'=0$ e $\xi_1=0$ è necessario che il baricentro e l'asse di figura appartengano ad uno stesso piano principale d'inerzia, mentre la condizione $A'\neq 0$ (senza la quale si ricade nelle precessioni regolari) implica che l'asse di figura non coincida con un asse principale.

Con alcune semplici considerazioni da (17) e (20) si ottengono l'equazione:

$$\xi_3(B-A)[C(B-A)-A'^2] = \xi_2 A'[(B-A)(A-2C)+2A'^2] \tag{21}$$

e la disuguaglianza:

$$A'^2 - C(B-A) > 0 \,. \tag{22}$$

Supposte verificate le (21) e (22) è dinamicamente possibile un moto di precessione semiregolare con $c_3 = \xi_2 A'/\eta C(B-A)$, $\nu^2 = A'^2\eta/\big(A'^2 - C(B-A)\big)$ e μ espressa dalla (13).

Per una più agevole interpretazione di queste condizioni è conveniente riferirsi alla terna principale $RC(0, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$; supposto che G appartenga al piano $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sia $\boldsymbol{i}_3$ l'asse di figura: la terna $R(0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ con $\boldsymbol{i}_1 \equiv \boldsymbol{i}$ è allora individuata dall'angolo α che il versore $\boldsymbol{i}_3$ dell'asse di figura forma con il versore $\boldsymbol{k}$.

La equazione (21), espressa per il tramite dei parametri A^*, B^*, C^*, y_G, z_G relativi alla terna principale si traduce in una equazione in $\operatorname{tg}\alpha$ con coefficienti reali dipendenti dagli altri parametri:

$$\Psi(\operatorname{tg}\alpha) = 0 \,. \tag{21'}$$

A questa condizione si aggiunge la disuguaglianza (22) che per il tramite degli stessi parametri diviene:

$$\operatorname{tg}^2\alpha > B^*(C^* - A^*)/C^*(A^* - B^*) \tag{22'}$$

mentre la condizione $A' \neq 0$ comporta la condizione strutturale $B^* \neq C^*$ e $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$.

La disuguaglianza (22′) comporta una effettiva limitazione solo se $\boldsymbol{i}_1$ è l'asse di medio momento principale d'inerzia, altrimenti essa è identicamente verificata.

La determinazione dei moti di precessione semiregolari si riconduce quindi alla ricerca delle soluzioni reali e non nulle della equazione algebrica detta; che soddisfino alla disuguaglianza (22′). Nel caso generale $A^* \neq B^* \neq C^*$, $y_G \neq 0$ e $z_G \neq 0$ l'equazione algebrica (21′) è del settimo ordine ed ha termine noto non nullo; ne segue che essa ammette sempre almeno una soluzione reale non nulla.

Si conclude quindi che se il baricentro appartiene ad un piano principale di inerzia contenente l'asse di medio momento, sono dinamicamente possibili precessioni semiregolari ad asse verticale di seconda specie, con asse di figura una retta opportuna del piano $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ la cui direzione è individuata dalla (21′). Nel caso invece che il baricentro appartenga al piano ortogonale all'asse di medio momento d'inerzia la possibilità dinamica di precessioni dello stesso tipo è subordinata anche al verificarsi della disuguaglianza (22′).

3. Conclusioni.

Si è dimostrata l'impossibilità dinamica di precessioni semiregolari ad asse verticale di prima specie, che non si riducano a precessioni regolari. Si è riconosciuta invece la possibilità dinamica di precessioni semiregolari ad asse verticale di seconda specie, che avvengono con opportune condizioni strutturali e di moto. Queste precessioni, qualora si assuma $\eta = 0$ (cioè ci si riduca al caso del solido pesante) costituiscono la classe di precessioni semiregolari individuate da G. Grioli.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. V. Beleckii, *Some problems of motion of a rigid body in a Newtonian central field,* J. Appl. Math. Mech., **23** (1959).

[2] E. Bentsik, *Su un tipo di precessioni regolari per un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze newtoniane,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **41** (1968).

[3] R. Balli, *Rotazioni di un solido con un punto fisso soggetto a forze di tipo newtoniano,* Rend. di Mat. dell'Univ. Roma, Vol. 7 (1974).

[4] E. Pucci, *Sulle precessioni semiregolari di un solido pesante ad asse di precessione verticale,* Atti dell'Acc. Naz. dei Lincei, **54**, fasc. 4 (1973).

[5] G. Grioli, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione,* Atti dell'Univ. di Ferrara, sez. VII, **3** (1954).

[6] G. Grioli, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **27** (1957).

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 dicembre 1974.