

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO TORQUATI

## **Sui teoremi di De Rham**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 54 (1975), p. 123-131

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1975\\_\\_54\\_\\_123\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__123_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Sui teoremi di De Rham.

FRANCO TORQUATI (\*)

### 1. Introduzione.

Un risultato fondamentale stabilente una relazione tra la struttura coomologica di una varietà differenziabile  $X$  (di classe  $C^\infty$ ) e le forme differenziali definite su essa è dato dai classici tre teoremi di De Rham.

Se si indica con  $A(X)$  l'algebra delle forme differenziali definite su  $X$  e con  $R(X)$  l'algebra di coomologia derivata, i teoremi di De Rham stabiliscono un isomorfismo di algebre

$$J: R(X) \rightarrow H(X)$$

dove  $H(X)$  è l'algebra di coomologia singolare (cup-prodotto) associata alla varietà.

Le dimostrazioni dirette di tali teoremi sono tutte piuttosto complicate e difficili (cfr. ad es. De Rham, Whitney <sup>(1)</sup>), così da potersi affermare che la ricerca di una dimostrazione più lineare abbia contribuito in modo non marginale alla costruzione della teoria dei fasci.

D'altra parte le dimostrazioni aventi i fasci per strumento (cfr. ad es. Hirzebruch, Godement <sup>(2)</sup>), benchè formalmente assai più sod-

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica - via L. B. Alberti, 4 - 16132 Genova.

(1) G. DE RHAM, *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*, Journal de mathématiques, vol. 10 (1931).

H. WHITNEY, *Geometric integration theory*, Princeton University, Princeton, N.J. (U.S.A.), 1957.

(2) F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973.

disfacenti, lasciano nell'ombra due aspetti importanti dei teoremi in questione:

1) che l'isomorfismo delle strutture additive è indotto dall'integrazione delle forme differenziali sui semplici singolari;

2) che tale isomorfismo rispetta inoltre le strutture moltiplicative.

Scopo di quanto segue è quello di chiarire questi due aspetti, pur rimanendo nell'ambito della teoria dei fasci.

Desidero infine ringraziare il prof. Vinicio Villani per l'aiuto datomi durante la stesura della presente nota.

## 2. Struttura additiva.

Sia  $X$  una varietà differenziabile,  $\mathfrak{A} = \{U_i\}_{i \in I}$  un suo ricoprimento aperto. Ricordiamo che un  $\mathfrak{A}$ -simplesso singolare e differenziabile di  $X$  di dim.  $p$  è un simplesso singolare

$$\sigma_p: \Delta_p \rightarrow X \text{ (con } \Delta_p \text{ simplesso euclideo standard)}$$

tale che:

- 1)  $|\sigma_p| \subset U_i$  per almeno un  $U_i$  del ricoprimento aperto  $\mathfrak{A}$ ;
- 2)  $\sigma_p$  è la restrizione a  $\Delta_p$  di un'applicazione differenziabile di  $R^p$  in  $X$ .

Denotiamo con  $C_p^{\mathfrak{A}}(X)$  l' $R$ -modulo generato da tali  $\sigma_p$ , con  $C_p^{\mathfrak{A}}(X)$  l' $R$ -modulo  $\text{Hom}(C_p^{\mathfrak{A}}(X), R)$  e sia  $H_p^{\mathfrak{A}}(X) = Z_p^{\mathfrak{A}}(X)/dC_{p-1}^{\mathfrak{A}}(X)$  il modulo di coomologia corrispondente ( $\mathfrak{A}$ -coomologia singolare differenziabile).

Denotiamo inoltre con  $A^p(X)$  l' $R$ -modulo delle  $p$ -forme differenziali su  $X$  e con

$$R^p(X) = \Gamma^p(X)/dA^{p-1}(X), \quad \text{ove } \Gamma^p(X) = \{\alpha^p \in A^p(X) : d\alpha^p = 0\},$$

l' $R$ -modulo di coomologia derivato, detto la coomologia di De Rham di grado  $p$  della varietà  $X$ .

Se  $\alpha^p \in A^p(X)$ ,  $\sigma_p \in C_p^{\mathfrak{A}}(X)$  allora l'integrale  $\int_{\sigma_p} \alpha^p$  definisce per ogni  $p \geq 0$  un'applicazione bilineare

$$A^p(X) \times C_p^{\mathfrak{A}}(X) \rightarrow R$$

ossia induce l'omomorfismo di  $R$ -moduli

$$J_p: A^p(X) \rightarrow C_{\mathfrak{A}}^p(X)$$

definito nel seguente modo:

$$\langle J_p \alpha^p, \sigma_p \rangle = \int_{\sigma_p} \alpha^p, \quad p \geq 1$$

$$\langle J_0 \alpha^0, \sigma_0 \rangle = \alpha^0(\sigma_0).$$

In virtù del teorema di Stokes si ha

$$dJ_p = J_{p+1} d$$

e pertanto  $J_p$  induce un omomorfismo

$$J_p: R^p(X) \rightarrow H_{\mathfrak{A}}^p(X)$$

**TEOREMA.** (I° e II° teorema di De Rham);  $J_p$  è un isomorfismo di  $R$ -moduli  $\forall p \geq 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A^p = \{A^p(U), r_w^u\}$  il prefascio delle  $p$ -forme su  $X$  che ad ogni aperto  $U$  di  $X$  associa l' $R$ -modulo  $A^p(U)$  con  $r_w^u: A^p(U) \rightarrow A^p(W)$ ,  $W \subset U$ , l'omomorfismo di restrizione. Analogamente si definiscono i prefasci  $\Gamma^p = \{\Gamma^p(U), r_w^u\}$ ,  $C^p = \{C^p(U), r_w^u\}$ ,  $Z^p = \{Z^p(U), r_w^u\}$ , ove  $C^p(U)$  è l'usuale  $R$ -modulo delle  $p$ -cocatene singolari differenziabili definite sull'aperto  $U$ , e  $Z^p(U)$  il sotto- $R$ -modulo dei  $p$ -cocicli.

Sia  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di  $X$  localmente finito, contrattile e ad intersezioni contrattili (per l'esistenza di tale ricoprimento cfr. [2]).

Per ogni aperto  $V = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_h} \neq \emptyset$  il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma^{q-1}(V) & \xrightarrow{i} & A^{q-1}(V) & \xrightarrow{d} & \Gamma^q(V) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow J_{q-1} & & \downarrow J_{q-1} & & \downarrow J_q \\ 0 & \rightarrow & Z^{q-1}(V) & \xrightarrow{i} & C^{q-1}(V) & \xrightarrow{d} & Z^q(V) \rightarrow 0 \end{array}$$

è commutativo e le righe sono esatte.

Se  $S = \{S(U), r_w^u\}$  è un prefascio denoteremo con  $C(\mathfrak{A}, S) = \{C^k(\mathfrak{A}, S), \delta^k\}_{k \geq 0}$  il complesso delle cocatene del nervo del ricoprimento  $\mathfrak{A}$  a coefficienti nel prefascio  $S$ , e con  $H^k(\mathfrak{A}, S)$  i rispettivi moduli di coomologia. Essendo

$$H^k(\mathfrak{A}, A^q) = H^k(\mathfrak{A}, C^q) = 0, \quad k \geq 1, q \geq 0,$$

le successioni esatte di coomologia indotte dalle righe del diagramma precedente danno luogo ai diagrammi commutativi a righe esatte (cfr. [1]):

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathfrak{A}, A^{p-1}) & \xrightarrow{d} & H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^p) & \xrightarrow{\delta_*^0} & H^1(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-1}) & \longrightarrow & 0 \\ J_{p-1} \downarrow & & J_p \downarrow & & J_{*p-1} \downarrow & & \\ H^0(\mathfrak{A}, C^{p-1}) & \xrightarrow{d} & H^0(\mathfrak{A}, Z^p) & \xrightarrow{\delta_*^0} & H^1(\mathfrak{A}, Z^{p-1}) & \longrightarrow & 0 \\ \\ 0 & \longrightarrow & H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) & \xrightarrow{\delta_*^k} & H^{k+1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k-1}) & \longrightarrow & 0 \\ J_{*p-k} \downarrow & & & & J_{*p-k-1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^k(\mathfrak{A}, Z^{p-k}) & \xrightarrow{\delta_*^k} & H^{k+1}(\mathfrak{A}, Z^{p-k-1}) & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad k \geq 1$$

Tenuto conto che  $H^0(\mathfrak{A}, A^{p-1})$ ,  $H^0(\mathfrak{A}, C^{p-1})$ ,  $H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^p)$ ,  $H^0(\mathfrak{A}, Z^p)$  si identificano in modo naturale rispettivamente con  $A^{p-1}(X)$ ,  $C_{\mathfrak{A}}^{p-1}(X)$ ,  $\Gamma^p(X)$ ,  $Z_{\mathfrak{A}}^p(X)$ , si ottiene il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} A^{p-1}(X) & \xrightarrow{d} & \Gamma^p(X) & \xrightarrow{\delta_*^0} & H^1(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-1}) & \xrightarrow{\delta_*^1} & H^2(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-2}) & \xrightarrow{\delta_*^2} & \dots & \xrightarrow{\delta_*^{p-1}} & H^p(\mathfrak{A}, \Gamma^0) \\ J_{p-1} \downarrow & & J_p \downarrow & & J_{*p-1} \downarrow & & J_{*p-2} \downarrow & & & & J_{*0} \downarrow \\ C_{\mathfrak{A}}^{p-1}(X) & \xrightarrow{d} & Z_{\mathfrak{A}}^p(X) & \xrightarrow{\delta_*^0} & H^1(\mathfrak{A}, Z^{p-1}) & \xrightarrow{\delta_*^1} & H^2(\mathfrak{A}, Z^{p-2}) & \xrightarrow{\delta_*^2} & \dots & \xrightarrow{\delta_*^{p-1}} & H^p(\mathfrak{A}, Z^0) \end{array}$$

dove:

- 1)  $\delta_*^0$  è surgettivo e le successioni orizzontali sono esatte nel secondo termine;
- 2)  $\delta_*^k$ ,  $k \geq 1$  sono isomorfismi;
- 3)  $\Gamma^0 = Z^0 = R$  e  $J_{*0} = id$ .

Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 R^p(X) & & \\
 J_p \downarrow & \searrow & \\
 H_{\mathfrak{A}}^p(X) & \nearrow & H^p(\mathfrak{A}, R) .
 \end{array}$$

In altre parole: l'omomorfismo  $J_p: R^p(X) \rightarrow H_{\mathfrak{A}}^p(X)$  indotto per passaggio al quoziente dall'applicazione che associa ad ogni  $p$ -forma una  $\mathfrak{A}$ - $p$ -cocatena differenziabile per mezzo dell'integrazione è un isomorfismo. C.V.D.

### 3. Struttura moltiplicativa.

$R(X) = \sum_{p \geq 0} R^p(X)$  è dotato di una struttura di  $R$ -algebra mediante il prodotto esterno  $\wedge$ . È possibile munire anche  $H_{\mathfrak{A}}(X) = \sum_{p \geq 0} H_{\mathfrak{A}}^p(X)$  di una struttura di  $R$ -algebra nel seguente modo. Le applicazioni lineari

$$\Delta^p \rightarrow \Delta^{p+q}, \quad \Delta^q \rightarrow \Delta^{p+q}$$

che applicano ordinatamente i vertici del simpleso standard  $\Delta^p$  nei primi  $(p + 1)$ -vertici, rispettivamente negli ultimi  $(q + 1)$ -vertici di  $\Delta^{p+q}$ , inducono in modo ovvio gli omomorfismi

$$\vartheta_p: C_{p+q}^{\mathfrak{A}}(X) \rightarrow C_p^{\mathfrak{U}}(X)$$

$$\eta_q: C_{p+q}^{\mathfrak{A}}(X) \rightarrow C_q^{\mathfrak{U}}(X) .$$

Dicesi cup-prodotto l'omomorfismo

$$\cup: C_{\mathfrak{A}}^p(X) \otimes C_{\mathfrak{A}}^q(X) \rightarrow C_{\mathfrak{A}}^{p+q}(X)$$

così definito:

$$\langle c^p \cup c^q, \sigma_{p+q} \rangle = \langle c^p, \vartheta_p \sigma_{p+q} \rangle \langle c^q, \eta_q \sigma_{p+q} \rangle .$$

Su  $H_{\mathfrak{A}}(X)$  si definisce una struttura di  $R$ -algebra ponendo:

$$\bar{c}^p \cup \bar{c}^q = \overline{c^p \cup c^q}; \quad \bar{c}^p \in H_{\mathfrak{A}}^p(X), \quad \bar{c}^q \in H_{\mathfrak{A}}^q(X) \quad (\text{cfr. [3]}).$$

**TEOREMA.** (III° teorema di De Rham)  $J: R(X) \rightarrow H_{\mathfrak{A}}(X)$  è un omomorfismo (e quindi un isomorfismo) di algebre. In altre parole:

$$J_{p+q}(\bar{\alpha}^p \wedge \bar{\beta}^q) = J_p \bar{\alpha}^p \cup J_q \bar{\beta}^q; \quad \bar{\alpha}^p \in R^p(X), \quad \bar{\beta}^q \in R^q(X).$$

La dimostrazione risulterà dalle considerazioni seguenti. Si consideri l'omomorfismo:

$$\wedge: C^m(\mathfrak{A}, A^s) \otimes C^n(\mathfrak{A}, A^t) \rightarrow C^{m+n}(\mathfrak{A}, A^{s+t})$$

definito ponendo su  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{m+n}}$ ,  $f \in C^m(\mathfrak{A}, A^s)$ ,  $g \in C^n(\mathfrak{A}, A^t)$

$$(f \wedge g)(i_0 \dots i_{m+n}) = f(i_0 \dots i_m) \wedge g(i_m \dots i_{m+n}).$$

Poichè  $\delta(f \wedge g) = \delta f \wedge g + (-1)^m f \wedge \delta g$ ,  $\wedge$  induce l'omomorfismo:

$$\wedge: H^m(\mathfrak{A}, \Gamma^s) \otimes H^n(\mathfrak{A}, \Gamma^t) \rightarrow H^{m+n}(\mathfrak{A}, \Gamma^{s+t}).$$

**LEMMA 1-a.** Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \otimes H^{h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h+1}) & \xrightarrow{\wedge} & H^{k+h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q+1-h-k}) \\ \delta_*^{k-1} \otimes \delta_*^{h-1} \downarrow & & \downarrow \delta_*^{k+h-1} \\ H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \otimes H^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) & \xrightarrow{\wedge} & H^{k+h}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q-h-k}) \end{array}$$

è commutativo di caratteristica  $(-1)^p$ .

**LEMMA 1-b).** Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^{k-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k+1}) \otimes H^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) & \xrightarrow{\wedge} & H^{k+h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q+1-h-k}) \\ \delta_*^{k-1} \otimes id \downarrow & & \downarrow \delta_*^{k+h-1} \\ H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \otimes H^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) & \xrightarrow{\wedge} & H^{k+h}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q-h-k}) \end{array}$$

è commutativo.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostreremo il lemma 1-a); 1-b) è analogo. Si tratta di dimostrare che per ogni

$$\bar{f}_{\Gamma^{p-k}}^k \in H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}), \quad \bar{g}_{\Gamma^{q-h+1}}^{h-1} \in H^{h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h+1})$$

si ha:

$$\delta_*(\bar{f}_{I^{p-k}}^k \wedge \bar{g}_{I^{q-h+1}}^{h-1}) = (-1)^p (\bar{f}_{I^{p-k}}^k \wedge \delta_* \bar{g}_{I^{q-h+1}}^{h-1}).$$

A tal fine si consideri la sequenza esatta di complessi di cocatene:

$$0 \rightarrow C(\mathfrak{A}, I^{q-h}) \xrightarrow{i_*} C(\mathfrak{A}, A^{q-h}) \xrightarrow{d_*} C(\mathfrak{A}, I^{q-h+1}) \rightarrow 0$$

ove gli omomorfismi  $i_*$ ,  $d_*$  sono indotti rispettivamente dall'inclusione  $i: I^{q-h}(U) \rightarrow A^{q-h}(U)$  e dal differenziale  $d: A^{q-h}(U) \rightarrow I^{q-h+1}(U)$ ,  $U$  aperto di  $X$ .

Se  $\bar{f}_{I^{p-k}}^k$  è rappresentato da  $f_{I^{p-k}}^k \in C^k(\mathfrak{A}, I^{p-k})$  e  $\delta_* \bar{g}_{I^{q-h+1}}^{h-1}$  è rappresentato da  $\delta g_{A^{q-h}}^{h-1} \in C^h(\mathfrak{A}, I^{q-h})$ , ove  $g_{A^{q-h}}^{h-1}$  è un elemento di  $C^{h-1}(\mathfrak{A}, A^{q-h})$  per cui  $d_* g_{A^{q-h}}^{h-1} = g_{I^{q-h+1}}^{h-1}$ , allora  $\delta_*(\bar{f}_{I^{p-k}}^k \wedge \bar{g}_{I^{q-h+1}}^{h-1})$  è rappresentato da

$$(-1)^{p-k} \delta(f_{I^{p-k}}^k \wedge g_{A^{q-h}}^{h-1}) = (-1)^p (f_{I^{p-k}}^k \wedge \delta g_{A^{q-h}}^{h-1}).$$

LEMMA 2. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^p(X) \otimes \Gamma^q(X) & \xrightarrow{\wedge} & \Gamma^{p+q}(X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^p) \otimes H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^q) & \xrightarrow{\wedge} & H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q}) \end{array}$$

è commutativo.

La dimostrazione è immediata.

COROLLARIO 1. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^p(X) \otimes \Gamma^q(X) & \xrightarrow{\wedge} & \Gamma^{p+q}(X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) & \xrightarrow{\wedge} & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R) \end{array}$$

è commutativo di caratteristica  $(-1)^{pq}$ .

COROLLARIO 2. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} R^p(X) \otimes R^q(X) & \xrightarrow{\wedge} & R^{p+q}(X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) & \xrightarrow{\wedge} & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R) \end{array}$$

è commutativo di caratteristica  $(-1)^{pq}$ .



Le considerazioni precedenti possono essere ripetute parola per parola considerando l'omomorfismo

$$\cup: C^m(\mathfrak{A}, Z^s) \otimes C^n(\mathfrak{A}, Z^t) \rightarrow C^{m+n}(\mathfrak{A}, Z^{s+t})$$

ottenendo come risultato finale che

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathfrak{A}}^p(X) \otimes H_{\mathfrak{A}}^q(X) & \xrightarrow{\cup} & H_{\mathfrak{A}}^{p+q}(X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R) \end{array}$$

è commutativo di caratteristica  $(-1)^{pq}$ .

Consideriamo allora il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} R^p(X) \otimes R^q(X) & \xrightarrow{\wedge} & & R^{p+q}(X) & \\ \downarrow J_p \otimes J_q & \searrow \wr & & \swarrow \wr & \downarrow J_{p+q} \\ & H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) & \xrightarrow{\cup = \wedge} & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R) & \\ & \swarrow \wr & & \searrow \wr & \\ H_{\mathfrak{A}}^p(X) \otimes H_{\mathfrak{A}}^q(X) & \xrightarrow{\cup} & & H_{\mathfrak{A}}^{p+q}(X) & \end{array}$$

La tesi del teorema si riduce alla verifica della commutatività del diagramma lungo i lati del rettangolo.

OSSERVAZIONE. Ricordando che l'R-modulo di  $\mathfrak{A}$ -coomologia singolare differenziabile di una varietà si identifica con la coomologia singolare (cfr. [3], [4]) si ottiene la formulazione usuale dei teoremi di De Rham.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1966).

- [2] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Interscience publishers, New York, vol I (1963).
- [3] A. H. WALLACE, *Algebraic topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1970).
- [4] S. EILENBERG, *Singular homology in differentiable manifolds*, Ann. Math., **48** (1947), pp. 670-681.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 dicembre 1974.