RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA ERMINIA MARINA

Una disuguaglianza variazionale associata a un operatore ellittico che può degenerare e con condizioni al contorno di tipo misto

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 107-121

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__107_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 54 (1975)

Una disuguaglianza variazionale associata a un operatore ellittico che può degenerare e con condizioni al contorno di tipo misto.

Maria Erminia Marina (*)

Summary - The Author discusses a variational inequality, with mixed boundary conditions, associated to the following bilinear form

$$a(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i} + d_j u) v_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \right) v \right] dx + \int_{\partial\Omega} guv \, d\sigma \, .$$

It is assumed that the coefficients a_{ij} are such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant m(x) |\xi|^2 \qquad \text{almost everywhere in } \bar{\Omega}, \text{ for } \xi \in R^n ,$$

where $m(x)$ is a non negative function defined on $\bar{\Omega}$.

The existence, the uniqueness, and the regularity for the solution of the inequality (0.3) of our Introduction are proved.

The convergence for the solutions of a collection of variational inequalities associated to (0.3) is examined in $H^1(\Omega, m)$ space. To this purpose an a priori bound for the solutions is deduced and discussed.

Introduzione.

La teoria delle disuguaglianze variazionali associate a operatori uniformemente ellittici del secondo ordine e di tipo variazionale è

(*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. e del Laboratorio per la Matematica Applicata del C.N.R.

stata studiata da parecchi autori (vedi Bibliografia). In particolare in [12] sono stati dimostrati teoremi di esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni di un problema di tipo misto associato a una forma bilineare uniformemente ellittica e coerciva; il caso non coercivo è stato affrontato in [1], [7], [9].

Qui si vuole estendere alcuni dei risultati precedenti al caso degenere, studiando anche la convergenza delle soluzioni.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di $\boldsymbol{R}^n$ $(n > 2)$, $\partial\Omega$ la sua frontiera che supponiamo localmente lipschitziana, Γ_0 un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e $\Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0$.

Sia $m(x)$ una funzione non negativa, definita in $\bar{\Omega}$ tale che $m(x) \in L^\infty(\Omega)$, $m^{-1}(x) \in L^t(\Omega)$ $(t \geqslant n/2)$. Siano $H^1(\Omega, m)$ e $H_0^1(\Omega, m)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega,m)} = \|u\|^2_{2,\Omega} + \|u_x\|^2_{m,2,\Omega}$$

essendo

$$\|u\|^2_{2,\Omega} = \int_\Omega u^2\,dx \qquad \text{e} \qquad \|u_x\|^2_{m,2,\Omega} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_{x_i} m^{\frac{1}{2}})^2\,dx\,.$$

Posto $\tilde{C}^1(\bar{\Omega}) = \{u \in C^1(\bar{\Omega});\ u = 0 \text{ su } \Gamma_0\}$, indichiamo con V la chiusura di $\tilde{C}_1(\bar{\Omega})$ in $H^1(\Omega, m)$. Se $u \in H^1(\Omega, m)$, $k \in \boldsymbol{R}$, $k \geqslant 0$, $B \subset \bar{\Omega}$, B chiuso, diciamo che $u \geqslant k (u \leqslant k)$ in B nel senso di $H^1(\Omega, m)$ se esiste una successione $\{u_j\}_{j\in\mathrm{N}}$ di funzioni appartenenti a $C^1(\bar{\Omega})$ tali che $u_j \geqslant k (u_j \leqslant k)$ su B e $\|u_j - u\|_{H^1(\Omega,m)} \to 0$.

Indichiamo con

$$\max_B u = \begin{cases} \inf\{k \in \boldsymbol{R}\colon u \leqslant k \text{ su } B \text{ nel senso di } H^1(\Omega, m)\} \\ +\infty \text{ se non esiste } k \text{ tale che } u \leqslant k \text{ nel senso di } H^1(\Omega, m)\,, \end{cases}$$

$$\min_B u = \begin{cases} \sup\{k \in \boldsymbol{R}\colon u \geqslant k \text{ su } B \text{ nel senso di } H^1(\Omega, m\} \\ -\infty \text{ se non esiste } k \text{ tale che } u \geqslant k \text{ nel senso di } H^1(\Omega, m)\,. \end{cases}$$

È noto (vedi [11]) che se $u \in H^1(\Omega, m)$ esiste un'applicazione lineare e continua $\gamma_0\colon H^1(\Omega, m) \to L^s(\partial\Omega)$ con $s = 2(n-1)(n-2+n/t)^{-1}$ tale che $\gamma_0 u = u/\partial\Omega$, $\forall u \in C^1(\bar{\Omega})$. Sia $a\colon V \times V \to \boldsymbol{R}$ la seguente forma bilineare

$$(0.1) \qquad a(u, v) = \int_\Omega [(a_{ij} u_{x_i} + d_j u) v_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu) v]\,dx + \int_{\Gamma_1} g \gamma_0 u \gamma_0 v\,d\sigma \text{ (1)}$$

---

(1) Il simbolo di sommatoria è sempre sottinteso secondo la convenzione di Einstein.

i cui coefficienti soddisfano alle seguenti ipotesi:

$$(0.2)\quad \begin{cases} a) & a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant m(x)|\xi|^2 \text{ q.o. in } \Omega, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n \\ b) & a_{ij}m^{-1} \in L^\infty(\Omega),\ b_i m^{-\frac{1}{2}},\ d_i m^{-\frac{1}{2}} \in L^{2q}(\Omega),\ c \in L^q(\Omega), \\ & \qquad\qquad g \in L^{(n-1)(1-n/t)^{-1}}(\Gamma_1)\,, \\ c) & \int_\Omega [d_i v_{x_i} + cv]\,dx + \int_{\Gamma_1} g\gamma_0 v\,d\sigma \geqslant \alpha \int_\Omega v\,dx \qquad \forall v \geqslant 0\,, \end{cases}$$

$v = v_1 v_2$ ove $v_1, v_2 \in V$, essendo $q \geqslant 1$ il numero tale che $(2q)^{-1} = n^{-1} - (2t)^{-1}$ e $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$.

Se $\psi \in H^1(\Omega, m)$, $\psi \leqslant 0$ su Γ_0 diciamo che ψ è un ostacolo e denotiamo con

$$\mathcal{K} = \{v \in V\colon v - \psi \geqslant 0 \text{ su } \bar{\Omega} \text{ nel senso di } H^1(\Omega, m)\}\ .$$

Sia $T \in V'$ (2). Nel § 2 faremo vedere che nelle ipotesi fatte esiste una e una sola funzione $u \in \mathcal{K}$ soluzione del seguente problema:

$$(0.3)\qquad a(u, v - u) \geqslant \langle T, v - u\rangle \qquad \forall v \in \mathcal{K}\,.$$

Troveremo inoltre una caratterizzazione delle soluzioni di (0.3) e alcuni teoremi di confronto delle soluzioni al variare dell'ostacolo ψ, vedi i teoremi 2.3, 2.6.

Nel § 3 troveremo una maggiorazione a priori in $H^1(\Omega, m)$ della soluzione di (0.3) che ci permetterà di dimostrare la convergenza in $H^1(\Omega, m)$ delle soluzioni di (0.3) al variare del convesso $\mathcal{K}$. Infine nel § 4 faremo vedere, facendo ulteriori ipotesi su T, ψ, t, che le soluzioni di (0.3) appartengono a spazi $L^p(\Omega)$ con $p > 2^\#$, essendo $(2^\#)^{-1} = 2^{-1}(1 + 1/t) - n^{-1}$.

1. Lemmi preliminari.

In questo paragrafo richiamiamo alcuni Lemmi che ci saranno utili nei paragrafi successivi.

---

(2) V' indica il duale di V; si riconosce che ogni elemento $T \in V'$ si può rappresentare nella forma $\langle T, v\rangle = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Omega f_i v_{x_i}\,dx, \forall v \in V$ essendo $f \in L^2(\Omega)$, $f_i m^{-\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

LEMMA 1.1. *Sia* $u \in H^1(\Omega, m)$. *Allora esistono due costanti* $S(n, m, t, \Omega)$ *e* $D(n, m, t, \Omega)$ *tali che*

$$\|u\|_{2^\#,\Omega} \leqslant S\|u\|_{H^1(\Omega,m)} \tag{1.1}$$

e

$$\|\gamma_0 u\|_{s,\partial\Omega} \leqslant D\|u\|_{H^1(\Omega,m)} . \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Vedi [11] teoremi (3.1) e (3.9). C.V.D.

LEMMA 1.2. *Sia* $g\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *una funzione uniformemente lipschitziana tale che* $g(0) = 0$, $t \cdot g(t) \geqslant 0$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$. *Se* $u \in V$ *allora* $g \circ u \in V$. *Inoltre se la derivata* g' *di* g *è continua eccetto al più un numero finito di punti allora*

$$(g \circ u)_{x_i} = (g' \circ u)\, u_{x_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

nel senso delle distribuzioni, ove il secondo membro deve intendersi nullo se g' *non è definito.*

DIMOSTRAZIONE. Salvo poche varianti è la stessa di [11]. Proposizione 2.7. C.V.D.

LEMMA 1.3. *Siano* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ *e* φ *elementi di* V *tali che* $\|\varphi_n - \varphi\|_V \to 0$. *Allora* $\|\max(\varphi_n, 0) - \max(\varphi, 0)\|_V \to 0$.

DIMOSTRAZIONE. Salvo poche varianti è la stessa di [1], § 5. C.V.D.

Sia $h \in \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, $k \in \boldsymbol{R}$, $0 \leqslant k \leqslant h$; poniamo se $h \in \boldsymbol{R}$

$$G_{k,h}(t) = \begin{cases} h - k & \text{se } \; t \geqslant h \\ t - k & \text{se } \; k \leqslant t < h \\ 0 & \text{se } -k \leqslant t < k \\ t + k & \text{se } -h \leqslant t < -k \\ k - h & \text{se } \; t < -h \end{cases}$$

e

$$G_{k,\infty}(t) = \begin{cases} t - k & \text{se } \; t \geqslant k \\ 0 & \text{se } -k \leqslant t < k \\ t + k & \text{se } \; t < -k \end{cases}$$

Sia

$$u \in V\,, \qquad \Omega(k, h, u) = \Omega(k, h) = \{x \in \Omega\colon k \leqslant |u(x)| \leqslant h \text{ q.o.}, \ u_x \neq 0\}\ .$$

Risulta allora:

LEMMA 1.4. *Sia* $u \in V$, $h \in L^p(\Omega)$. *Allora fissato* $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, *è possibile determinare* r *numeri reali* $k_1 > k_2 > k_3 \ldots > k_r = 0$ *tali che posto* $\Omega_1 = \Omega(k_1, \infty)$, $\Omega_s = \Omega(k_s, k_{s-1})$, $s = 1, \ldots, r$, $u_1 = G_{k_1,\infty}(u)$, $u_s = G_{k_s,k_{s-1}}(u)$, $s = 1, \ldots, r$ *risulti*:

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} \|h\|_{p,\Omega_s} = a \quad \forall s = 1, \ldots, r-1\,, & \|h\|_{p,\Omega r} \leqslant a \\ \{x \in \Omega\colon (u_s)_x(x) \neq 0\} \subset \Omega_s & \forall s = 1, \ldots, r \\ u u_s \geqslant u_s^2 & \forall s = 1, \ldots, r \\ u_x = (u_s)_x \text{ in } \Omega_s & \forall s = 1, \ldots, r \\ (u_1 + u_2 + \ldots + u_s)_x u_s = u_x u_s & \forall s = 1, \ldots, r \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_r = u & \end{cases}$$

Inoltre $r \leqslant (a^{-1}\|h\|_{p,\Omega})^p + 1$.

DIMOSTRAZIONE. Salvo poche varianti è la stessa del lemma 1.3 di [2] utilizzando il lemma 1.2. C.V.D.

LEMMA 1.5. *Sia* $u \in H^1(\Omega, m)$ *tale che* $a(u, v) \leqslant 0 (\geqslant 0)$, $\forall v \in V$, $v \geqslant 0$. *Allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant \max\,(\max_{\Gamma_0} u, 0)\big(\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant \min(\min_{\Gamma_0} u, 0)\big)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Vedi [8], teorema 1.1. C.V.D.

LEMMA 1.6. *Sia* $T \in V'$. *Allora esiste una ed una sola soluzione del problema* $a(u, v) = \langle T, v \rangle$, $\forall v \in V$.

DIMOSTRAZIONE. Vedi [8] teorema 2.1. C.V.D.

Sia ψ definito come nell'introduzione, $\psi^+ = \max(\psi, 0)$ e $L\colon V \to V'$ tale che $a(u, v) = \langle Lu, v \rangle$, $\forall u, v \in V$.

Definiamo

$$\tilde{\mathcal{K}} = \{\tilde{u} \in V\colon \tilde{u} + \psi^+ \in \mathcal{K}\} \ \text{ e } \ \tilde{\mathcal{K}}_R = \{\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{K}}, \ \|\tilde{u}\|_V \leqslant R\}.$$

Sussiste il seguente lemma:

LEMMA 1.7. *Per ogni $R \in \mathbf{R}$, $R > 0$, esiste una funzione $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{K}}_R$ soluzione del problema*

$$a(\tilde{u}_R, \tilde{v} - \tilde{u}_R) \geqslant \langle T - L\psi^+, \tilde{v} - \tilde{u}_R \rangle \; . \tag{1.4}$$

Inoltre se esiste una costante C tale che $\forall R \in \mathbf{R}$, $R > 0$, risulti $\|\tilde{u}_R\|_V \leqslant C$ il problema 0.3 *ha soluzione.*

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto della proposizione 4.6 di [11] e del lemma 1.6, si dimostra l'esistenza di una soluzione $\tilde{u}_R$ di (1.4) in $\tilde{\mathcal{K}}_R$ con un ragionamento del tutto analogo a quello usato in [1], Teorema 1.2. La seconda asserzione è una conseguenza del ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema 1.4 e 4.1 di [1]. C.V.D.

2. Al fine di dimostrare il teorema di esistenza 2.2 ci è utile il seguente

LEMMA 2.1. *Sia $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{K}}_R$ soluzione del problema* 1.4. *Allora*

$$\|\tilde{u}\|_V \leqslant (2^r - 1) \frac{2}{\min(1, \alpha)} \|T - L\psi^+\|_{V'}$$

ove r è il numero definito nel lemma 1.4.

DIMOSTRAZIONE. Poichè $(b_i - d_i) m^{-\frac{1}{2}} \in L^{2q}(\Omega)$, fissato $a = \min(1, \alpha)/2S$ siano $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_R$ definiti come nel lemma 1.4. Risulta allora

$$\tilde{u} - \tilde{u}_s = \begin{cases} \tilde{u} - k_{s-1} + k_s & \text{se} \quad k_{s-1} \leqslant \tilde{u} \\ k_s & \text{se} \quad k_s \leqslant \tilde{u} \leqslant k_{s-1} \\ \tilde{u} & \text{se} \; -k_s \leqslant \tilde{u} \leqslant k_s \\ -k_s & \text{se} \; -k_{s-1} \leqslant \tilde{u} \leqslant -k_s \\ \tilde{u} + k_{s-1} - k_s & \text{se} \quad \tilde{u} \leqslant -k_{s-1} \end{cases} \qquad s = 1, \ldots, r \, .$$

Osservato che $|\tilde{u} - \tilde{u}_s| \leqslant |\tilde{u}|$, $|(\tilde{u} - \tilde{u}_s)_x| \leqslant |\tilde{u}_x|$ risulta $\tilde{u} - \tilde{u}_s \in \tilde{\mathcal{K}}_R$, $\forall s = 1, \ldots, r$. Ne segue che $a(\tilde{u}, \tilde{u}_s) \leqslant \langle T - L\psi^+, \tilde{u}_s \rangle$, $\forall s = 1, \ldots, r$. Tenuta presente la (c) di (0.2) e la (1.3) si ha:

$$\|T - L\psi^+\|_{V'}\|\tilde{u}_s\|_V \geqslant \int_\Omega [a_{ij}\tilde{u}_{x_i}(\tilde{u}_s)_{x_j} + (b_i - d_i)\tilde{u}_{x_i}\tilde{u}_s + d_i(\tilde{u}\tilde{u}_s)_{x_i} + c\tilde{u}\tilde{u}_s]\,dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} g\gamma_0\tilde{u}\gamma_0\tilde{u}_s\,d\sigma = \int_\Omega a_{ij}(\tilde{u}_s)_{x_i}(\tilde{u}_s)_{x_j} + (b_i - d_i)(\tilde{u}_s)_{x_i}\tilde{u}_s\,dx +$$

$$+ \sum_{t=1}^{s-1}\left(\int_\Omega (b_i - d_i)(\tilde{u}_t)_{x_i}\tilde{u}_s\right)dx + \int_\Omega \left(d_i(\tilde{u}\tilde{u}_s)_{x_i} + c\tilde{u}\tilde{u}_s\right)dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} g\gamma_0\tilde{u}\gamma_0\,\tilde{u}_s\,d\sigma \geqslant \int_\Omega a_{ij}(\tilde{u}_s)_{x_i}(\tilde{u}_s)_{x_j} + (b_i - d_i)(\tilde{u}_s)_{x_i}\tilde{u}_s\,dx +$$

$$+ \sum_{t=1}^{s-1}\int_{\Omega_t}(b_i - d_i)(\tilde{u}_t)_{x_i}\tilde{u}_s\,dx + \alpha\int_\Omega \tilde{u}_s^2\,dx\,.$$

Dalla disuguaglianza precedente con facili passaggi si deduce che

$$\|\tilde{u}_s\|_V \leqslant \frac{2^s}{\min(1, \alpha)}\,\|T - L\psi^+\|_{V'}$$

e quindi per la (1.3)

$$\|\tilde{u}\|_V \leqslant \sum_{s=1}^{r}\|u_s\|_V = (2^r - 1)\,\frac{2}{\min(1, \alpha)}\,\|T - L\psi^+\|_V \qquad \text{C.V.D.}$$

TEOREMA 2.2. *Esiste una funzione* $u \in \mathcal{K}$ *soluzione del problema* 0.3.

DIMOSTRAZIONE. È un'ovvia conseguenza dei lemmi (1.7) e (2.1).
C.V.D.

TEOREMA 2.3. *Sia* $u_1 \in \mathcal{K}$ *soluzione di* (0.3), $u_2 \in H^1(\Omega, m)$, $u_2 \geqslant 0$ *su* Γ_0, $u_2 - \psi \geqslant 0$ *su* $\bar{\Omega}$, u_2 *soprasoluzione cioè* $a(u_2, \varphi) \geqslant \langle T, \varphi\rangle$ *per ogni* $\varphi \in V$, $\varphi \geqslant 0$.

Allora $\min(u_1, u_2) = u_1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = \min(u_1, u_2)$; $v \in \mathcal{K}$. Supponiamo per assurdo che $\max(u_1 - v) = 2\,M > 0$. Sia $0 < k < M$ e $w_k = \max(u_1/2 - - v/2 - k, 0)$, $\Omega(k) = \{x \in \Omega\colon \frac{1}{2}(u_1 - v) \geqslant k,\ \frac{1}{2}(u_1 - v)_x \neq 0\}$. Poichè $u_1 -$

$-w_k \in \mathcal{K}$ si ha

$$a(u_1, w_k) \leqslant \langle T, w_k \rangle .$$

Se osserviamo che $a(u_2, w_k) \geqslant \langle T, w_k \rangle$, ne segue che $a(u_1 - u_2, w_k) \leqslant 0$ e quindi tenuto conto della (c) di (0.2) risulta:

$$0 \geqslant a\left(\frac{u_1 - u_2}{2}, w_k\right) = \int_\Omega \left[a_{ij}\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)_{x_i} (w_k)_{x_j} + (b_i - d_i)\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)_{x_i} w_k + \right.$$

$$\left. + d_i\left[\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) w_k\right]_{x_i} + c\frac{u_1 - u_2}{2} w_k \right] dx + \int_{\Gamma_1} g\gamma_0\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)\gamma_0 w_k \, d\sigma \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \left[a_{ij}\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)_{x_i} (w_k)_{x_j} + (b_i - d_i)\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)_{x_i} w_k \right] dx +$$

$$+ \alpha \int_\Omega \left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) w_k \, dx = \int_{\Omega(k)} [a_{ij}(w_k)_{x_i}(w_k)_{x_j} + (b_i - d_i)(w_k)_{x_i} w_k + \alpha w_k^2] \, dx .$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder si deduce, usando la (1.1),

$$\min(1, \alpha) \|w_k\|_V^2 \leqslant S \|(b_i - d_i) m^{-\frac{1}{2}}\|_{2a, \Omega(k)} \|w_k\|_V^2 .$$

Facciamo tendere k ad M. Poichè $\lim_{k \to M} |\Omega(k)| = 0$ ([3]), il $\lim_{k \to M} \|(b_i - d_i) m^{-\frac{1}{2}}\|_{2a, \Omega(k)} = 0$; assurdo. C.V.D.

Corollario 2.4. *La soluzione di* (0.3) *è unica.*

Dimostrazione. Ovvia conseguenza del teorema 2.3 e del fatto che ogni soluzione di (0.3) è una soprasoluzione rispetto a L. C.V.D.

Enunciamo infine alcuni teoremi le cui dimostrazioni, salvo ovvie varianti, si trovano in [12] Corollario 3.9 e in [9] teoremi 1.8, 1.10 e 1.11.

Teorema 2.5. *Siano* ψ_1, ψ_2 *due ostacoli,* $\psi_1 \geqslant \psi_2$, u_1 *e* $u_2 \in V$ *tali che* $a(u_i, v - u_i) \geqslant \langle T, v - u_i \rangle$, $\forall v \in \mathcal{K}_i = \{v \in V : v - \psi_i \geqslant 0$ su $\overline{\Omega}\}$, $i = 1, 2$. *Allora* $0 \leqslant u_1 - u_2 \leqslant \max_{\overline{\Omega}}(\psi_1 - \psi_2)$.

([3]) Per ogni insieme E $\mathfrak{L}$-misurabile denoteremo con $|E|$ la sua misura di Lebesgue.

TEOREMA 2.6. *Siano* ψ_1, ψ_2 *due ostacoli,* u_1 e $u_2 \in V$ *definiti come nel teorema* 2.5. *Allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leqslant \max_{\bar{\Omega}} |\psi_1 - \psi_2| .$$

3. Vogliamo ora studiare la convergenza delle soluzioni di (0.3).

TEOREMA 3.1. *Siano* $\psi_1, \psi_2 \in V$ *due ostacoli,* u_1 e $u_2 \in V$ *definiti come nel teorema* 2.5. *Allora*

$$\|u_1 - u_2\|_V \leqslant C \|\psi_1 - \psi_2\|_V ,$$

essendo C *una costante dipendente solo dalle norme dei coefficienti di* (0.1).

DIMOSTRAZIONE. Sia $w_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2 + \psi_2 - \psi_1)$. Poichè $w_1 \in V$ e $(b_i - d_i) m^{-\frac{1}{2}} \in L^{2q}(\Omega)$, fissato $a = \min(1, \alpha)/2S$ siano $w_{1_1}, \ldots, w_{1_r}$ definiti come nel lemma 1.4. Si ha

$$u_1 - w_{1_s} = \begin{cases} u_1 - k_{s-1} + k_s & \text{se} \quad k_{s-1} \leqslant w_1 \\ \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{\psi_1}{2} - \dfrac{\psi_2}{2} + k_s & \text{se} \quad k_s \leqslant w_1 \leqslant k_{s-1} \\ u_1 & \text{se} \quad -k_s \leqslant w_1 \leqslant k_s \\ \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{\psi_1}{2} - \dfrac{\psi_2}{2} - k_s & \text{se} \quad -k_{s-1} \leqslant w_1 \leqslant -k_s \\ u_1 + k_{s-1} - k_s & \text{se} \quad w_1 \leqslant -k_{s-1} \end{cases} \qquad s = 1, \ldots, r .$$

Risulta [4] $u_1 - w_{1_s} \in \mathcal{K}_1$, $\forall s = 1, \ldots, r$ e quindi $a(u_1, w_{1_s}) \leqslant \langle T, w_{1_s} \rangle$, $\forall s = 1, \ldots, r$. Indichiamo con $w_2 = -w_1$ e siano $w_{2_1}, \ldots, w_{2_r}$ definiti come nel lemma 1.4. Poichè $w_{2_s} = -w_{1_s}$, $\forall s = 1, \ldots, r$, $w_2 - w_{2_s} \in \mathcal{K}_2$, $\forall s = 1, \ldots, r$; si ha che $a(u_2, w_{2_s}) \leqslant \langle T, w_{2_s} \rangle$, $\forall s = 1, \ldots, r$. Ne segue che

---

(4) Se osserviamo che:

$$(u_1 - k_{s-1} + k_s) - \left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + \frac{\psi_1}{2} - \frac{\psi_2}{2} + k_s\right) \geqslant 0 \qquad \text{su } \{x \in \Omega : w_1 \geqslant k_{s-1}\} ,$$

$$\left[u_1 + \left(\frac{u_2}{2} - \frac{u_1}{2} + \frac{\psi_1}{2} - \frac{\psi_2}{2} - k_s\right)\right] - u_1 \geqslant 0 \qquad \text{su } \{x \in \Omega : -k_{s-1} \leqslant w_1 \leqslant -k_s\} ,$$

si ha: $(u_1 - w_{1_s}) - \psi \geqslant 0$.

$a(u_1 - u_2, w_{1_s}) \leqslant 0$ e quindi

$$a\left(\frac{u_1 - u_2}{2} + \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}, w_{1_s}\right) \leqslant a\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}, w_{1_s}\right).$$

Poichè la forma $a(u, v)$ è continua su $V \times V$, risulta

$$\left| a\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}, w_{1_s}\right)\right| \leqslant H \|\psi_2 - \psi_1\|_V \|w_{1_s}\|_V ,$$

essendo H una costante dipendente soltanto dalle norme dei coefficienti di (0.1) (vedi [11] Proposizione 4.1). Dalle disuguaglianze precedenti si deduce allora con ragionamento analogo a quello fatto nel Lemma (2.1):

$$H \|\psi_2 - \psi_1\|_V \|w_{1_s}\|_V \geqslant a\left(\frac{u_1 - u_2}{2} + \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}, w_{1_s}\right) = a(w_1, w_{1s}) \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega [a_{ij}(w_{1_s})_{x_i}(w_{1_s})_{x_j} + (b_i - d_i)(w_{1_s})_{x_i} w_{1_s}]\, dx +$$

$$+ \sum_{t=1}^{s-1} \left[\int_\Omega (b_i - d_i)(w_{1_t})_{x_i} w_{1_s} dx \right] + \alpha \int_\Omega (w_{1_s})^2\, dx$$

e quindi

$$\|w_1\|_V \leqslant \sum_{s=1}^{r} \|w_{1s}\|_V = H(2^r - 1) \frac{\min(1, \alpha)}{2} \|\psi_2 - \psi_1\|_V .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} (3.1) \qquad \|u_1 - u_2\|_V &= \|2w_2 + (\psi_1 - \psi_2)\|_V \leqslant \\ &\leqslant \left(H(2^r - 1) \frac{4}{\min(1, \alpha)} + 1\right) \|\psi_1 - \psi_2\|_V \qquad \text{C.V.D.}. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora una maggiorazione a priori nell'ipotesi che gli ostacoli siano elementi di $H^1(\Omega, m)$:

TEOREMA 3.2. *Sia $z \in V$ la soluzione del problema $a(z, \varphi) = \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in V$, $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega, m)$ due ostacoli, u_1 e $u_2 \in V$ definiti come nel teorema* 2.5. *Allora*

$$(3.2) \qquad \|u_1 - u_2\|_V \leqslant \left(H \frac{(2^r - 1)\, 4}{\min(1, \alpha)} + 1\right) \|\max(\psi_1, z) - \max(\psi_2, z)\|_V .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $i = 1, 2$, $\psi_i' = \max(\psi_i, z)$, $\mathcal{K}_i' = \{v \in V,\ v - \psi_i' \geq 0$ su $\bar{\Omega}\}$. Risulta $\psi_i' - \psi_i \geq 0$ e $\mathcal{K}_i' \subset \mathcal{K}_i$. Poichè $a(u_i, \varphi) \geq \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in V$, $\varphi \geq 0$, si ha che $a(u_i - z, \varphi) \geq 0$, $\forall \varphi \in V$, $\varphi \geq 0$; dal lemma 1.5 segue che $u_i - z \geq 0$ e quindi $u_i \in \mathcal{K}_i'$. Allora u_i è soluzione del problema $a(u_i, v - u_i) \geq \langle T, v - u_i \rangle$, $\forall v \in \mathcal{K}_i'$ e dunque la (3.2) è immediata conseguenza della (3.1) C.V.D.

Siano ora $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e ψ ostacoli tali che $\|\psi_n - \psi\|_{H^1(\Omega, m)} \to 0$. Poichè $\max(\psi_n, z) - \max(\psi, z) = \max(\psi_n - z, 0) - \max(\psi - z, 0)$, dal lemma 1.3 si ha $\|\max(\psi_n, z) - \max(\psi, z)\|_V \to 0$.

Siano $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e u le soluzioni di (0.3) corrispondenti rispettivamente a $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e ψ. È immediata conseguenza del teorema precedente il seguente

TEOREMA 3.3. *Supponiamo che* $\|\psi_n - \psi\|_{H^1(\Omega, m)} \to 0$. *Allora* $\|u_n - u\|_V \to 0$

4. Consideriamo ora il seguente problema:

$$a(u, v - u) \geq \langle T, v - u \rangle\ , \qquad \forall v \in \mathcal{K}\ ,\ u \in \mathcal{K} \tag{4.1}$$

ove

$$\langle T, v \rangle = \int_{\Omega} f v\, dx + \int_{\Omega} f_i v_{x_i}\, dx + \int_{\Gamma_1} h \gamma_0 v\, d\sigma\ ,$$

essendo

$$f \in L^p(\Omega)\ , \qquad f_i m^{-1/p} \in L^p(\Omega)\ , \qquad 1 \leq i \leq n\ ,\ p \geq 2\ ,$$
$$h \in L^\nu(\Gamma_1)\ , \qquad \nu \geq 2(n-1) n^{-1} (1 - 1/t)^{-1} = r\ .$$

Supponiamo inoltre che $\psi \in H^1(\Omega, m) \cap L^\infty(\Omega)$.

Vogliamo ora dimostrare che sotto certe ipotesi di sommabilità per la funzione $m(x)$, la soluzione del problema 4.1, certamente esistente perche $T \in V'$, appartiene ad uno spazio $L^p(\Omega)$ con $p > 2^\#$.

Sia $M = \max\left(\max_{\bar{\Omega}} \psi, 0\right)$, $k \geq M$, $v_k = \max(u - k, 0)$, $\Omega(k) = \{x \in \bar{\Omega}: u \geq k\}$. Poichè $v_k \in V$, $(b_i - d_i)\, m^{-\frac{1}{2}} \in L^{2q}(\Omega)$, fissato $a = \min(1, \alpha)/2S$ siano $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ definiti come nel Lemma 1.4 applicato a v_k. Si ha

$$u - v_{k_s} = \begin{cases} u - k_{s-1} + k_s & \text{se } k_{s-1} \leq v_k \\ k + k_s & \text{se } k_s \leq v_k \leq k_{s-1} \qquad s = 1, \dots, r \\ u & \text{se } v_k \leq k_s \end{cases}$$

e quindi $u - v_{k_s} \in \mathcal{K}$, $\forall s = 1, \dots, r$.

Poichè dalle ipotesi (0.2) si ha che $a(k, \varphi) \geqslant 0$, $\forall \varphi \in V$, $\varphi \geqslant 0$, otteniamo

$$a(u-k, v_{k_s}) \leqslant \int_{\Omega} f v_{k_s} dx + \int_{\Omega} f_i (v_{k_s})_{x_i} dx + \int_{\Gamma_1} h \gamma_0 v_{k_s} d\sigma .$$

Osservando che $v_{k_s} = (v_{k_s})_{x_i} = 0$ in $\bar{\Omega} - \Omega(k)$ dalla relazione precedente segue:

$$\int_{\Omega(k)} f v_{k_s} dx + \int_{\Omega(k)} f_i (v_{k_s})_{x_i} dx + \int_{\Gamma_1 \cap \Omega(k)} h \gamma_0 v_{k_s} d\sigma \geqslant a(v_k, v_{k_s}) .$$

Dalla relazione precedente, con passaggi analoghi a quelli fatti nel lemma 2.1, si deduce che

$$(4.2) \qquad \|v_k\|_V \leqslant (2^r - 1) \frac{2}{\min(1, \alpha)} \left\{ \|f\|_{2,\Omega(k)} + \|f_i m^{-\frac{1}{2}}\|_{2,\Omega(k)} + \|h\|_{\nu,\Gamma_1 \cap \Omega(k)} \right\} .$$

Indichiamo con $\mu(k) = |\Omega(k)| + [\Gamma_1 \cap \Omega(k)]^{2^\#/s}$ (5).

Tenuto conto che $\forall h \geqslant k \geqslant M$

$$(h-k)|\Omega(h)|^{1/2^\#} = \|h-k\|_{2^\#,\Omega(h)} \leqslant \|v_k\|_{2^\#,\Omega(h)} \leqslant \|v_k\|_{2^\#,\Omega(k)}$$

e

$$(h-k)[\Gamma_1 \cap \Omega(h)]^{1/s} = \|h-k\|_{s,\Gamma_1 \cap \Omega(h)} \leqslant \|\gamma_0 v_k\|_{s,\Gamma_1 \cap \Omega(h)} \leqslant \|\gamma_0 v_k\|_{s,\Gamma_1 \cap \Omega(k)} ,$$

dal lemma (1.1) segue che esiste una costante C_1 tale che

$$(4.3) \qquad (h-k)^{2^\#} \mu(h) \leqslant C_1 \|v_k\|_V^{2^\#} \text{ per ogni } h \geqslant k \geqslant M .$$

Dalle (4.2) e (4.3) si deduce facilmente — vedi [8] teorema 2.4 — che esiste una costante C_2 tale che:

$$(4.4) \qquad \mu(h) \leqslant C_2 (h-k)^{-2^\#} \Big\{ \|f\|_{p,\Omega}^2 + \left(\|f_i m^{-1/p}\|_{p,\Omega} \|m^{-1}\|_{t,\Omega}^{(\frac{1}{2}-1/p)} \right)^2 + \\ + \|h\|_{\nu,\Gamma_1}^2 \Big\}^{2^\#/2} \cdot \mu(k)^{\min\{(1/2-1/p)(1-1/t)2^\#, (1-1/s-1/\nu)s\}} .$$

Indichiamo con

$$\beta = \min\{(1/2 - 1/p)(1-1/t)2^\#, (1-1/s-1/\nu)s\} .$$

---

(5) Indichiamo con $[E]$ la misura $(n-1)$ dimensionale dell'insieme E $\mathfrak{L}$-misurabile.

Dalla (4.4), usando il lemma (3.1) di [11] deduciamo i seguenti teoremi.

TEOREMA 4.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi fin qui dette e sia* $t > n/2$. *Se* u *è soluzione del problema* (0.3) *allora* $u \in M(a(p, \nu))$ *cioè*

$$\{x \in \bar{\Omega}\colon |u(x)| > k\} \leqslant C_3 k^{-a(p,\nu)}$$

essendo C_3 *una costante dipendente dai dati del problema e*

$$a(p, \nu)^{-1} = \max\{1/p^{\#} + 1/t(1 - 2p), 1/2^{\#} - s/2^{\#}(1 - 1/s - 1/\nu)\} .$$

TEOREMA 4.2. *Supponiamo che valgano le ipotesi fin qui dette e sia* $t > n$. *Allora*

a) se $p > \dfrac{n(t-1)}{t-n}$ *e* $\nu > \dfrac{t(n-1)}{t-n}$, *esiste una costante* C_4 *tale che*

$$\psi(x) \leqslant u(x) \leqslant \max(\max_{\bar{\Omega}} \psi, 0) + \\ + C_4\Big\{\|f\|^2_{p,\Omega} + \Big[\|f_i m^{-1/p}\|_{p,\Omega} \|m^{-1}\|^{(\frac{1}{2}-1/p)}_{t,\Omega}\Big]^2 + \|h\|^2_{\nu,\Gamma_1}\Big\}^{\frac{1}{2}};$$

b) se $p = \dfrac{n(t-1)}{t-n}$ *e* $\nu = \dfrac{t(n-1)}{t-n}$ *allora* $u \in L^r(\Omega) \quad \forall r \geqslant 1$;

c) se $p < \dfrac{n(t-1)}{t-n}$ *e* $\nu < \dfrac{t(n-1)}{t-n}$ *allora* $u \in M(a(p, \nu))$ *essendo* $M(a(p, \nu))$ *definito come nel teorema* 4.1.

La dimostrazione dei teoremi precedenti si può fare ripetendo, salvo qualche modifica, lo stesso ragionamento fatto in [8], teoremi 2.5 e 2.6.

Riportiamo le varianti della dimostrazione.

Sia $\beta < 1$; poichè $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega, m)$ risulta $\min(u, 0) \in L^\infty(\Omega) \cap V$. Sia $\eta(k) = \{x \in \bar{\Omega}\colon |u(x)| \geqslant k\}$. Si ha $\eta(k) = \{x \in \bar{\Omega}\colon \max(u, 0) \geqslant k\} \cup \cup \{x \in \bar{\Omega}\colon \min(u, 0) \leqslant -k\}$. Poichè $\min(u, 0) \in L^\infty(\Omega)$, come è noto $\min(u, 0) \in M(a(p, \nu))$. D'altra parte dalla (4.4) segue (vedi [8]) che $\max(u, 0) \in M(a(p, \nu))$ e quindi risulta dimostrato il teorema 4.1 e la (*c*) del teorema 4.2.

Sia $\beta = 1$, $\varrho = (eC_2)^{-1/2^{\#}} \cdot [\|f\|^2_{p,\Omega} +)\|f_i m^{-1/p}\|_{p,\Omega} \|m^{-1}\|^{(1/2-1/p)}_{t,\Omega})^2 + + \|h\|^2_{\nu,\Gamma_1}]^{-1/2}$, $\theta \in (0, \varrho)$. Risulta (vedi [8])

$$|\Omega(h)| \leqslant e\mu(M)e^{-\varrho(h-M)} \quad \text{per ogni } h \geqslant M ,$$

e quindi per ogni $\theta \in (0, \varrho)$ si ha:

$$\int_{\Omega} e^{\theta \max(u,0)-M}\, dx = -\int_{0}^{+\infty} e^{\theta t - M}\, d|\Omega(t)| < +\infty .$$

Ne segue che $u \in L^r(\Omega)$, $\forall r \geqslant 1$ e quindi perveniamo alla dimostrazione della *b*) del teorema 4.2. La parte (*a*) del teorema si dimostra con lo stesso ragionamento fatto in [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bottaro, *Alcune condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione di una disuguaglianza variazionale non coercitiva.* Di prossima pubblicazione su Ann. Math. Pure Appl.

[2] G. Bottaro - M. E. Marina, *Problemi di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati*, Boll. U.M.I. (4) **8** (1973), pp. 46-56.

[3] H. Brezis, *Problemes unilateraux*, Jr. Math. Pures et Appl., **51** (1972), pp. 1-168.

[4] H. Lewy - G. Stampacchia, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), pp. 153-188.

[5] H. Lewy - G. Stampacchia, *On existence and smoothness of solutions of some non coercive variational inequalities*, Arch. Rath. Mech. and Anal. **42** (1971), pp. 241-253.

[6] J. L. Lions, *Quelque méthode de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[7] J. L. Lions - G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Applied Math., **20** (1967), pp. 493-519.

[8] M. E. Marina, *Un problema al contorno di tipo misto per un operatore ellittico che può degenerare*, Rend. Accad, Naz. Lincei, **55** (1973), pp. 149-160.

[9] M. E. Marina, *Esistenza e unicità della soluzione di una disuguaglianza variazionale associata a un operatore non coercivo*, Boll. U.M.I., (4) **10** (1974), pp. 500-511.

[10] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Advances in Mathematics, **3**, n. 4 (1969), pp. 510-585.

[11] M. K. V. Murthy - G. Stampacchia, *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators*, Ann. Math. Pure Appl., **80** (1968), pp. 1-122.

[12] M. K. V. MURTHY - G. STAMPACCHIA, *A variational inequality with mixed boundary conditions*, Israel J. of Math., **13** (1972), pp. 188-224.

[13] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Proc. Nato advanced Study Inst. Theory and Applications of monotone operators, Venice (1968), pp. 101-192.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 novembre 1974.