GIULIANO BRATTI

Sulle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ellittiche e con coefficienti analitici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 52 (1974), p. 85-92

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__85_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Sulle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ellittiche e con coefficienti analitici.

GIULIANO BRATTI (*)

Introduzione.

1. Il contenuto di questo lavoro è ricavato, principalmente, dai seguenti articoli: « *Uniqueness theroems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients* », di Lars Hormander [4], e: « *Pseudodifferential operators and Gevray classes* », di Louis Boutet de Monvel e Paul Kree [5].

È noto che: *se* $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a^{\alpha}(x) D^{\alpha}$ (**), *è un operatore differenziale su* A, *un aperto di* R^n, *ivi ellittico e con coefficienti analitici, allora* P *è analitico, cioè*: *se* u *e* $v \in \mathfrak{D}'(A)$ *e* $Pu = v$ *in* A, u *è analitica laddove lo è* v [2], pag. 178, teor. 5.7.1.

Un notevole approfondimento di tale risultato è il teorema 5.4 di [4] pag. 687:

se $P = P(x, D)$ *ha coefficienti analitici su* A, $\forall u \in \mathfrak{D}'(A)$ *si ha*: $WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x, \xi) \in A \times R_n \setminus \{0\} : P_m(x, \xi) = 0\}$ (***) .

Questo articolo vuol approfondire ulteriormente il risultato dell'ultimo teorema citato; si otterrà, infatti, il seguente:

(*) Indirizzo dell A.: Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - I-35100 Padova.

(**) Nella scrittura di $P = P(x, D)$: $m \in N$; $|\alpha| = \sum_k \alpha_k$ se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N^n$; $D^{\alpha_k} = (1/i)^{\alpha_k}(\partial/\partial x_k)^{\alpha_k}$, $i^2 = -1$.

(***) Per la definizione dei WF:(u), $u \in \mathfrak{D}'(A)$, si veda: (4), pag. 676, *o il* n. 2 *di questo lavoro nel quale è ricordata*; $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a^{\alpha}(x)\xi^{\alpha}$.

TEOREMA. *Sia* $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha(x) D^\alpha$ *un operatore differenziale su* A, *un aperto di* R^n, *ivi ellittico e con coefficienti analitici.* $\forall u \in \mathcal{D}'(A)$ *si può individuare, in* $WF_L(u)$, *un sottoinsieme,* $mr_L(u)$, (per la sua definizione si veda il seguente n. 3), *tale che*: $mr_L(u) = mr_L(Pu)$.

Nel n. 2 si ricordano definizioni e teoremi utili al seguito; nel n. 3 si costruisce qualche esempio di $u \in \mathcal{D}'(A)$ con $mr_L(u) \neq \emptyset$ e si dimostra il risultato enunciato.

2. DEFINIZIONE 1. *Sia* $L = (L_k)$ *una successione di numeri reali tale che*: $L_0 = 1$; $k \leq L_k$, $\forall k \in N$; $L_{k+1} \leq CL_k$, *per qualche* $C \in R_+$, (*reali positivi*). *Se* A *è un aperto in* R^n *e* $u \in C^\infty(A)$, $u \in C^L(A)$ *se*: $\forall K \subset\subset A$, $\exists C_k \in R_+$ *con*: $|D^\alpha u| \leq C_k(C_k L_{|\alpha|})^{|\alpha|}$.

Se la successione $L = (L_k)$ è tale che: $L_k = k$, $\forall k \in N$, $C^L(A)$ è la classe delle funzioni analitiche su A; in questo caso si pone: $C^L(A) = C_A(A)$. Il seguente teorema caratterizza in termini di trasformata di Fourier le distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(A)$ tali che $u \in C^L(U)$ per qualche aperto U in A;

TEOREMA 1. *Sia* $u \in \mathcal{D}'(A)$ *e* $x_0 \in A$. $u \in C^L$ *su qualche intorno di* x_0 *se si può trovare un intorno* U *di* x_0 *in* A *ed una successione limitata,* u_N, *in* $\mathcal{E}'(A)$ *tale che*:

i) $u = u_N$ *in* U;

ii) $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$, *per qualche* $C \in R_+$ (*).

DEFINIZIONE 2. *Sia* $x_0 \in A$; $\xi^0 \in R_n \setminus \{0\}$; $u \in \mathcal{D}'(A)$. $P_0 = (x_0, \xi^0) \notin WF_L(u)$ *se*:

a) *esistono*: *un intorno di* x_0 *in* A, U, *ed un intorno conico,* Γ, *di* ξ^0 *in* R_n;

b) *esiste una successione limitata,* u_N, *in* $\mathcal{E}'(A)$, *tale che*:

i) $\forall N$, $u = u_N$ *in* U;

ii) $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$, in Γ

La proiezione di $WF_L(u)$ su A ha come complementare il più grande sottoinsieme aperto di A su cui u è in C^L. Nel caso che: $L_k = k$, $\forall k \in N$, si pone: $WF_L(u) = WF_A(u)$.

TEOREMA 2. *Sia* $u \in \mathcal{D}'(A)$ *e* $P = P(x, D)$ *un operatore differenziale su* A *con coefficienti ivi di classe* C^L; *risulta*: $WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$.

(*) Si indica con $\hat{u}(\xi)$ la trasformata di Fourier di u.

TEOREMA 3. *Sia* $u \in \mathcal{D}'(A)$ *e* $P = P(x, D)$ *un operatore differenziale su* A *con coefficienti ivi analitici; risulta*: $WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \cup \{(x, \xi) \in A \times R_n \setminus \{0\} : P_m(x, \xi) = 0\}$.

Per ciò che riguarda il secondo articolo citato nel n. 1 sarà sufficiente, per il seguito, ricordare: la definizione 1.1, pag. 302; la definizione 2.1, pag. 308; il teorema 2.9, pag. 314; e la proposizione 2.13, pag. 322: nell'ordine:

DEFINIZIONE 2. *Il simbolo* $(p) = \sum p_k(x, \xi)$ *è di classe* $s \geqslant 1$ *se per ogni* $K \subset\subset A$ *esistono le costanti* c *ed* A_0 *in* R_+ *tali che*: $\forall k \in N$, $\forall x \in K$ *e* $(\alpha, \beta) \in N^n \times N^n$ *con*:

$$|(\partial/\partial x)^\alpha (\partial/\partial \xi)^\beta p_k(x, \xi)| \leqslant c A_0^{k+|\alpha+\beta|} |\xi|^{r-k-|\beta|} (k + |\alpha|)!^s \beta!\ (*)\,.$$

DEFINIZIONE 3. *Sia* $P = P(x, D)$ *un operatore pseudodifferenziale su* A *con simbolo* $(p) = \sum p_k(x, \xi)$ *e grado* r. *Si dice che* P *è strettamente di classe* s *se*: $K \subset\subset A$ *esistono le costanti* c *ed* $A_0 \in R_+$, *tali che*:

$\forall x \in K$ *e* $(\alpha, \beta) \in N^n \times N^n$, *e* $\forall N \in N$:

$$|(\partial/\partial x)^\alpha (\partial/\partial \xi)^\beta \Big(p - \sum^{N-1} p_k(x, \xi)\Big)| \leqslant c A_0^{N+|\alpha+\beta|} |\xi|^{r-N-|\beta|} (k + |\alpha|)!^s \beta!$$

TEOREMA 4. *Sia* $(p) = \sum p_k(x, \xi)$ *un simbolo di classe* $s \geqslant 1$ *su* A. *Esiste un operatore pseudodifferenziale su* A *di classe* s *e simbolo* (p).

PROPOSIZIONE 1. *Sia* P *un operatore pseudodifferenziale ellittico su* A *e di classe* s. *Esiste un operatore pseudodifferenziale* E *di classe* s *tale che*: $E \circ P - I$ *e* $P \circ E - I$ *hanno nuclei di classe* s.

(Si può trovare in [4], pag. 687, una costruzione del sibolo inverso di un simbolo analitico ($s = 1$) ed ellittico).

3. Sembra naturale, almeno per l'A., porre la seguente:

DEFINIZIONE 1. *Sia* $u \in \mathcal{D}'(A)$ *e* $P_0 = (x_0, \xi^0) \in WF_L(u)$. $P_0 \in mr_L(u)$ *se*:

a) *esiste una successione di intorni*, U_N, *di* x_0 *in* A;

b) *esiste una successione di intorni conici di* ξ_0, Γ_N, *in* R_n;

c) *esiste una successione*, u_N, *in* $\mathcal{E}'(A)$, *ivi limitata, tale che*:

(*) $p_k(x, \xi) \in C^\infty(A \times R_n \setminus \{0\})$ ed è omogenea di grado $r - k$ in ξ.

i) $u = u_N$ *in* U_N;

ii) $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$, *per ogni* $\xi \in \Gamma_N$, *e per qualche costante* $C \in R_+$.

Se $L' \leqslant L''$, (cioè se $L'_k \leqslant L''_k$, $\forall k \in N$), risulta: $WF(u) \subset WF_{L''}(u) \subset \subset WF_{L'}(u) \subset WF_A(u)$, (*); ne segue: $mr_{L'}(u) \cap WF_{L''}(u) \subset mr_{L''}(u)$, di facile dimostrazione.

Si ha, inoltre, $mr_L(u) \cap WF(u) \subset mr(u)$. Infatti: sia u_N la successione limitata in $\mathcal{E}'(A)$ con: $u = u_N$ in U_N e $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$ per ogni $\xi \in \Gamma_N$. È sufficiente far vedere che $u_N \in H^{N'(N)}_{\mathrm{loc}}((U_N \times \Gamma_N)^*)$ con $N'(N) \to +\infty$, (**). Sia allora $g(x, \xi) \in C_c^\infty(U_N \times \Gamma_N)$ e $a(x) \in C_c^\infty(U_N)$;

$$g(x,D)\,(au)\,(x) = (2\pi)^{-n}\int \exp[ix\xi]\, g_a(x, \xi)\, b_{\Gamma_N}(\xi)\, \hat{u}_N(\xi)\, d\xi\ ,$$

se $b_{\Gamma_N}(\xi)$ è la funzione caratteristica di Γ_N e $g_a(x, \xi)$ è il simbolo del pseudodifferenziale composto: $g(x, D) \circ a(x)$, (***). Poichè le distribuzioni $v_N \in \mathcal{S}'(R^n)$ definite dalla relazione: $v_N(\xi) = b_{\Gamma_N}(\xi)\, \hat{u}_N(\xi)$ sono in $H^{N'(N)}$, se $N'(N)$ è conveniente, ne segue che $u_N \in H^{N'(N)}_{\mathrm{loc}}((U_N \times \Gamma_N)^*)$ così che la u ha la medesima proprietà. Visto poi che $P_0 = (x_0, \xi_0) \in \in WF(u)$ risulta: $P_0(x_0, \xi_0) \in mr(u)$.

Si vuol costruire, ora, un esempio di $u \in \mathcal{D}'(A)$ tale che: $mr_L(u) \neq \emptyset$, per ogni successione $L = (L_k)$ con le proprietà indicate nella def. 1) del n. 2. Per questo è sufficiente costruire una $u \in \mathcal{D}'(A)$ con $WF(u) \cap \cap\, mr_A(u) \neq \emptyset$, dove, come per i precedenti casi, si è posto: $mr_L(u) = = mr_A(u)$ se $L = (L_k)$ e $L_k = k$, $\forall k \in N$. Risulta infatti, con le formule di sopra, $WF(u) \cap mr_A(u) \subset mr_L(u)$. Tale esempio è una modifica di quello al seguito della definizione 1 del n. 2 di [1]; eccolo:

in R^2 si consideri la successione di corone circolari, Γ_N, di centri in $(0, 0)$ e raggi, rispettivamente, $(1/N, 1/N + 1)$. In (R^2) si scelga una successione, u_N, soddisfacente le seguenti proprietà:

(*) La dimostrazione di quelle inclusioni è nella dimostrazione del teorema 3.4 di [4], pag. 678. Per la definizione e le proprietà di $WF(u)$ e di $mr(u)$ si vedano, rispettivamente, [4] e [1].

(**) Per la definizione di $H^s_{\mathrm{loc}}(O^*)$, o aperto in $S^*(A)$, la cosfera fibrata di base A, si veda [1].

(***) Per il calcolo del simbolo composto si veda [3].

i) $u_N \in \mathcal{E}'(\Gamma_N) \cap H^N$;

ii) $u_N \notin H^{N+1}$;

iii) $\|u_N\|_N = 1/N^2$;

iv) $L_N = \sup_{\xi \in R_2}(1 + |\xi|^2)^{N/2}\{|\hat{u}_N(\xi)|\} < +\infty$, $\forall N \in N$, (*).

Verificheremo in seguito la possibilità di una tale scelta.

$\forall N \in N$, si ponga: $v_N = u_N/\max(L_N, 1)$; risulta: in H^N la serie $\sum_{N \leqslant k} v_k$ è convergente verso una V_N. Se si considera le successione delle V_N in $\mathcal{E}'(R^2)$ si vede che:

a) $\|V_N\|_0 \leqslant \|V_N\|_N \leqslant \sum_{N \leqslant k} 1/k^2 \leqslant c$, così che tale successione è limitata in $\mathcal{E}'(R^2)$;

b) se $U_N = \{(x, y) \in R^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1/N$, $V = V_N$ in U_N, posto che $V = \sum_k v_k\}$.

È facile vedere che $(0, 0) \in \operatorname{suppsing} V$; sicchè $\exists \xi \in R_2$ con $(0, 0, \xi)$ in $WF(V)$. Dimostriamo ora che: $(0, 0, \xi) \in mr_A(V)$. Infatti: con la trasformata di Fourier si ha:

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} V_N(\xi) = \sum_{N \leqslant k} v_k(\xi)\,(1 + |\xi|^2)^{k/2}(1 + |\xi|^2)^{k/2 - N/2}\,.$$

Se $|\xi| \neq 0$ la serie converge, puntualmente assolutamente, verso $1/(1 - 1/(1 + |\xi|^2)^{1/2})$; ne segue, se $|\xi| \geqslant 1$,

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2}|v_N(\xi)| \leqslant \sqrt{2}/(\sqrt{2} - 1)\,,$$

come è facile verificare.

Se $|\xi| \leqslant 1$, supposto che sia $|V(\xi)| \leqslant A_0$, risulta $|V_N(\xi)| \leqslant A_0 + N$ così che: $(1 + |\xi|^2)^{N/2}|V_N(\xi)| \leqslant 2^N(A_0 + N)$ sempre che $|\xi| \leqslant 1$; e, quindi, per qualche $C \in R_+$, $|V_N(\xi)| \leqslant C(CN)^N/(1 + |\xi|^2)^{N/2} \leqslant C(CN/|\xi|)^N$. Ciò implica: $(0, 0, \xi) \in mr_A(V)$.

Rimane da verificare la possibilità della scelta delle u_N come sopra.

Scelte le u_N come da i) e ii) sia $a_N \in C_c^\infty(\Gamma_N)$ tale che $a_N u_N$ soddisfi ancora a i) e ii).

(*) H^s indica lo spazio di Sobolev di esponente s; $\|\cdot\|^s$ la sua norma hilbertiana.

$(a_N u_N)\hat{}\,(\xi) = \int \hat{a}_N(\xi - \eta)\, \hat{u}_N(\eta)\, d\eta$, e, con la diseguaglianza di Peetre:

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} |(a_N u_N)\hat{}\,(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant k \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{N/2} |\hat{a}_N(\xi - \eta)| (1 + |\eta|^2)^{N/2} |\hat{u}_N(\eta)|\, d\eta\,.$$

Per il fatto che $a_N \in C_c^\infty(R^2)$, fissato $q \in N$ tale che $|\hat{a}_N(\xi)| \leqslant k/(1 + |\xi|^2)^q$ e $1/(1 + |\xi|^2)^q \in L^2$, (ciò è possibile per il teorema di Paley-Wiener); si ha:

$$(1 + |\xi|^2)^{N/2} |(a_N u_N)\hat{}\,(\xi)| \leqslant k \int (1 + |\xi - \eta|^2)^{-q} (1 + |\eta|^2)^{N/2} |\hat{u}_N(\eta)|\, d\eta\,,$$

che è una convoluzione di funzioni di L^2 e quindi una funzione limitata. Per l'esempio basterà allora scegliere $a_N \in C_c^\infty(\Gamma_N)$ così che: $\|a_N u_N\|_N = 1$, e le $v_N = a_N u_N / N^2 \max(L_N, 1)$, se $L_N = \sup_{\xi \in R_2} (1 + |\xi|^2)^{N/2} |(a_N u_N)\hat{}\,(\xi)|)$.

Infine si vuol costruire un esempio di $u \in \mathcal{D}'(A)$ con: $P_0 = (x_0, \xi_0) \in \in mr_A(u)$ e $P_0 = (x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. Sia la successione delle Γ_N scelta come sopra e si scelgano le $a_N(x) \in C_c^\infty(\Gamma_N)$ in modo tale che la successione a_N sia limitata in $C_c^\infty(B)$ dove B è il cerchio unitario in R^2. Si ha, immediatamente:

$$\sup_{\xi \in R_2} \left((1 + |\xi|^2)^{N/2} |\hat{a}_N(\xi)|\right) = L_N < +\infty\,, \qquad \forall N \in N;$$

si ponga: $b_N(x) = a_N(x)/N^2 \max(L_N, 1)$. La serie $\sum_k b_k(x)$ è convergente in $C_c^\infty(B)$ verso una $b(x)$. Evidentemente $b(x)$, che è in C^∞ in un intorno di $(0, 0)$, non può essere analitica in $(0, 0)$ poichè su Γ_N coincide, essenzialmente, con $a_N(x) \in C_c^\infty(\Gamma_N)$; ne deriva: $\exists \xi_0 \in R_2$ con $(0, 0, \xi_0) \in WF_A(b)$. Se $c_N(x) = \sum_{N \leqslant k} b_k(x)\, b(x) = c_N(x)$ in U_N, dove U_N è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $1/N$; con ragionamenti analoghi ai precedenti, $|\hat{c}_N(\xi)| \leqslant C(CN)^N \setminus \setminus (|\xi|)^N$ $\xi \in R_2 \setminus \{0\}$, e per qualche $C \in R_+$.

Dimostriamo ora il teorema enunciato; per ciò è utile ricordare i seguenti lemmi, (rispettivamente: 2.3, pag. 675 e 3.3, pag. 677 di [4]):

a) Sia $u \in C^L(A)$ e si scelgano le $c_N(x)$ in $C_c^\infty(A)$ così che: $|D^\alpha c_N| \leqslant \leqslant C(CN)^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leqslant N$. Esiste $C \in R_+$ con $|\widehat{c_N u}(\xi)| \leqslant C(CL_N/(L_N + |\xi|)^N$ in R_n

b) Sia $u = u_N$ in U con: u_N successione limitata in $\mathcal{E}'(A)$ e $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$ in intorno conico Γ del semiraggio di direzione ξ_0 in R_n: Scelte le c_N in $C_c^\infty(U)$ con $c_N = 1$ in $K \subset\subset U$ e $|D^{\alpha+\beta} c_N| \leqslant C(CL_N)^{|\beta|}$, $|\beta| \leqslant N$, la succession $c_N u$ è limitata in $\mathcal{E}'(A)$ e $|\widehat{c_N u}(\xi)| \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$ ancora in Γ.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $P_0 = (x_0, \xi^0) \in mr_L(u)$, $u \in \mathcal{D}'(A)$. *Se* P *è un operatore ellittico su* A *con coefficienti ivi analitici*, $P_0 \in mr_L(Pu)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $u = u_N$ in U_N intorno di x_0 con: u_N successione limitata in $\mathcal{E}'(A)$ e $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$ in Γ_N intorno conico del semiraggio di direzione ξ^0 in R_n.

Si ha: $Pu = c_N Pu_N$ in U_N. Si scelgano le c_N come nel lemma b) di sopra; si ha, ancora, $Pu = c_N Pu_N$ in $U_N = U_N \cap K$. La proposizione sarà allora dimostrata se si dimostrerà che: $c_N(x) a^\alpha(x) Du_N$ è una successione limitata in $\mathcal{E}'(A)$ con $|(c_N a^\alpha D^\alpha u_N)\hat{}\,(\xi) \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$ in Γ_N. Ora: la prima proprietà è evidente; posto, per semplicità, $b_N = c_N a^\alpha$, poichè $a^\alpha(x) \in C_A(A)$ si ha, (lemma a): $|b_N(\xi)| \leqslant C(CL_N/(L_N + |\xi|)^N$ in R_n. $D^\alpha u_N$ è una successione che soddisfa, essenzialmente, stesse proprietà della successione u_N, $(|\alpha| \leqslant m)$; allora basterà applicare la stessa dimostrazione del lemma b) per avere la conclusione.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $P_0 = (x_0, \xi^0) \in mr_L(Pu)$, $u \in \mathcal{D}'(A)$ *Se* P *è un operatore ellittico su* A *con coefficienti ivi analitici*, $P_0\, mr_L \in (u)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Pu = Pu_N$ in U_N intorno di x_0 con: u_N successione limitata in $\mathcal{E}'(A)$ e $|\hat{u}_N(\xi)| \leqslant C(CL_N/|\xi|)^N$ in Γ_N intorno conico del semiraggio di direzione ξ^0 in R_n.

Sia $A = A(x, D)$ il pseudodifferenziale su A tale che $A \circ P - I = R$ dove R ha nucleo analitico su $A \times A$. Risulta: in $U'_N \subset U_N$, $Au_N = u + Ru$ e $P_0 \notin WF_A\ (Ru)$ per l'analiticità di R. Si scelgano ancora le c_N in $C_c^\infty(A)$ come nel lemma b); $u = c_N A u_N$ in $U'_N \cap K$. sia $\sigma_A(x, \xi)$ il simbolo di $A(x, D)$; risulta:

$$|(c_N A u_N)\hat{}\,(\xi)| \leqslant K \int |c_N\hat{}\,\sigma_A(\xi - \eta, \eta)||\hat{u}_N(\eta)|\, d\eta ;$$

osservando che: $\sigma_A(x, \xi) \in C_A(A) \widehat{\otimes} O_M$, per il lemma a) si ha:

$$|c_N \sigma\hat{}\,(\theta, \eta)| \leqslant C(CL_N/(|\theta| + L_N)^N (1 + |\eta|)^{-m} ,$$

se m è il grado di P e per ogni $\theta \in R_n$. Ancora la stessa dimostrazione del lemma b) conclude la proposizione (*).

(*) Si è indicato con O_M lo spazio degli operatori di moltiplicaziones u S. Se $\sigma_A(x, \xi)$ indica il simbolo del pseudodifferenziale $A(x, D)$, per verificare che: se $\sigma_A(x, \xi) = 0$ se $x \notin K$ compatto in A si ha:

$$(A(x, D)\, u)\hat{}\,(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \sigma_A((\xi - \eta, \eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta , \qquad u \in \mathcal{E}'(A) ,$$

Si ottiene così il

TEOREMA: *$\forall u \in \mathfrak{D}'(A)$, se $P = P(x, D)$ è operatore differenziale con coefficienti analitici su A ed ivi elittico, $mr_L(Pu) = mr_L(u)$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BRATTI, *Sul comportamento degli operatori differenziali ipoelittici, a coefficienti costanti, sopra i wave front sets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **51** (1973), 105-111.

[2] L. HORMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1969.

[3] L. HORMANDER, *Fourier Integral Operators*, Acta Math., **127** (1971).

[4] L. HORMANDER, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Com. on Pure and Appl. Math., **24** (1971), 671-704.

[5] L. BOUTET DE MONVEL - P. KREE, *Pseudodifferential Operators and Gevray classes*, Ann. Inst. Fourier, **17** (1967), 295-323.

[6] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 gennaio 1974 e in forma revisionata il 7 marzo 1974.

è sufficiente tener presente che: se $b_N(x) \in C_c^\infty(A)$ è una successione che converge in $H_c^s(A)$ verso u, in L^2 la funzione $(1 + |\xi|^2)^{s-m/2}(2\pi)^{-n}\int \sigma_A(\xi - \eta, \eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta$ è il limite della successione: $(1 + |\xi|^2)^{s-m/2}(2\pi)^{-n}\int \sigma_A(\xi - \eta, \eta)\, b_N(\eta)\, d\eta$; ciò si ottiene con una applicazione della diseguaglianza di Peetre.

Altre verifiche inerenti la dimostrazione della proposizione 2) sono immediate.