Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Alberto Zelger

Sul completamento di un gruppo abeliano nella topologia dei sottogruppi di indice finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 52 (1974), p. 59-69

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__59_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Sul completamento di un gruppo abeliano nella topologia dei sottogruppi di indice finito.

ALBERTO ZELGER (*)

Introduzione.

Sia G un gruppo abeliano e $\tilde{G}$ il suo completamento nella topologia dei sottogruppi di indice finito. Scopo principale del presente lavoro è determinare la struttura algebrica di $\tilde{G}$. Si trova che

$$\tilde{G} \cong \prod_{p \in P} \Big(\prod_{\gamma(p)} J_p \oplus \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\tau_n(p)} Z(p^n) \Big),$$

ove $\gamma(p)$ e $\tau_n(p)$ sono numeri cardinali invarianti di G (cfr. teorema 4.5). Si noti che la parte essenziale di questo risultato è il calcolo di $\gamma(p)$ e $\tau_n(p)$ per ogni n, p, dato che già Harrison aveva dimostrato che un gruppo compatto e totalmente sconnesso (tale è $\tilde{G}$) è prodotto diretto di ciclici finiti e di interi p-adici. $\tilde{G}$ non è in generale un gruppo completo nella topologia dei sottogruppi di indice finito; lo è se e solo se la componente p-adica di $\tilde{G}$ è uno $\hat{Z}_p$-modulo finitamente generato per ogni primo p. Tale risultato, già ottenuto da Orsatti in [3], si ritrova per altra via con la prop. 4.6.

Il problema di determinare $\tilde{G}$ si dimostra equivalente (prop. 2.2) a quello di determinare $\tilde{G}$ nella ipotesi che G sia completo nella topologia naturale. Di qui segue, fra l'altro, l'utile risultato per cui, se H è un sottogruppo puro in G e G/H è divisibile, allora $\tilde{G} \cong \tilde{H}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Viene poi dimostrata una proprietà universale di $\tilde{G}$ rispetto ai gruppi compatti e totalmente sconnessi e si trova che $\tilde{G} \simeq bG/D$, ove bG è la compattificazione di Bohr di G e D il sottogruppo divisibile massimale di bG.

1. Tutti i gruppi considerati sono abeliani. Se G è un gruppo, indicheremo con G_∞ il sottogruppo di G costituito dagli elementi di altezza infinita: $G_\infty = \bigcap_{n \in N} nG$, ove N è l'insieme degli interi positivi ed $nG = \{ng | g \in G\}$ per ogni $n \in N$.

Denoteremo con $r_0(G)$, $r_p(G)$ (p primo) il rango senza torsione ed il p-rango di G ([1]).

La topologia dei sottogruppi di indice finito di G è la topologia gruppale $\mathcal{F}(G)$, che si ottiene su G prendendo come base di intorni dello zero i sottogruppi di indice finito. $(G, \mathcal{F}(G))$ è di Hausdorff se e solo se $G_\infty = 0$.

Indicheremo con $\mathcal{N}(G)$ la topologia naturale (Z-adica) di G ([1]).

Se (G, τ) è un gruppo topologico di Hausdorff, indicheremo con $(G, \tau)\hat{}$, il suo completamento. Riserveremo il simbolo $\tilde{G}$ per il completamento del gruppo topologico di Hausdorff $(G/G_\infty, \mathcal{F}(G/G_\infty))$, che chiameremo « completamento di G nella topologia dei sottogruppi di indice finito ». Useremo il simbolo $\hat{G}$ per il « completamento naturale di G », cioè per il completamento di Hausdorff del gruppo $(G/G_\infty, \mathcal{N}(G/G_\infty))$.

Adotteremo i seguenti simboli: P per l'insieme dei numeri primi, Z per il gruppo additivo degli interi, Q per il gruppo additivo dei razionali, Z_p per il gruppo additivo dei razionali con denominatore primo con p ($p \in P$), R per il gruppo additivo dei reali, $J_p (p \in P)$ per il gruppo degli interi p-adici, $Z(n)$ ($n \in N$) per il gruppo ciclico di ordine n. $Z(p^\infty)$ ($p \in P$) per il gruppo quasi-ciclico relativo a p. Per ogni gruppo G e per ogni $n \in N$, porremo $G[n] = \{g \in G | ng = 0\}$.

2. Diamo dapprima una serie di risultati utili.

LEMMA 2.1. *Sia H un sottogruppo di G. Allora H è denso in $(G, \mathcal{F}(G))$ se e solo se G/H è divisibile.*

DIM. H è denso in $(G, \mathcal{F}(G)) \Leftrightarrow G/H$ ha la topologia quoziente banale $\Leftrightarrow G/H$ non ha sottogruppi di indice finito $\Leftrightarrow G/H$ è divisibile. c.v.d.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $G_\infty = 0$ e sia $\hat{G}$ il completamento naturale di G. Allora $\tilde{G} \cong (\hat{G})^\sim$, ove $\cong$ è un isomorfismo algebrico e topologico.*

DIM. Dimostriamo che $\mathcal{F}(G)$ coincide con la topologia relativa indotta da $(\hat{G}, \mathcal{F}(\hat{G}))$ su G.

Se $|\hat{G}:H'|$ è finito, allora $G/(G \cap H') \cong (G + H')/H' \subseteq \hat{G}/H'$ e perciò $|G:(G \cap H')|$ è finito. Viceversa, se $|G:H| = n$ è finito, allora $nG \subseteq H$, da cui $G \cap (H + n\hat{G}) = H + (G \cap n\hat{G}) = H + nG = H$, perchè G è puro in $\hat{G}$; inoltre

$$\hat{G}/(H + n\hat{G}) = (G + n\hat{G} + H)/(H + n\hat{G}) \cong G/(G \cap (H + n\hat{G})) = G/H\,.$$

Il gruppo topologico $(\hat{G})^\sim$ contiene G ed induce su G la topologia $\mathcal{F}(G)$; inoltre G è denso in $(\hat{G})^\sim$, da cui la tesi. c.v.d.

COROLLARIO 2.3. *Sia H un sottogruppo puro di G e sia G/H divisibile. Allora $\tilde{G} \cong \tilde{H}$ (isomorfismo algebrico e topologico).*

DIM. Poichè $\hat{G} \cong \hat{H}$ (completamenti naturali), la tesi segue dalla prop. 2.2. c.v.d.

LEMMA 2.4. *Per ogni gruppo G, il gruppo $\tilde{G}$ è ridotto e compatto nella topologia $\xi(\tilde{G})$ che gli compete in quanto completamento di Hausdorff di $(G/G_\infty, \mathcal{F}(G/G_\infty))$.*

DIM. $\tilde{G}$ è limite proiettivo di gruppi finiti ([1]), quindi è compatto. Poichè $\xi(\tilde{G}) \subseteq \mathcal{F}(\tilde{G})$, e $\xi(\tilde{G})$ è una topologia di Hausdorff, allora anche $\mathcal{F}(\tilde{G})$ lo è, e $(\tilde{G})_\infty = 0$. c.v.d.

OSSERVAZIONE. Coi simboli del lemma 2.4 si ha che $\xi(\tilde{G}) \subseteq \mathcal{F}(\tilde{G}) \subseteq \subseteq \mathcal{N}(\tilde{G})$ e tutte e tre le topologie in questione sono di Hausdorff; inoltre $\tilde{G}$ è completo nella topologia naturale ([1], pag. 163).

LEMMA 2.5. *Sia G un gruppo senza elementi di altezza infinita. Allora G è puro in $\tilde{G}$.*

DIM. Sia $\overline{nG}$ la chiusura di nG $(n \in N)$ in $\tilde{G}$. Allora $n\tilde{G} = \overline{nG}$, come si vede facilmente tenendo presente che la moltiplicazione per n è un'applicazione continua di $\tilde{G}$ in $\tilde{G}$.

$G/nG (n \in N)$ è limitato, per cui nG è intersezione di sottogruppi di indice finito in G. Allora nG è chiuso in $(G, \mathcal{F}(G))$ e così $n\tilde{G} \cap G = \overline{nG} \cap G = nG$. c.v.d.

Sia $G_\infty = 0$. È chiaro che possiamo immergere algebricamente e topologicamente il gruppo $(\hat{G}, \mathcal{F}(G))$ nel gruppo $(\tilde{G}, \xi(\tilde{G}))$ in virtù della prop. 2.2 (per $\xi(\tilde{G})$ cfr. lemma 2.4).

Osservazioni. Sia $G_\infty = 0$ e sia $\hat{G}$ il completamento naturale di G. Consideriamo solo le strutture algebriche dei gruppi in esame.

Poichè $\hat{G}$ è algebricamente compatto e puro in $\tilde{G} \cong (\hat{G})^\sim$, allora $\tilde{G} \cong \hat{G} \oplus (\tilde{G}/\hat{G})$. Inoltre $\tilde{G}/G \cong (\hat{G}/G) \oplus (\tilde{G}/\hat{G})$, ove $\hat{G}/G$ è divisibile, mentre $\tilde{G}/\hat{G}$ è ridotto ed algebricamente compatto. Allora: ($\tilde{G}/G$ è divisibile) $\Leftrightarrow (\tilde{G} \cong \hat{G})$, e ($\tilde{G}/G$ è ridotto) $\Leftrightarrow (G \cong \hat{G})$.

3. Sia $K = R/Z$ il gruppo dei reali modulo 1. Se G è un gruppo e Γ un sottogruppo di $\mathrm{Hom}(G, K)$, indicheremo con τ_Γ la topologia debole indotta su G dai morfismi di Γ. Consideriamo il morfismo diagonale

$$\delta_\Gamma \colon G \to K^\Gamma$$

definito ponendo $[\delta_\Gamma(g)]_\chi = \chi(g)$ per ogni $g \in G$ e $\chi \in \Gamma$.

δ_Γ è iniettivo se e solo se (G, τ_Γ) è di Hausdorff, oppure se e solo se Γ separa i punti di G.

Se Γ separa i punti di G, allora δ_Γ è una immersione algebrica e topologica di (G, τ_Γ) nel gruppo compatto K^Γ. In questa ipotesi, sia G_Γ la chisura di $\delta_\Gamma(G)$ in K^Γ; se dotiamo G_Γ della topologia relativa, risulta: $G_\Gamma \cong (G, \tau_\Gamma)^\wedge$; G_Γ è una compattificazione di G nel senso che è un gruppo compatto (di Hausdorff) contenente come sottogruppo denso una copia isomorfa di G, [4].

È ben noto che $G_\Gamma \cong \mathrm{Hom}(\Gamma, K)$ (anche se Γ non separa i punti di G; [2], pag. 430), ove $\cong$ è un isomorfismo (algebrico), che diventa un isomorfismo algebrico-topologico se dotiamo $\mathrm{Hom}(\Gamma, K)$ della compact-open topology (Γ discreto).

Se $\Gamma = \mathrm{Hom}(G, K)$, allora $bG = G_\Gamma$ si dice « compattificazione di Bohr » del gruppo G. È ben nota la proprietà universale di bG rispetto ai gruppi compatti ([5]); $\tilde{G}$ possiede una proprietà analoga rispetto ai gruppi compatti e totalmente sconnessi:

Teorema 3.1. *Sia $G_\infty = 0$ e sia $f \colon G \to H$ un omomorfismo di G in un gruppo H compatto (di Hausdorff) e totalmente sconnesso. Allora f si estende in uno ed un solo modo ad un omomorfismo continuo $\tilde{f} \colon \tilde{G} \to H$.*

Dim. La topologia τ di H ha come base di intorni di zero una famiglia $\mathcal{B}$ di sottogruppi di indice finito. Se $B \in \mathcal{B}$, allora $f^{-1}(B)$ ha indice finito in G, pertanto f è continuo se dotiamo G della topologia $\mathcal{F}(G)$ ed H della τ.

La f si estende allora in uno ed un solo modo ad un omomorfismo continuo dei completamenti. c.v.d.

LEMMA 3.2. *Sia G un gruppo senza elementi di altezza infinita e sia Γ il sottogruppo di torsione di* $\mathrm{Hom}(G, K)$. *Allora Γ separa i punti di G e $\tau_\Gamma = \mathcal{F}(G)$.*

DIM. Una prebase di intorni dello zero per τ_Γ è data da $\varphi = \{\chi^{-1}(0) | \chi \in \Gamma\}$, quindi la tesi segue subito dal teorema di decomposizione dei gruppi abeliani finiti in somma diretta di gruppi ciclici. c.v.d.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia $G_\infty = 0$. Allora $bG/D \cong \tilde{G}$, ove D è il sottogruppo divisibile massimale di bG e $\cong$ è un isomorfismo algebrico e topologico.*

DIM. Sia Γ il sottogruppo di torsione di $\mathrm{Hom}(G, K)$. Dalla sequenza esatta:

$$0 \to \Gamma \to \mathrm{Hom}(G, K) \to \mathrm{Hom}(G, K)/\Gamma \to 0 ,$$

segue la sequenza esatta:

$$0 \to D = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, K)/\Gamma, K) \to bG \to G_\Gamma \to 0 .$$

Ma $G_\Gamma \cong \tilde{G}$ per il lemma 3.2, perciò D è isomorfo al sottogruppo divisibile massimale di bG, ([1], corollario 47.2). Che $bG/D \cong \tilde{G}$ sia un isomorfismo algebrico-topologico segue dalla teoria della dualità di Pontryagin. c.v.d.

4. D'ora in poi, per semplicità, G sarà sempre un gruppo senza elementi di altezza infinita.

LEMMA 4.1. *Sia G un gruppo. Allora*

$$\tilde{G} \cong \prod_{p \in P} \mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, K), Z(p^\infty))\big)$$

è la decomposizione di $\tilde{G}$ nelle sue componenti p-adiche ($p \in P$; [1], *pag.* 167).

DIM. Se Γ è il sottogruppo di torsione di $\mathrm{Hom}(G, K)$, allora $\tilde{G} \cong \cong \mathrm{Hom}(\Gamma, K) \cong \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Tor}(Q/Z, \mathrm{Hom}(G, K)), K\big)$ per il lemma 3.2 e per un noto risultato di algebra omologica. Dall'isomorfismo canonico:

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}(A, B), C) \oplus \mathrm{Ext}(A \otimes B, C) \cong$$
$$\cong \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \oplus \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Ext}(B, C)),$$

valido per gruppi A, B, C arbitrari, e tenendo conto che K è divisibile, segue:

$$\tilde{G} \cong \mathrm{Ext}\big(Q/Z, \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, K), K)\big) \cong$$
$$\cong \prod_{p\in P} \prod_{q\in P} \mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, K)\, Z(q^\infty))\big).$$

Sia $H_q(G) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, K), Z(q^\infty))$, $q \in P$. È uno Z_q-modulo. Poichè $Z(p^\infty)$ è un p-gruppo, si ha $\mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), H_q(G)\big) = 0$ ogni volta che $p \neq q$.

Allora:

$$\tilde{G} \cong \prod_{p\in P} \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), H_p(G)).$$

Poichè $H_p(G)$ è uno Z_p-modulo per ogni $p \in P$, allora anche $\mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), H_p(G)\big)$ è uno Z_p-modulo per ogni p. Ma $H_p(G)$ è algebricamente compatto ([1], teorema 47.7), quindi $\mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), H_p(G)\big)$ è ridotto ed algebricamente compatto e perciò completo nella topologia p-adica ([1], teorema 39.1). c.v.d.

Per brevità di scrittura, se G è un gruppo, porremo:

$$H_p(G) = \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(G, K), Z(p^\infty)\big)$$
$$\mathrm{Fin}_p(G) = \mathrm{Ext}\big(Z(p^\infty), H_p(G)\big),$$

per ogni $p \in P$. $H_p(G)$ è uno Z_p-modulo algebricamente compatto, $\mathrm{Fin}_p(G)$ è uno Z_p-modulo ridotto ed algebricamente compatto. Sono immediate le osservazioni seguenti:

(*a*) Per ogni $p \in P$, H_p e Fin_p sono funtori covarianti dalla categoria dei gruppi a quella degli Z_p-moduli algebricamente compatti; H_p è un funtore esatto, Fin_p è un funtore esatto a destra.

(*b*) Per ogni $p \in P$, H_p e Fin_p trasformano sequenze p-pure ed esatte in sequenze esatte spezzanti.

(c) Se G è senza torsione, allora $H_p(G)$ è senza torsione per ogni $p \in P$. Se G è divisibile, allora $H_p(G)$ è divisibile e $\mathrm{Fin}_p(G) = 0$ per ogni $p \in P$.

PROPOSIZIONE 4.2. *Se G è un gruppo e $T = \bigoplus_{p \in P} T_p$ la decomposizione primaria del suo sottogruppo di torsione, allora*:

$$\tilde{G} \cong \prod_{p \in P} \tilde{T}_p \oplus (G/T)^{\sim} .$$

DIM. Dalla sequenza pura ed esatta $0 \to T \to G \to G/T \to 0$ segue $\hat{G} \cong \hat{T} \oplus (G/T)^{\wedge}$ (completamenti naturali; [1], teorema 39.8). Segue $(\hat{G})^{\sim} \cong (\hat{T} \oplus (G/T)^{\wedge})^{\sim} \cong (\hat{T})^{\sim} \oplus ((G/T)^{\wedge})^{\sim}$, da cui $\tilde{G} \cong \tilde{T} \oplus (G/T)^{\sim}$ per la proposizione 2.2. Ora T è puro in $\prod_{p \in P} T_p$ ed il quoziente è divisibile, pertanto dal corollario 2.3 abbiamo $\tilde{T} \cong \left(\prod_{p \in P} T_p\right)$; ma $\left(\prod_{p \in P} T_p\right)^{\sim} \cong \prod_{p \in P} \tilde{T}_p$, perchè $\mathcal{F}\left(\prod_{p \in P} T_p\right)$ coincide con la topologia prodotto delle $\mathcal{F}(T_p)$ $(p \in P)$. c.v.d.

Sia G un p-gruppo. Allora $\tilde{G}$ è uno $\hat{Z}_p$-modulo, ove $\hat{Z}_p$ è l'anello degli interi p-adici. $\tilde{G}$ è uno $\hat{Z}_p$-modulo ridotto ed algebricamente compatto, perciò $\tilde{G} \cong \mathrm{Fin}_p(G)$ per il lemma 4.1.

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia G un p-gruppo e $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\alpha_n} Z(p^n)$ un suo sottogruppo basico* (*N.B.*: $\alpha_n = r_p((p^{n-1}G)[p]/(p^n G)[p])$). *Allora*:

$$\tilde{G} \cong \prod_{\eta} J_p \oplus \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\tau_n} Z(p^n) ,$$

ove:

$$\tau_n = \begin{cases} \alpha_n , & \text{se } \alpha_n < \aleph_0 , \qquad (n \in N) , \\ 2^{\alpha_n} , & \text{se } \alpha_n \geq \aleph_0 , \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 0 , & \text{se } \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \aleph_0 \text{ (in tal caso } C = B \text{ finito)} , \\ 2^{\prod_n \alpha_n} - \prod_{n=1}^{\infty} \tau_n , & \text{se } \prod_{n=1}^{\infty} a_n \geq \aleph_0 . \end{cases}$$

DIM. $\tilde{G} \cong \tilde{B}$ per il corollario 2.3, quindi

$$\tilde{G} \cong \operatorname{Ext}\Big(Z(p^\infty), \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Hom}(B, Z(p^\infty)), Z(p^\infty)\big)\Big) =$$

$$= \operatorname{Ext}\Big(Z(p^\infty), \operatorname{Hom}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\alpha_n} Z(p^n), Z(p^\infty)\Big)\Big).$$

Sia $X = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\alpha_n} Z(p^n)$ e sia $B' = \Big(\bigoplus_{\varepsilon} Z\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\bigoplus_{\tau_n} Z(p^n)\Big)$ un sottogruppo p-basico di X. Allora ([1], teorema 35.2):

$$\tau_n = r_p\big((p^{n-1}X)[p]/(p^n X)[p]\big) = r_p\big(Z(p)^{\alpha_n}\big) = \begin{cases} \alpha_n, & \text{se } \alpha_n < \aleph_0, \\ 2^{\alpha_n}, & \text{se } \alpha_n \geqslant \aleph_0. \end{cases}$$

Inoltre:

$$r_p(X/B') = r_p\big(X[p]/B'[p]\big) = r_p\Big(\prod_{\prod_{n=1}^{\infty}\alpha_n} Z(p) \Big/ \bigoplus_{\prod_{n=1}^{\infty}\tau_n} Z(p)\Big) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } \prod_{n=1}^{\infty}\alpha_n < \aleph_0, \\ 2^{\prod_n \alpha_n} - \prod_{n=1}^{\infty}\tau_n, & \text{se } \prod_{n=1}^{\infty}\alpha_n \geqslant \aleph_0. \end{cases}$$

Posto $\eta = r_p(X/B')$, dal teorema 47.1, [1] segue $\operatorname{Hom}(X, Z(p^\infty)) \cong$ $\cong D \oplus \prod_{\eta} J_p \oplus \prod_{n=1}\prod_{\tau_n} Z(p^n)$, con D gruppo divisibile. c.v.d.

PROPOSIZIONE 4.4. *Sia G un gruppo senza torsione e $B_p = \bigoplus_{\beta(p)} Z$ un suo sottogruppo p-basico per ogni $p \in P$ (N.B.: $\beta(p) = r_p(G/pG)$). Allora*:

$$\tilde{G} \cong \prod_{p \in P}\prod_{\sigma(p)} J_p,$$

ove:

$$\sigma(p) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } \beta(p) < \aleph_0, \\ 2^{\beta(p)}, & \text{se } \beta(p) \geqslant \aleph_0. \end{cases}$$

DIM. Dal teorema 47.1, [1], segue $\operatorname{Hom}(G, K) \cong \prod_{p \in P}\prod_{\beta(p)} Z(p^\infty) \oplus Q^\delta$ per qualche δ. Allora $\mathrm{H}_p(G) \cong D \oplus \operatorname{Hom}(Y, Z(p^\infty))$, ove D è un gruppo divisibile ed $Y = \prod_{q \in P} \prod_{\beta(q)} Z(q^\infty)$. Poichè

$$r_p(Y) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } \beta(p) < \aleph_0, \\ 2^{\beta(p)}, & \text{se } \beta(p) \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

allora, posto $\sigma(p) = r_p(Y)$, si ha:

$$\mathrm{Fin}_p(G) \cong \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), \mathrm{Hom}(Y, Z(p^\infty))) = \mathrm{Ext}(Z(p^\infty), \prod_{\sigma(p)} J_p) \cong \prod_{\sigma(p)} J_p,$$

da cui la tesi. c.v.d.

Dalle tre proposizioni precedenti segue infine:

Teorema 4.5. *Sia G un gruppo. Allora:*

$$\tilde{G} \cong \prod_{p \in P} \left(\prod_{\gamma(p)} J_p \oplus \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\tau_n(p)} Z(p^n) \right),$$

ove:

$$\gamma(p) = \eta(p) + \sigma(p),$$

$$\sigma(p) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } \beta(p) < \aleph_0, \\ 2^{\beta(p)}, & \text{se } \beta(p) \geqslant \aleph_0, \end{cases} \qquad \beta(p) = r_p\left(\frac{G}{G_t + pG}\right),$$

$$\eta(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(p) < \aleph_0, \\ 2^{\prod_n \alpha_n(p)} - \prod_{n=1}^{\infty} \tau_n(p), & \text{se } \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(p) \geqslant \aleph_0, \end{cases}$$

$$\alpha_n(p) = r_p\left(\frac{(p^{n-1}G)[p]}{(p^n G)[p]}\right), \quad \tau_n(p) = \begin{cases} \alpha_n(p), & \text{se } \alpha_n(p) < \aleph_0, \\ 2^{\alpha_n(p)}, & \text{se } \alpha_n(p) \geqslant \aleph_0. \end{cases}$$

[G_t è il sottogruppo di torsione di G]

Se $\hat{G}$ è il completamento di G nella topologia dei sottogruppi di indice finito, non è detto che $(\tilde{G}, \mathcal{F}(\tilde{G}))$ sia completo. Ciò accade se e solo se le componenti p-adiche di $\tilde{G}$ sono $\hat{Z}_p$-moduli finitamente generati ([3], teorema 2). Questo risultato segue, per altra via, anche dal teorema 4.5. Vale infatti la seguente:

Proposizione 4.6. *Sia $G \cong \tilde{G}$ un gruppo completo nella topologia dei sottogruppi di indice finito. Allora, coi simboli del teorema precedente, si ha:* $\gamma(p) < \aleph_0$ *e* $\prod_{n=1}^{\infty} \tau_n(p) < \aleph_0$.

Dim. Sia $p \in P$ ed $H = G/pG$. Dimostriamo dapprima che G/pG è finito. Si ha: $H = \bigoplus_{i \in I} H_i$ con $H_i \cong Z(p)$. Supponiamo per assurdo che I sia infinito; sia $h \in \prod_{i \in I} H_i \setminus H$ con $h_i \neq 0$ $\forall i \in I$, ove h_i è la proiezione di h su H_i per ogni $i \in I$. Per ogni sottoinsieme finito F di I, sia

$$(h_F)_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \notin F, \\ h_i, & \text{se } i \in F, \end{cases}$$

ed $H_F = \bigoplus_{i \notin F} H_i$. Allora H_F ha indice finito in H e perciò è chiuso in $(H, \mathcal{F}(H))$.

La famiglia di chiusi $\{h_F + H_F | F$ sottoinsieme finito di $I\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, mentre $\cap \{h_F + H_F | F$ sottoinsieme finito di $I\} = \{h\} \notin H$: assurdo, perchè H è compatto. Dunque I è finito.

Poichè c'è una suriezione naturale di G/pG su $G/(G_t + pG)$, allora $\sigma(p) < \aleph_0$ $\forall p \in P$.

Sia $B = \bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{\alpha_n(p)} Z(p^n)$ un sottogruppo basico di G_t. Allora, per ogni $p \in P$, B/pB è un addendo diretto di G_t/pG_t, perchè B è puro in G_t; G_t/pG_t è un addendo diretto di G/pG, perchè G_t è puro in G. Di qui segue che B/pB, e quindi B, è finito: $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(p) < \aleph_0$. Allora $\prod_{n=1}^{\infty} \tau_n(p) < \aleph_0$. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, Vol. I, Academic Press, 1970.

[2] E. Hewitt - K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis, I*, Springer-Verlag, Heidelberg 1963.

[3] A. ORSATTI, *Sui gruppi abeliani ridotti che ammettono una unica topologia compatta*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **43** (1970), 341-347.
[4] W. W. COMFORT - K. A. ROSS, *Topologies induced by groups of characters*, Fund. Math., **55** (1964), 283-291.
[5] P. HOLM, *On the Bohr compactification*, Math. Annalen, **156** (1964), 34-46.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 dicembre 1973.