RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CESARE PARENTI

Operatori pseudo-differenziali anisotropi su varietà fogliettate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 52 (1974), p. 275-298

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__275_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Operatori pseudo-differenziali anisotropi su varietà fogliettate.

CESARE PARENTI (*)

Introduzione.

Scopo di questo lavoro è mostrare che (certe) varietà fogliettate costituiscono la classe naturale di varietà differenziabili sulle quali definire un'algebra di operatori pseudo-differenziali (O.P.D.) anisotropi che contenga gli operatori differenziali quasi-ellittici.

Il calcolo simbolico locale per O.P.D. anisotropi (cfr. [8], [9], [10]) è una generalizzazione naturale del caso isotropo (cioè omogeneo); per quanto riguarda i cambiamenti di variabili si incontra invece una ben nota difficoltà giacchè gli O.P.D. anisotropi non si conservano per cambiamenti qualunque di variabili. Le varietà differenziabili sulle quali trasportare tali operatori non possono essere, di conseguenza, qualunque e, per quanto ci risulta, sono state considerate sinora solo varietà prodotto che costituiscono, evidentemente, una classe troppo ristretta.

Nel presente lavoro viene determinata una classe di cambiamenti di variabili che conservano certi simboli anisotropi e si mostra come, in un senso opportuno, tale classe sia la più ampia possibile. Si generalizzano così alcuni risultati di [2]. Seguendo [6] si costruisce poi un'algebra di O.P.D. (in $\boldsymbol{R}^n$) e se ne mostra l'invarianza per quei cambiamenti di coordinate. Infine si trasportano, nel modo consueto (cfr. [1]), tali operatori su quelle varietà senza bordo dotate di un

---

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle » - Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

atlante i cui cambiamenti di coordinate sono del tipo anzidetto. È interessante, a nostro avviso, notare come tali varietà siano precisamente delle varietà fogliettate (cfr. [4], [3]) e che, di più, l'esistenza su una varietà di operatori differenziali di un certo tipo implichi che la varietà è fogliettabile.

In particolare, è possibile costruire un operatore tipo « calore » su ogni sfera di dimensione dispari, grazie ai recenti risultati di [14], mentre ciò è impossibile sulle sfere di dimensione pari.

Le notazioni usate sono standard (cfr. [7]).

Desidero infine ringraziare A. Cavallucci per alcuni utili suggerimenti.

1. Simboli anisotropi.

Supponiamo assegnati N interi positivi $m_1, \dots, m_N$ e poniamo $m = \max_j m_j$, $q = (q_1, \dots, q_N) = (m/m_1, \dots, m/m_N)$. Se $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, definiamo $|\xi|_q = \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^{1/q_j}$ (mentre $|\xi|$ indicherà, come di consueto, la norma euclidea di ξ).

Definizione 1.1. Sia X un aperto $\boldsymbol{R}^n$ e μ un numero reale; indichiamo con

$$S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N)$$

lo spazio delle funzioni complesse $p \in C^\infty(X \times \boldsymbol{R}^N)$ tali che per ogni coppia di multiindici α, β e per ogni compatto $K \subset X$ esiste $C_{\alpha,\beta,K} > 0$ per cui

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1 + |\xi|_q)^{\mu - \langle\beta,q\rangle} \tag{1.1}$$

uniformemente su K e per ogni $\xi \in \boldsymbol{R}^N$ $\left(\langle\beta, q\rangle = \sum_{j=1}^{N} \beta_j q_j\right)$.

Se d_1, d_2 sono interi positivi con

$$S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$$

indicheremo lo spazio delle matrici

$$p = (p_{jk}) \qquad j = 1, \dots, d_1;\ k = 1, \dots, d_2$$

con $p_{jk} \in S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N)$ per ogni j e k. ■

Si intende di munire $S^{\mu,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)$ della topologia indotta dalle seminorme associate in modo naturale alle (1.1). Con ciò si ottiene uno spazio di Fréchet (spazio dei q-simboli (matriciali) d'ordine μ). Se confrontiamo le classi $S^{\mu,q}$ con le classi $S^r_{\varrho,\delta}$ di [5] troviamo

$$S^{\mu,q}(X\times \boldsymbol{R}^N) \hookrightarrow S^{\bar{\mu}}_{\varrho,0}(X\times \boldsymbol{R}^N) \tag{1.2}$$

con $\bar{\mu}=\max\limits_j \mu/q_j$, $\varrho = 1/\max\limits_j q_j$. Si osservi che (1.2) è la migliore inclusione possibile ed inoltre $\varrho=1$ se e solo se $m_1=\ldots=m_N$. Al solito, si porrà

$$S^{-\infty,q}=\bigcap_\mu S^{\mu,q}\,; \qquad S^{\infty,q}=\bigcup_\mu S^{\mu,q} \tag{1.3}$$

con le loro topologie naturali. Si dirà che due simboli $p, p'\in S^{\infty,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)$ sono *equivalenti*, e si scriverà $p\sim p'$, se

$$p-p'\in S^{-\infty,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)\,.$$

Sia μ_j, $j=0,1,\ldots$ una successione di numeri reali per cui $\mu_j\to-\infty$ e sia $p_j\in S^{\mu_j,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)$, $j\geqslant 0$; posto $\mu'_k=\max\limits_{j\geqslant k}\mu_j$, $k=0,1,\ldots$, diremo che $p\in S^{\mu'_0,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)$ ha lo *sviluppo asintotico* $\sum\limits_{j\geqslant 0} p_j$, e scriveremo $p\sim\sum\limits_{j\geqslant 0} p_j$, se

$$p-\sum_{j<k} p_j\in S^{\mu'_k,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)\,, \qquad k=1,2,\ldots\,. \tag{1.4}$$

Abbiamo il

TEOREMA 1.1. *Assegnata la serie formale* $\sum\limits_{j\geqslant 0} p_j$, $p_j\in S^{\mu_j,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)$, *con* $\mu_j\to-\infty$, *e posto* $\mu'_k=\max\limits_{j\geqslant k}\mu_j$ $(k=0,1,\ldots)$, *esiste* $p\in S^{\mu'_0,q}(X\times \boldsymbol{R}^N;\, d_1, d_2)$, *univocamente determinato modulo* $S^{-\infty,q}$, *tale che* $p\sim\sum\limits_{j\geqslant 0} p_j$.

Prova. Esattamente come per il Teorema 2.7 di [5]. ∎

Consideriamo ora l'insieme dei polinomi del tipo

$$p(x,\xi)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \tag{1.5}$$

con $a_\alpha \in C^\infty(X)$ e $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, e supponiamo che la famiglia dei supporti delle a_α sia localmente finita in X. Chiameremo *q-grado* del polinomio (1.5) il $\sup\limits_{a_\alpha \neq 0} \langle \alpha, q\rangle$ ed indichiamo con $P^{\mu,q}(X\times \boldsymbol{R}^N)$, $\mu \geqslant 0$, il sottospazio di $S^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N)$ costituito dai polinomi (1.5) con q-grado $\leqslant \mu$. $P^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$ sarà poi l'insieme delle matrici $d_1\times d_2$ a termini in $P^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N)$. È conveniente osservare che la funzione $Z^N \ni \alpha \mapsto \langle\alpha, q\rangle$ ha come codominio l'insieme dei multipli interi del numero razionale

$$\theta = \theta(q) = m \ m''/m' \tag{1.6}$$

dove m' è il minimo comune multiplo tra $m_1, \ldots, m_N$ ed m'' è il massimo comune divisore tra $m'/m_1, \ldots, m'/m_N$; si noti che $0 < \theta \leqslant 1$ e che $\theta = 1$ se e solo se m_j è divisore di m per ogni j.

DEFINIZIONE 1.2. Si dirà che il simbolo $p \in S^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$ è *pseudo-invertibile a sinistra* (*destra*) se esiste $p' \in S^{-\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_2, d_1)$ tale che

$$p'p \sim I_{d_2} \qquad (\text{risp. } pp' \sim I_{d_1}) \tag{1.7}$$

essendo I_{d_1}, I_{d_2} le matrici identità in $\boldsymbol{C}^{d_1}$, $\boldsymbol{C}^{d_2}$.
Qualora p sia pseudo-invertibile a sinistra ed a destra si dirà che p è *pseudo-invertibile*. ∎

Abbiamo il

TEOREMA 1.2. Sia $p \in S^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$; sono equivalenti le affermazioni:

i) p è pseudo-invertibile a sinistra (risp. a destra).

ii) p^* e ${}^tp$ (aggiunta e trasposta di p) sono pseudo-invertibili a destra (risp. a sinistra).

iii) Esiste $r \in S^{-\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_2, d_1)$ per cui

$$rp - I_{d_2} \in S^{-t,q} \qquad (\text{risp. } pr - I_{d_1} \in S^{-t,q})$$

per un $t > 0$.

Prova. È ovvia l'equivalenza tra i) ed ii). È pure banale che i) implica iii). Supponiamo quindi che si abbia $rp = I_{d_2} - \varrho$ con $r \in S^{-\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_2, d_1)$ e $\varrho \in S^{-t,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_2, d_2)$ per un $t > 0$. Consideriamo la serie formale $\sum\limits_{j\geqslant 0} \varrho^j$; poichè, ovviamente, $\varrho^j \in S^{-jt,q}(X\times\boldsymbol{R}^N;$

$d_2, d_2)$, segue dal Teorema 1.1 l'esistenza di un simbolo $\sigma \in S^{0,q}(X \times \boldsymbol{R}^N;$ $d_2, d_2)$ per cui $\sigma \sim \sum_{j \geqslant 0} \varrho^j$. Ora $\sigma(I_{d_2} - \varrho) - I_{d_2} \in S^{-\infty,q}$ e quindi $(\sigma r)p = \sigma(I_{d_2} - \varrho) \sim I_{d_2}$, sicchè p è pseudo-invertibile a sinistra. Analogo discorso per l'altro caso. ■

Osservazione. Se $p \in S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$ è pseudo-invertibile a sinistra (risp. a destra), allora per ogni compatto $K \subset X$ esiste $C_K > 0$ per cui la matrice $p(x, \xi)$ ha rango d_2 (risp. d_1) per ogni $x \in K$ e $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, $|\xi|_q \geqslant C_K$. Infatti se esiste $r \in S^{-\mu,q}$ tale che $rp - I_{d_2} = -\varrho$, $\varrho \in S^{-\infty,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_2, d_2)$, allora, fissato il compatto K, la matrice $\varrho(x, \xi)$ ha norma (diciamo euclidea) < 1 per ogni $x \in K$ e $\xi \in \boldsymbol{R}^N$, $|\xi|_q \geqslant C_K$, con $C_K > 0$ opportuna. Per tali x e ξ, poichè $I_{d_2} - \varrho(x, \xi)$ è invertibile, la matrice $p(x, \xi)$ ha quindi rango d_2. Discorso analogo se p è pseudo-invertibile a destra.

Teorema 1.3. Sia $\mu > 0$ un multiplo intero di θ (θ dato da (1.6)) e $p = (p_{jk}) \in P^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$ con $p_{jk}(x, \xi) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leqslant \mu} a_{\alpha,jk}(x) \xi^\alpha$. Poniamo

$$p_{jk}^{(0)}(x, \xi) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle = \mu} a_{\alpha,jk}(x) \xi^\alpha, \qquad p^{(0)} = (p_{jk}^{(0)}).$$

Allora p è pseudo-invertibile a sinistra (risp. a destra) se e solo se $p^{(0)}(x, \xi)$ ha rango d_2 (risp. d_1) per ogni $(x, \xi) \in X \times (\boldsymbol{R}^N \setminus 0)$.

Prova. Poichè $p - p^{(0)} \in S^{\mu-\theta,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$, segue dal Teorema 1.2 che p è pseudo-invertibile a sinistra (risp. a destra) se e solo se è tale $p^{(0)}$. Ora si ha

$$p^{(0)}(x, t^{q_1}\xi_1, \ldots, t^{q_N}\xi_N) = t^\mu p^{(0)}(x, \xi) \tag{1.8}$$

per ogni $(x, \xi) \in X \times \boldsymbol{R}^N$ e per ogni $t > 0$; dunque

$$p^{(0)}(x, \xi) = |\xi|_q^\mu p^{(0)}(x, \xi_1/|\xi|_q^{q_1}, \ldots, \xi_N/|\xi|_q^{q_N}), \tag{1.9}$$

e quindi, per l'osservazione precedente, se p è pseudo-invertibile a sinistra (risp. a destra) allora $p^{(0)}(x, \xi)$ ha rango d_2(risp. d_1) su $X \times (\boldsymbol{R}^N \setminus 0)$. Supponiamo, viceversa, che $p^{(0)}(x, \xi)$ abbia rango costante d_2 per ogni $(x, \xi) \in X \times (\boldsymbol{R}^N \setminus 0)$; allora la matrice ${}^t p^{(0)} p^{(0)}$ è invertibile per ogni (x, ξ), $\xi \neq 0$.Sia $\omega \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ una funzione reale nulla per $|\xi|_q < 1$ ed eguale ad 1 per $|\xi|_q > 2$. Posto

$$h(x, \xi) = \omega(\xi)[{}^t p^{(0)} p^{(0)}]^{-1}(x, \xi) \tag{1.10}$$

è immediato riconoscere che $h \in S^{-2\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_2, d_2)$, e quindi

$$(h\,{}^t p^{(0)})\, p^{(0)} - I_{d_2} = (\omega - 1) I_{d_2} \in S^{-\infty,q}$$

sicchè $p^{(0)}$ è pseudo-invertibile a sinistra. Discorso analogo se $p^{(0)}$ ha rango d_1 su $X \times (\boldsymbol{R}^N \setminus 0)$. ∎

D'ora innanzi faremo su $m_1, \ldots, m_N$ l'ipotesi seguente; supponiamo che esistano $r_1, \ldots, r_\nu$ interi positivi per cui

i) $r_1 + \ldots + r_\nu = N$;

ii) $m_1 = \ldots = m_{r_1} < m_{r_1+1} = \ldots = m_{r_1+r_2} < \ldots < m_{r_1+\ldots+r_{\nu-1}+1} = \ldots = m_N$.

Indicato con $GL(N, \boldsymbol{R})$ il gruppo delle matrici reali $N \times N$ invertibili, sia $GL_q(N, \boldsymbol{R})$ il sottogruppo chiuso costituito dalle matrici a blocchi

$$A = (A_{ij}) \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu;\ j = 1, 2, \ldots, \nu \tag{1.11}$$

essendo A_{ij} una matrice $r_i \times r_j$, $A_{jj} \in GL(r_j, \boldsymbol{R})$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, e $A_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & * \\ 0 & A_{22} & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & A_{\nu\nu} \end{pmatrix}.$$

In altri termini, la matrice $A = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,N} \in GL_q(N, \boldsymbol{R})$ se e solo se $a_{jk} = 0$ ogni volta che $m_j > m_k$. Si osservi che $GL_q(N, \boldsymbol{R}) = GL(N, \boldsymbol{R})$ (nel caso $N > 1$) se e solo se $\nu = 1$, cioè $m_1 = \ldots = m_N$; il caso genuinamente anisotropo si ha quindi se $\nu \geqslant 2$. Siano ora X ed Y due aperti di $\boldsymbol{R}^n$ e $\varphi\colon X \to Y$ sia un'applicazione di classe C^∞. Per ogni $A \in C^\infty(X, GL(N, \boldsymbol{R}))$ si consideri il morfismo

$$\begin{cases} T\colon X \times \boldsymbol{R}^N \to Y \times \boldsymbol{R}^N, \\ T(x, \xi) = \big(\varphi(x), A(x)\xi\big). \end{cases} \tag{1.12}$$

Se poi $p \in C^\infty(Y \times \boldsymbol{R}^N)$, poniamo $p_T = p \circ T$. Abbiamo ora il

Teorema 1.4. Se nel morfismo (1.12) si ha $A \in C^\infty(X, GL_q(N, \boldsymbol{R}))$, allora, per ogni $p \in S^{\mu,q}(Y \times \boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$ riesce $p_T \in S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$.

Prova. Sia $A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1,\dots,N}$ e si ponga

$$\omega_j(x, \xi) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_k, \quad j = 1, \dots, N. \tag{1.13}$$

Cominciamo col provare che

$$\omega_j \in S^{q_j,q}(X \times \boldsymbol{R}^N), \quad j = 1, \dots, N \tag{1.14}$$

se e solo se $A(x) \in GL_q(N, \boldsymbol{R})$ per ogni x. La necessità è ovvia giacchè pretendere che si abbia $\omega_j(x, \xi) = O(|\xi|_q^{q_j})$, $|\xi|_q \to \infty$, per ogni x, implica che deve essere $a_{jk}(x)t = O(t^{q_j/q_k})$, $t \to +\infty$, per ogni x e quindi, se $m_j > m_k$, dovrà essere $a_{jk} \equiv 0$ su X. Viceversa, se $A \in C^\infty(X, GL_q(N, \boldsymbol{R}))$, riesce

$$\omega_j(x, \xi) = \sum_{\substack{k=1 \\ m_j \leqslant m_k}}^{N} a_{jk}(x)\xi_k$$

e quindi, banalmente, $\omega_j \in P^{q_j,q}(X \times \boldsymbol{R}^N) \subset S^{q_j,q}(X \times \boldsymbol{R}^N)$.

Proviamo ora il Teorema supponendo, com'è lecito, $d_1 = d_2 = 1$. Facciamo vedere che per ogni coppia di multiindici α, β si ha

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_T(x, \xi) = \sum_{\alpha',\beta'} p_{(\alpha')}^{(\beta')}(\varphi(x), A(x)\xi)\, \psi_{\beta,\beta'}(x, \xi) \tag{1.15}$$

dove $p_{(\alpha')}^{(\beta')} = \partial_y^{\alpha'} \partial_\eta^{\beta'} p$, con $\psi_{\beta,\beta'} \in P^{\langle \beta'-\beta, q\rangle, q}(X \times \boldsymbol{R}^N)$ e la somma in (1.15) è estesa ad un numero finito di multiindici α', β'.

L'affermazione è ovvia se $|\alpha| + |\beta| = 0$; supposto che sia vera se $|\alpha| + |\beta| = l$ proviamola per due multiindici α, β con $|\alpha| + |\beta| = l + 1$. Distinguiamo due casi:

I) $\alpha = \alpha' + e_j$, $e_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$; per ipotesi si ha:

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_T(x, \xi) = \sum_{\varrho,\delta} \Bigg[& \sum_{1}^{n}{}_k\, p_{(\varrho+e_k)}^{(\delta)}(\varphi(x), A(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x)\, \psi_{\beta,\delta}(x, \xi) + \\ & + \sum_{1}^{N}{}_h\, p_{(\varrho)}^{(\delta+e_h)}(\varphi(x), A(x)\xi)\, \psi_{\beta,\delta}(x, \xi) \frac{\partial \omega_h}{\partial x_j}(x, \xi) + \\ & + p_{(\varrho)}^{(\delta)}(\varphi(x), A(x)\xi) \frac{\partial \psi_{\beta,\delta}}{\partial x_j}(x, \xi) \Bigg]; \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva

$$\frac{\partial \psi_{\beta,\delta}}{\partial x_j}\,, \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\,\psi_{\beta,\delta} \in P^{\langle \delta-\beta,q\rangle,q}(X\times \boldsymbol{R}^N)$$

mentre per l'osservazione iniziale

$$\psi_{\beta,\delta+e_h} = \psi_{\beta,\delta}\,\frac{\partial \omega_h}{\partial x_j} \in P^{\langle \delta+e_h-\beta,q\rangle,q}(X\times \boldsymbol{R}^N)\,.$$

II) $\beta=\beta'+e_j$; per ipotesi si ha

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_T(x,\xi) = \sum_{\varrho,\delta}\Big[\sum_1^N{}_h\, p_{(\varrho)}^{(\delta+e_h)}\big(\varphi(x),A(x)\xi\big)\,a_{hj}(x)\,\psi_{\beta',\delta}(x,\xi)+ + p_{(\varrho)}^{(\delta)}\big(\varphi(x),A(x)\xi\big)\,\frac{\partial \psi_{\beta',\delta}}{\partial \xi_j}(x,\xi)\Big];$$

Ora, per l'osservazione iniziale,

$$\psi_{\beta,\delta} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\,\psi_{\beta',\delta} \in P^{\langle \delta-\beta,q\rangle,q}(X\times \boldsymbol{R}^N)\,.$$

D'altra parte $a_{hj}\equiv 0$ in X se $q_h<q_j$ e quindi, in ogni caso,

$$a_{hj}\in P^{q_h-q_j,q}(X\times \boldsymbol{R}^N)$$

sicchè $\psi_{\beta,\delta+e_h}=a_{hj}\psi_{\beta',\delta}\in P^{\langle \delta+e_h-\beta,q\rangle,q}(X\times \boldsymbol{R}^N)$.

La (1.15) è quindi dimostrata. Da (1.15) e dalla Definizione 1.1 segue allora

$$(1.16)\qquad |D_x^\alpha D_\xi^\beta p_T(x,\xi)| \leqslant \leqslant \sum_{\alpha',\beta'}\{C_{\alpha',\beta'}(x)(1+|A(x)\xi|_q)^{\mu-\langle\beta',q\rangle}\,C_{\beta,\beta'}(x)(1+|\xi|_q)^{\langle\beta'-\beta,q\rangle}\}$$

su $X\times\boldsymbol{R}^N$, essendo $C_{\alpha',\beta'}$ e $C_{\beta,\beta'}$ opportune funzioni localmente limitate in X.

D'altra parte, giacchè $GL_q(N,\boldsymbol{R})$ è un sottogruppo chiuso di $GL(N,\boldsymbol{R})$, si ha che $A^{-1}\in C^\infty(X, GL_q(N,\boldsymbol{R}))$ e quindi, per ogni $\tau\in\boldsymbol{R}$, riuscirà

$$(1.17)\qquad (1+|A(x)\xi|_q)^\tau \leqslant C_\tau(x)(1+|\xi|_q)^\tau$$

su $X\times\boldsymbol{R}^N$, essendo $x\mapsto C_\tau(x)$ un'opportuna funzione localmente limitata in X. Da (1.16) ed (1.17) segue quindi, immediatamente, la tesi. ∎

Osservazione. Nelle ipotesi del Teorema 1.4, se $p\in P^{\mu,q}(Y\times\boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$, allora $p_T\in P^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d_1, d_2)$. Infatti, supposto $d_1=d_2=1$ e

$$p(y,\eta)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leqslant\mu} a_\alpha(y)\eta^\alpha$$

sarà

$$P_T(x,\xi)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leqslant\mu} a_\alpha(\varphi(x))\left[\prod_{j=1}^N\sum_{|\beta^{(j)}|=\alpha_j}\frac{\alpha_j!}{\beta^{(j)}!}\,a_{j1}^{\beta_1^{(j)}}(x)\,\dots\,a_{jN}^{\beta_N^{(j)}}(x)\,\xi_1^{\beta_1^{(j)}}\dots\,\xi_N^{\beta_N^{(j)}}\right].$$

Dunque p_T è una somma di monomi in ξ del tipo

$$(1.18)\qquad \xi_1^{\sum_{k=1}^N\beta_1^{(k)}}\dots\,\xi_N^{\sum_{k=1}^N\beta_N^{(k)}}.$$

Poichè $a_{jk}\equiv 0$ su X se $m_j>m_k$, possiamo supporre che in (1.18) si abbia $\beta_k^{(j)}=0$ se $m_j>m_k$, e quindi

$$\sum_{k,j=1}^N\beta_k^{(j)}/m_k=\sum_{k=1}^N\left(\sum_{j=1}^N\beta_k^{(j)}\right)\frac{1}{m_k}\leqslant\sum_{k=1}^N\left(\sum_{j=1}^N\frac{\beta_k^{(j)}}{m_j}\right)\leqslant\sum_{j=1}^N|\beta^{(j)}|/m_j=\sum_{j=1}^N\alpha_j/m_j\leqslant\mu/m\,.$$

Si noti, infine, che se p è un simbolo pseudo-invertibile a sinistra (destra) allora p_T è pure pseudo-invertibile a sinistra (destra).

Ci si può domandare in che senso il Teorema 1.4 dia un risultato ottimo; a questo proposito abbiamo il

Teorema 1.5. Assegnato il morfismo (1.12), si supponga che esista

$$p\in S^{\mu,q}(Y\times\boldsymbol{R}^N; d, d)\,,\qquad \mu\neq 0\,,$$

pseudo-invertibile, tale che $p_T\in S^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^N; d, d)$. Allora riesce

$$A\in C^\infty(X, GL_q(N,\boldsymbol{R}))\,.$$

Prova. Come conseguenza dell'Osservazione al Teorema 1.2 si ha intanto che se p è pseudo-invertibile allora, per ogni compatto $K \subset Y$, esistono C_K, $C'_K > 0$ per cui

$$\|p(y, \eta)\| \geqslant C'_K |\eta|_a^\mu \tag{1.19}$$

per ogni $y \in K$, $\eta \in \boldsymbol{R}^N$ con $|\eta|_a \geqslant C_K$ ($\|p\|$ è, per esempio, la norma euclidea della matrice p). Dunque, in particolare, per ogni fissato $y \in Y$, avremo

$$\|p(y, \eta)\| \geqslant C' |\eta|_a^\mu \tag*{(1.19)$'$}$$

purchè sia $|\eta|_a \geqslant C$ ($C, C' > 0$, dipendenti da y). Sia ora $x \in X$ fissato; avremo

$$\|p(\varphi(x), A(x)\xi)\| \geqslant C' |A(x)\xi|_a^\mu \tag{1.20}$$

purchè $|A(x)\xi|_a \geqslant C$, e cioè per $|\xi|_a \geqslant C''$ con C'' opportuna (si tenga conto del fatto che $|\zeta|_a \to \infty$ se e solo se $|\zeta| \to \infty$). Poichè, per ipotesi, $p_T \in S^{\mu,a}(X \times \boldsymbol{R}^N; d, d)$, sarà

$$\|p(\varphi(x), A(x)\xi)\| \leqslant \bar{C}(1 + |\xi|_a)^\mu \tag{1.21}$$

per un $\bar{C} > 0$ dipendente da x e per ogni $\xi \in \boldsymbol{R}^N$. In conclusione

$$|A(x)\xi|_a^\mu \leqslant \bar{C}/C'(1 + |\xi|_a)^\mu \tag{1.22}$$

purchè sia $|\xi|_a \geqslant C''$. Da (1.22) si trae, se $\mu > 0$,

$$\sum_{j=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_k = 0(|\xi|_a^{a_j}), \qquad |\xi|_a \to \infty,$$

se $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,N}$, e quindi, come nella prima parte della prova del Teorema 1.4, $a_{jk} \equiv 0$ se $m_j > m_k$. Se poi $\mu < 0$, da (1.22) avremo

$$|\xi|_a \leqslant 1 + |\xi|_a \leqslant (\bar{C}/C')^{1/|\mu|} |A(x)\xi|_a \leqslant (\bar{C}/C')^{1/|\mu|}(1 + |A(x)\xi|_a) \tag*{(1.22)$'$}$$

se $|\xi|_a \geqslant C''$. Posto $A(x)\xi = \eta$, si ha quindi

$$|A^{-1}(x)\eta|_a \leqslant (\bar{C}/C')^{1/|\mu|}(1 + |\eta|_a)$$

se $|\eta_q| \geqslant C''''$, $C''''>0$ opportuna. Di qui, come prima,

$$A^{-1} \in C^\infty(X, GL_q(N, \boldsymbol{R}))$$

e quindi la tesi. ■

OSSERVAZIONE. Se si sopprime la condizione che p sia pseudo-invertibile il risultato non è più vero (per esempio se $p(y, \eta) = \eta_1^{m_1}$, allora $p_T \in S^{m,q}(X \times \boldsymbol{R}^N)$ qualunque sia la matrice A). Se si sopprime la condizione $\mu \neq 0$ il risultato è pure falso giacchè ogni funzione $y \mapsto a(y)$ che sia C^∞ e mai nulla in Y è un q-simbolo d'ordine 0 e pseudo-invertibile. Infine osserviamo che nel Teorema 1.5 non occorre richiedere che sia $p_T \in S^{\mu,q}$, ma basta che si abbia $\|p_T(x, \xi)\| = O(|\xi|_q^\mu)$, $|\xi|_q \to \infty$, per ogni $x \in X$.

2. Operatori pseudo-differenziali anisotropi.

In questo numero consideriamo gli operatori integrali di Fourier associati in modo naturale ai simboli definiti nel § 1. I risultati che precedono il Teorema 2.3 costituiscono un'estensione banale degli analoghi risultati dei Cap. I e II di [6] e quindi cercheremo di esporli il più succintamente possibile.

DEFINIZIONE 2.1. Sia $X(Y)$ un aperto di $\boldsymbol{R}^{n_1}(\boldsymbol{R}^{n_2})$; una mappa

$$\varphi: X \times Y \times \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$$

si dirà una *fase* se

a) $\varphi \in C^\infty(X \times Y \times (\boldsymbol{R}^N \setminus 0))$.

b) $\varphi(x, y, t\xi) = t\varphi(x, y, \xi)$, $t > 0$.

c) $\xi \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |\mathrm{grad}_x \varphi| + |\mathrm{grad}_\xi \varphi| > 0 \\ |\mathrm{grad}_y \varphi| + |\mathrm{grad}_\xi \varphi| > 0 \end{cases}, \quad \forall x, y .$ ■

Assegnata una fase, allora per ogni $p \in S^{\infty,q}(X \times Y \times \boldsymbol{R}^N)$ resta definito, come in [6], l'integrale oscillante (operatore integrale di Fourier)

$$Pu(x) = \iint \exp[i\varphi(x, y, \xi)] p(x, y, \xi) u(y) \, dy \, d\xi \tag{2.1}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(Y)$. Come in [6] si provano i seguenti risultati:

i) P, definito dalla (2.1), è un operatore lineare continuo da $C_0^\infty(Y)$ in $C^\infty(X)$ che si prolunga con continuità da $\mathcal{E}'(Y)$ in $\mathcal{D}'(X)$.

ii) Detto $K_P \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ il nucleo distribuzione di P, si ha

$$(2.2) \qquad \langle K_P, w\rangle = \iiint \exp[i\varphi(x, y, \xi)]p(x, y, \xi)\, w(x, y)\, dx\, dy\, d\xi$$

per ogni $w \in C_0^\infty(X \times Y)$ (integrale oscillante). Inoltre, posto

$$C = \{(x, y, \xi) \in X \times Y \times (\boldsymbol{R}^N \setminus 0) | \operatorname{grad}_\xi \varphi(x, y, \xi) = 0\}$$

si ha

$$(2.3) \qquad \operatorname{suppsing}(Pu) \subset C_\varphi \operatorname{suppsing}(u)\,, \qquad \forall u \in \mathcal{E}'(Y)$$

essendo C_φ la proiezione di C su $X \times Y$ e C_φ suppsing(u) l'immagine in X del supporto singolare di u attraverso la relazione C_φ.

Ciò premesso diamo la

DEFINIZIONE 2.2. Sia X un aperto di $\boldsymbol{R}^n$; indichiamo con $L^{\mu,q}(X)$ la classe degli operatori integrali di Fourier (2.1) con $\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi\rangle$ e $p \in S^{\mu,q}(X \times X \times \boldsymbol{R}^n)$. Si indicherà anche con L_p l'operatore

$$(2.4) \qquad L_p u(x) = \iint \exp[i\langle x - y, \xi\rangle]p(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi\,, \quad u \in C_0^\infty(X)\,. \quad \blacksquare$$

Gli elementi di $L^{\mu,q}(X)$ si diranno *operatori pseudo-differenziali* (O.P.D.) *q-anisotropi d'ordine* μ *su* X. Si pone poi

$$(2.5) \qquad L^{-\infty,q}(X) = \bigcap_\mu L^{\mu,q}(X)\,; \qquad L^{\infty,q}(X) = \bigcup_\mu L^{\mu,q}(X)\,.$$

Dalla Definizione 2.2 segue che $C_\varphi = \Delta_X$ (diagonale di $X \times X$) e quindi, da (2.3), segue la ben nota proprietà di *pseudo-località* per un O.P.D. $P \in L^{\infty,q}(X)$,

$$(2.3)' \qquad \operatorname{suppsing}(Pu) \subset \operatorname{suppsing}(u)\,, \qquad \forall u \in \mathcal{E}'(X)\,.$$

Due O.P.D. $A, B \in L^{\infty,q}(X)$ si dicono *equivalenti*, $A \sim B$, se $A - B \in L^{-\infty,q}(X)$.

DEFINIZIONE 2.3. Un O.P.D. $P \in L^{\mu,q}(X)$ si dice *proprio*, e si scrive $P \in L_c^{\mu,q}(X)$, se, detto K_P il nucleo distribuzione di P, entrambe le proiezioni di $\operatorname{supp}(K_P)$ su X sono proprie. ■

Si dimostra facilmente che sono equivalenti le affermazioni

i) $P \in L_c^{\mu,q}(X)$.

ii) Per ogni compatto $K \subset X$ esiste un compatto $K' \subset X$ tale che

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(u) \subset K \Rightarrow \operatorname{supp}(Pu) \subset K', \\ \quad u|_{K'} = 0 \quad \Rightarrow \quad Pu|_K = 0 \end{cases} \qquad \forall u \in C_0^\infty(X).$$

iii) P opera con continuità da $C^\infty(X)$ in sè e da $C_0^\infty(X)$ in sè.

Sia V un intorno chiuso di Δ_X tale che entrambe le proiezioni di V su X siano proprie e sia $\zeta \in C^\infty(X \times X)$, $\operatorname{supp}(\zeta) \subset V$, e $\zeta = 1$ su un intorno di Δ_X. Se si ha $p \in S^{\mu,q}(X \times X \times \boldsymbol{R}^n)$, risulta $L_p = L_{\zeta p} + L_{(1-\zeta)p}$. Ora, banalmente, $L_{\zeta p}$ è proprio, mentre, essendo il nucleo distribuzione di $L_{(1-\zeta)p}$ nullo su un intorno di Δ_X, si ha $L_{(1-\zeta)p} \in L^{-\infty,q}(X)$, sicchè $L_p \sim L_{\zeta p}$, cioè ogni O.P.D. è equivalente ad un O.P.D. proprio.
Si ha il

TEOREMA 2.1. Sia (2.4) un O.P.D. proprio. Esiste uno ed un solo simbolo $\sigma(P) \in S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^n)$ tale che

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp[i\langle x, \xi\rangle]\sigma(P)(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi \tag{2.6}$$

essendo $\hat{u}$ la trasformata di Fourier di $u \in C_0^\infty(X)$. Inoltre riesce

$$\sigma(P)(x,\xi) \sim (2\pi)^n \sum_{j \geqslant 0} \sum_{\langle \alpha, q\rangle = \theta j} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha p(x,y,\xi)|_{y=x}. \tag{2.7}$$

Prova. Analoga a quella del Teorema 2.1.1 di [6]. ■

La funzione $\sigma(P)$ si dice il *simbolo* dell'operatore proprio P. Più in generale, si dirà che $p \in S^{\mu,q}(X \times \boldsymbol{R}^n)$ è un *simbolo* per l'O.P.D. $P \in L^{\mu,q}(X)$ se P è equivalente all'operatore

$$C_0^\infty(X) \ni u \mapsto (2\pi)^{-n} \iint \exp[i\langle x-y, \xi\rangle] p(x,\xi) u(y)\,dy\,d\xi. \tag{2.8}$$

Si noti che, per il Teorema precedente, ogni $A \in L^{\mu,q}(X)$ individua una classe di $S^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^n)/S^{-\infty,q}(X\times\boldsymbol{R}^n)$, sicchè resta stabilito un isomorfismo

$$L^{\mu,q}(X)/L^{-\infty,q}(X)\to S^{\mu,q}(X\times\boldsymbol{R}^n)/S^{-\infty,q}(X\times\boldsymbol{R}^n)\,. \tag{2.9}$$

Teorema 2.2. Se $A\in L_c^{\mu,q}(X)$ allora ${}^tA\in L_c^{\mu,q}(X)$ e

$$\sigma({}^tA)(x,\xi)\sim\sum_{j\geqslant 0}\sum_{\langle\alpha,q\rangle=\theta j}\frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\partial_x^\alpha\sigma(A)(x,-\xi)\,. \tag{2.10}$$

Se $A\in L_c^{\mu,q}(X)$ e $B\in L_c^{\mu',q}(X)$ allora $BA\in L_c^{\mu+\mu',q}(X)$ e

$$\sigma(BA)(x,\xi)\sim\sum_{j\geqslant 0}\sum_{\langle\alpha,q\rangle=\theta j}\frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\sigma(B)(x,\xi)\,\partial_x^\alpha\sigma(A)(x,\xi)\,. \tag{2.11}$$

Prova. Come in [6]. ■

Se $P\in L^{\mu,q}(X)$, $P=L_p$ con $p\in S^{\mu,q}(X\times X\times\boldsymbol{R}^n)$, chiameremo *simbolo principale* di A la classe di $p(x,x,\xi)$ modulo $S^{\mu-\theta,q}(X\times\boldsymbol{R}^n)$,

$$\sigma_\mu(A)=\{p(x,x,\xi)\}_{\mathrm{mod}\ S^{\mu-\theta,q}(X\times\boldsymbol{R}^n)}\,. \tag{2.12}$$

Dal Teorema 2.2 segue allora immediatamente che

$$\sigma_\mu({}^tA)(x,\xi)=\sigma_\mu(A)(x,-\xi) \tag{2.13}$$

$$\sigma_{\mu+\mu'}(BA)(x,\xi)=\sigma_{\mu'}(B)(x,\xi)\,\sigma_\mu(A)(x,\xi)\,. \tag{2.14}$$

Veniamo ora ai cambiamenti di variabili. Siano X ed Y due aperti di $\boldsymbol{R}^n$ e $\chi\colon X\to Y$ un diffeomorfismo di classe C^∞. Se $A\in L^{\infty,q}(X)$, poniamo

$$\begin{cases} A_\chi\colon C_0^\infty(Y)\to C^\infty(Y)\,,\\ A_\chi(u)=[A(u\circ\chi)]\circ\chi^{-1}\,. \end{cases} \tag{2.15}$$

Si ha ora il

Teorema 2.3. Detta χ' la matrice Jacobiana di χ, si supponga che

$${}^t\chi'\in C^\infty(X,GL_q(n,\boldsymbol{R}))\,.$$

Allora per ogni O.P.D. $A\in L^{\mu,q}(X)$ riesce $A_\chi\in L^{\mu,q}(Y)$ e

$$\sigma_\mu(A_\chi)(\chi(x),\xi)=\sigma_\mu(A)(x,{}^t\chi'(x)\xi)\,. \tag{2.16}$$

Prova. Se A è definito dal simbolo $p \in S^{\mu,q}(X\times X\times \boldsymbol{R}^n)$ allora

$$A_\chi u(x) = \iint \exp[i\langle \chi^{-1}(x) - y, \xi\rangle] p(\chi^{-1}(x), y, \xi)\, u(\chi(y))\, dy\, d\xi$$

e quindi, con un cambiamento di variabile nell'integrale oscillante precedente,

$$A_\chi u(x) = \iint \exp[i\langle \chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y), \xi\rangle] p(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(y), \xi)\cdot \\ \cdot u(y)\, |(\chi^{-1})'(y)|\, dy\, d\xi$$

con $|(\chi^{-1})'(y)| = |\det(\chi^{-1})'(y)|$. Dunque A_χ è un operatore di Fourier la cui fase è

$$\varphi(x, y, \xi) = \langle \chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y), \xi\rangle\,.$$

Sia ora W un intorno convesso di Δ_Y; su W avremo

$$\chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y) = T(x, y)(x - y)$$

con

$$T(x, y) = \int_0^1 (\chi^{-1})'(x + t(x - y))\, dt \tag{2.17}$$

T è di classe C^∞ e poichè $T|_{\Delta_Y} = (\chi^{-1})'$ è invertibile, esisterà un intorno W_1 di Δ_Y, $W_1 \subset W$, su cui T è invertibile e quindi

$$\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, {}^tT(x, y)\xi\rangle\,, \qquad \text{su } W_1\,.$$

Dalle ipotesi fatte segue che ${}^tT \in C^\infty(W_1, GL_q(n, \boldsymbol{R}))$. Possiamo ora supporre che $p(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(y), \xi)$ sia identicamente nulla fuori di un intorno chiuso di Δ_Y, contenuto in W_1, le cui proiezioni su Y siano proprie. Avremo così

$$A_\chi u(x) = \\ = \iint \exp[i\langle x - y, {}^tT(x, y)\xi\rangle] p(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(y), \xi)\, |(\chi^{-1})'(y)|\, u(y)\, dy\, d\xi = \\ = \iint \exp[i\langle x - y, \zeta\rangle] p(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(y), {}^tT^{-1}(x, y)\zeta)\, |(\chi^{-1})'(y)|\cdot \\ |{}^tT^{-1}(x, y)|\, u(y)\, dy\, d\zeta$$

con $|{}^tT^{-1}| = |\det {}^tT^{-1}|$. Basta allora applicare il Teorema 1.4 per concludere che $A_\chi \in L^{\mu,q}(Y)$ e che quindi vale la (2.16). Il Teorema è dimostrato. ∎

Mostriamo ora come, in un certo, senso il Teorema 2.3 fornisca un risultato ottimo.

TEOREMA 2.4. Sia $A \in L_c^{\mu,q}(X)$ ($\mu > 0$, multiplo di θ) l'operatore differenziale

$$A(x, D_x) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle\leqslant\mu} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \qquad a_\alpha \in C^\infty(X),$$

e sia $\chi: X \to Y$ un diffomorfismo C^∞. Se

i) Il simbolo $A(x, \xi) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle\leqslant\mu} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ è pseudo-invertibile.

ii) L'operatore differenziale $A_\chi: u \mapsto [A(u\circ\chi)]\circ\chi^{-1}$ appartiene ad $L^{\mu,q}(Y)$, allora ${}^t\chi' \in C^\infty(X, GL_q(n, \boldsymbol{R}))$.

Prova. Poichè $A_\chi \in L_c^{\mu,q}(Y)$, si ha

$$\sigma(A_\chi)(\chi(x), \xi) = \exp[-i\langle\chi(x), \xi\rangle][A_\chi \exp[i\langle\cdot, \xi\rangle]]$$

e quindi, come in [6], si trova

$$\sigma(A_\chi)(\chi(x), \xi)) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} A^{(\alpha)}(x, {}^t\chi'(x)\xi)\, \Phi_\alpha(x, \xi) \tag{2.18}$$

dove

$$\Phi_\alpha(x, \xi) = D_y^\alpha \exp\left[i\langle\chi(y) - \chi(x) - \chi'(x)(y - x), \xi\rangle\right]|_{y=x} \tag{2.19}$$

È facile riconoscere che $\Phi_\alpha(x, \xi)$ è un polinomio di grado $\leqslant |\alpha|/2$ in ξ a coefficienti $C^\infty(X)$. L'ipotesi ii) implica che

$$\tilde{A}(\chi(x), \xi) = \sigma(A_\chi)(\chi(x), \xi) \in S^{\mu,q}(Y \times \boldsymbol{R}^n).$$

Identifichiamo $\boldsymbol{R}^n$ con $\boldsymbol{R}^{r_1} \times \ldots \times \boldsymbol{R}^{r_\nu}$ ed $\eta \in \boldsymbol{R}^n$ si scriva come $(\eta_1, \ldots, \eta_\nu)$ con $\eta_j \in \boldsymbol{R}^{r_j}$, $j = 1, \ldots, \nu$. In tal modo sarà

$$A(x, \eta) = \sum_{|\alpha_1|q_1 + \ldots + |\alpha_\nu|q_\nu \leqslant \mu} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu}(x)\, \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_\nu^{\alpha_\nu}.$$

L'ipotesi di pseudo-invertibilità per $A(x, \eta)$ implica, per il Teorema 1.5, che, posto

$$A_0(x, \eta) = \sum_{|\alpha_1|q_1 + \ldots + |\alpha_\nu|q_\nu = \mu} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu}(x)\eta_1^{\alpha_1}\ldots\eta_\nu^{\alpha_\nu}$$

riesce

$$A_0(x, (0, \ldots, 0, \eta_j, 0, \ldots, 0)) \neq 0\,, \qquad \forall \eta_j \in \boldsymbol{R}^{r_j}\setminus 0\,. \tag{2.20}$$

Indichiamo ora, per semplicità, con $T(x)$ la matrice ${}^t\chi'(x)$; $T(x)$ è quindi pensabile come una matrice a blocchi

$$T(x) = \big(T_{ji}(x)\big)_{j,i=1,\ldots,\nu}\,,$$

essendo T_{ji} una matrice $r_j \times r_i$. Si tratta dunque di provare che $T_{ji}(x) = 0$ se $j > i$ qualunque sia $x \in X$.

Fissato i, $1 \leqslant i < \nu$, si consideri il vettore $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_\nu) \in \boldsymbol{R}^n$ con $\xi_k = 0$ per $k \neq i$.

$$\begin{cases} T\xi \;= (T_{1i}\xi_i, \ldots, T_{\nu i}\xi_i)\,, \\ T_{li}\xi_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{r_i} t_{hk}^{(li)}(x)\,\xi_i^{(k)}\,, \qquad h = 1, \ldots, r_l\,. \end{cases} \tag{2.21}$$

Poniamo ora $\xi_i = \big(0, \ldots, 0, \underset{k}{\tau}\big), 0, \ldots, 0)$, $\tau > 0$. Allora

$$T\xi = (\eta_1, \ldots, \eta_\nu)\,, \qquad \eta_j = \tau\big(t_{1k}^{(ji)}(x), \ldots, t_{r_jk}^{(ji)}(x)\big) = \tau\omega_j(x)$$

per ogni j da 1 a ν. Quindi

$$A(x, T(x)\xi) = \sum_{|\alpha_1|q_1 + \ldots + |\alpha_\nu|q_\nu \leqslant \mu} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu}(x)\,\omega_1(x)^{\alpha_1}\ldots\omega_\nu(x)^{\alpha_\nu}\tau^{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_\nu|}\,.$$

Dunque

$$A(x, T(x)\xi) = \Big[\sum_{|\alpha_\nu| = \mu/q_\nu} a_{0,\ldots,0,\alpha_\nu}(x)\,\omega_\nu(x)^{\alpha_\nu}\Big]\tau^{\mu/q_\nu} + \ldots \tag{2.22}$$

dove i puntini stanno ad indicare un polinomio di grado $< \mu/q_\nu$ in τ. Con ciò abbiamo regolato l'addendo in (2.18) con $\alpha = 0$. Si ha poi

$$A^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_\nu)}(x, T(x)\xi) = \tag{2.23}$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha_1|q_1 + \ldots + |\alpha_\nu|q_\nu \leqslant \mu \\ \alpha_1 \geqslant \gamma_1, \ldots, \alpha_\nu \geqslant \gamma_\nu \\ |\gamma_1| + \ldots + |\gamma_\nu| \geqslant 1}} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu}(x)\,C_{\alpha,\gamma}\,\omega_1^{\alpha_1 - \gamma_1}\ldots\omega_\nu^{\alpha_\nu - \gamma_\nu}\,\tau^{|\alpha_1 - \gamma_1| + \ldots + |\alpha_\nu - \gamma_\nu|}$$

essendo

$$C_{\alpha,\gamma}=\frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\gamma_1)!}\cdots\frac{a_\nu!}{(\alpha_\nu-\gamma_\nu)!}\,.$$

Infine, per la scelta di ξ,

$$\Phi_{(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)}(x,\xi)=\sum_{|\varrho_1|+\dots+|\varrho_\nu|\leqslant(|\gamma_1|+\dots+|\gamma_\nu|)/2} c_{\varrho_1,\dots,\varrho_\nu}(x)\,\xi_1^{\varrho_1}\dots\xi_\nu^{\varrho_\nu}=$$
$$=\sum_{|\varrho_i^{(k)}|\leqslant(|\gamma_1|+\dots+|\gamma_\nu|)/2} c_{0,\dots,0,\varrho_i^{(k)},0,\dots,0}(x)\,\tau^{\varrho_i^{(k)}}\,. \tag{2.24}$$

Facendo il prodotto di (2.23) per (2.24) si ottiene una somma di monomi in τ di grado $\leqslant|\alpha_1-\gamma_1/2|+\dots+|\alpha_\nu-\gamma_\nu/2|$; ora, in ogni caso, $|\alpha_1-\gamma_1/2|q_1+\dots+|\alpha_\nu-\gamma_\nu/2|q_\nu$ è $<\mu$ e quindi, in conclusione,

$$\tilde{A}(\chi(x),\xi)=\Big[\sum_{|\alpha_\nu|=\mu/q_\nu} a_{0,\dots,0,\alpha_\nu}(x)\,\omega_\nu^{\alpha_\nu}(x)\Big]\tau^{\mu/q_\nu}+\dots \tag{2.25}$$

dove i puntini stanno ad indicare termini di grado $<\mu/q_\nu$ in τ. Ora, per ipotesi,

$$\tilde{A}(\chi(x),\xi)=O(|\xi_1|^{1/q_1}+\dots+|\xi_\nu|^{1/q_\nu})\,,\qquad |\xi|_q\to\infty\,,$$

uniformemente sui compatti di X e quindi, per la nostra scelta di ξ,

$$\tilde{A}(\chi(x),\xi)=O(\tau^{\mu/q_i})\,,\qquad \tau\to+\infty\,,$$

per ogni x. Ora da (2.20) segue che il coefficiente di τ^{μ/q_ν} in (2.25) è $\neq 0$ se $\omega_\nu(x)\neq 0$ e quindi, essendo $q_i>q_\nu$, se così fosse avremmo un assurdo. Se ne deduce quindi che $\omega_\nu(x)=0$ per ogni x, sicchè, in conclusione, per l'arbitrarietà di i e di k,

$$T_{\nu i}(x)=0\,,\qquad \forall x\in X\,,\qquad i=1,\dots,\nu-1\,.$$

Questo risultato ci dà un'informazione sulla (2.19). Infatti, posto

$$\langle\chi(y)-\chi(x)-\chi'(x)(y-x),\xi\rangle=$$
$$=\sum_{j=1}^{\nu}\langle\chi_j(y)-\chi_j(x),\xi_j\rangle-\sum_{i=1}^{\nu}\langle y_i-x_i,\sum_{k=1}^{\nu}T_{ik}(x)\xi_k\rangle=\psi_1-\psi_2$$

è immediato verificare che essendo $T_{\nu i}(x) = 0$ per $i < \nu$,

$$D^{\gamma}_{y_\nu} \exp\left[i(\psi_1(y, x, \xi) - \psi_2(y, x, \xi))\right]\big|_{y=x}$$

è, per $|\gamma| > 0$, un polinomio della sola ξ_ν. Ne segue di conseguenza che $\Phi_{(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)}(x, \xi)$ è un polinomio nella sola ξ_ν se $|\gamma_\nu| > 0$.

A questo punto basta ripetere il ragionamento fatto sopra, fissando ora i tra 1 e $\nu - 2$ e prendendo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\nu)$ con $\xi_k = 0$ per $k \neq i$. Se poi $\xi_i = \big(0, \dots, 0, \underset{k}{\tau}, 0, \dots, 0\big)$, allora $\tilde{A}(\chi(x), \xi)$ è un polinomio di grado $\mu/q_{\nu-1}$ in τ in cui il coefficiente del termine di grado massimo è

$$\sum_{|\alpha_{\nu-1}| = \mu/q_{\nu-1}} a_{0,\dots,0,\alpha_{\nu-1},0}(x)\, \omega_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}}(x)$$

e quindi, ragionando come prima, se ne deduce che $T_{\nu-1,i}(x) = 0$, $\forall x \in X$, $i = 1, \dots, \nu - 2$. Proseguendo in questo modo si ha la tesi. ∎

Osservazione. È il caso di osservare che il Teorema 2.3 non può in alcun modo essere dedotto dal Teorema 2.1.2 di [6]. In quest'ultimo L. Hörmander stabilisce l'invarianza delle classi $L^{r}_{\varrho,\delta}(X)$ per cambiamenti qualunque di variabili purchè sia $1 - \varrho \leqslant \delta < \varrho$ (ciò che implica, in particolare, $\varrho > \frac{1}{2}$). Nel nostro caso abbiamo $L_{\mu,q}(X) \hookrightarrow L^{\bar{\mu}}_{\varrho,0}(X)$ con $\bar{\mu} = \max_j \mu/q_j$ e $\varrho = 1/\max_j q_j = m_1/m_n$. Ora $L^{\bar{\mu}}_{\varrho,0}(X)$ è conservata per cambiamenti qualunque di variabili se $\varrho = 1$, che è il caso isotropo; mentre se $1 > \varrho > \frac{1}{2}$, assoggettando un O.P.D. $A \in L^{\mu,q}(X)$ ad un cambiamento qualunque di variabili χ otteniamo un operatore $A_\chi \in L^{\bar{\mu}}_{\varrho,1-\varrho}(Y)$. La condizione $\varrho > \frac{1}{2}$, d'altra parte, non è soddisfatta, ad esempio, per l'operatore del calore (cfr. anche l'esempio a pag. 168 di [5]).

Osserviamo infine come in ciò che precede ci siamo limitati a considerare O.P.D. scalari; tuttavia i risultati stabiliti si traspostano senza difficoltà al caso di matrici di O.P.D. anisotropi. Così, ad esempio, indicheremo con $L^{\mu,q}(X; d_1, d_2)$ (risp. $L^{\mu,q}_c(X; d_1, d_2)$) lo spazio delle matrici

$$(2.26)\qquad P = (P_{jk}) \qquad j = 1, \dots, d_1;\ k = 1, \dots, d_2, \qquad P_{jk} \in L^{\mu,q}(X)\big(\text{risp. } P_{jk} \in L^{\mu,q}_c(X)\big)$$

per ogni j, k. Il *simbolo principale* di P è la matrice

$$(2.27)\qquad \sigma_\mu(P) = \big(\sigma_\mu(P_{jk})\big) \qquad j = 1, \dots, d_1;\ k = 1, \dots, d_2.$$

Si pone allora la

DEFINIZIONE 2.4. Dato $P \in L^{\mu,q}(X; d_1, d_2)$, diremo che P è *quasi-ellittico a sinistra* (*a destra* [*quasi-ellittico*]) se $\sigma_\mu(P)$ è pseudo-invertibile a sinistra (a destra [pseudo-invertibile]). ■

Abbiamo il

TEOREMA 2.5. Se $P \in L_c^{\mu,q}(X; d_1, d_2)$ è quasi-ellittico a sinistra, esiste $Q \in L_c^{-\mu,q}(X; d_2, d_1)$ tale che

$$QP - \text{identità} \in L^{-\infty,q}(X; d_2, d_2)\,. \tag{2.28}$$

Prova. È classica. Sia $r \in S^{-\mu,q}(X; d_2, d_1)$ tale che $r\sigma_\mu(P) - I_{d_2} \in \in S^{-\infty,q}(X; d_2, d_2)$ e sia Q' un O.P.D. proprio di simbolo principale r. Allora $R = Q'P$-identità è un O.P.D. proprio d'ordine $-\theta$. Considerata la serie formale $\sum_{j\geqslant 0} R^j$, esiste, in virtù del Teorema 1.1, un O.P.D. $R' \in L_c^{0,q}(X; d_2, d_2)$ tale che $R' \sim \sum_{j\geqslant 0} R^j$, cioè $R' - \sum_{j<k} R^j \in L^{-k\theta,q}(X; d_2, d_2)$ per $k = 1, 2, \ldots$. Allora, banalmente, $(R'Q')P$-identità $\in L^{-\infty,q}$. ■

Ogni operatore proprio Q soddisfacente la (2.28) si dice una *parametrix sinistra* per P. Qualora P sia quasi-ellittico a destra esiste, ragionando in modo analogo, una *parametrix destra* per P, vale a dire un O.P.D. $D \in L_c^{-\mu,q}(X; d_2, d_1)$ tale che PD-identità $\in L^{-\infty,q}(X; d_1, d_1)$.

Se poi P è quasi-ellittico allora, banalmente, ogni parametrix sinistra è anche una parametrix destra (e viceversa) che si dirà semplicemente una *parametrix* per P.

Vogliamo, per finire, dare un'applicazione del Teorema 2.3.

DEFINIZIONE 2.4. Sia $t \in \boldsymbol{R}$; indichiamo con $H^{t,q}$ lo spazio delle distribuzioni temperate $u \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ tali che

$$(1 + |\xi|_q^2)^{t/2}\,\hat{u}(\xi) \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \tag{2.29}$$

munito della norma

$$\|u; H^{t,q}\| = \|(1 + |\xi|_q^2)^{t/2}\,\hat{u}(\xi); L^2(\boldsymbol{R}^n)\|\,. \tag{2.30}$$

Per ogni aperto $X \subset \boldsymbol{R}^n$, poniamo

$$\begin{cases} H^{t,q}_{\text{loc}}\ (X) = \{u \in \mathcal{D}'(X) \,|\, \zeta u \in H^{t,q},\ \forall \zeta \in C_0^\infty(X)\} \\ H^{t,q}_{\text{comp}}(X) = H^{t,q} \cap \mathcal{E}'(X) \end{cases} \tag{2.31}$$

con le topologie naturali. ■

Si ha allora il

TEOREMA 2.6. Se $P \in L^{\mu,q}(X)$ allora

$$P\colon H^{t,q}_{\mathrm{comp}}(X) \to H^{t-\mu,q}_{\mathrm{loc}}(X)$$

con continuità per ogni t.

Prova. Cfr. ad esempio [8] o [12]. ■

COROLLARIO 1. Risulta, per ogni $t \in \boldsymbol{R}$,

$$H^{t,q}_{\mathrm{loc}}(X) = P\big(L^2_{\mathrm{loc}}(X)\big) + C^\infty(X) \tag{2.32}$$

quale che sia $P \in L_c^{-t,q}(X)$, P quasi-ellittico.

Prova. È chiaro che, per il Teorema 2.6, essendo P proprio, riesce

$$P\big(L^2_{\mathrm{loc}}(X)\big) + C^\infty(X) \subset H^{t,q}_{\mathrm{loc}}(X)\,.$$

D'altra parte, sia $Q \in L_c^{t,q}(X)$ una parametrix per P con PQ-identità $\in L^{-\infty,q}(X)$. Allora, per ogni $u \in H^{t,q}_{\mathrm{loc}}(X)$ si ha

$$u = P(Qu) + Ru\,, \qquad R \in L^{-\infty,q}(X)\,.$$

Ora $Qu \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ per il Teorema 2.6, mentre $Ru \in C^\infty(X)$ giacchè R è un operatore regolarizzante, cioè a nucleo C^∞. ■

COROLLARIO 2. Siano X ed Y due aperti di $\boldsymbol{R}^n$ e $\chi\colon X \to Y$ un diffeomorfismo di classe C^∞ come nel Teorema 2.3. allora per ogni $u \in H^{t,q}_{\mathrm{loc}}(X)$ si ha $u \circ \chi^{-1} \in H^{t,q}_{\mathrm{loc}}(Y)$ quale che sia t.

Prova. Sia $P \in L_c^{-t,q}(X)$, P quasi-ellittico (è facile vedere che un P cosiffatto esiste quale che sia t); per il Corollario 1 si ha $u = Pf + g$ per una $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ ed una $g \in C^\infty(X)$. Dunque $u \circ \chi^{-1} = (Pf)\circ\chi^{-1} + g\circ\chi^{-1}$. Ora $g\circ\chi^{-1} \in C^\infty(Y)$, mentre $(Pf)\circ\chi^{-1} = P_\chi(f\circ\chi^{-1})$ e quindi, per il Teorema 2.3 e 2.6, si ha la tesi. ■

3. O.P.D. anisotropi su varietà fogliettate.

Sia assegnata una varietà differenziabile M di dimensione n; M si supporrà C^∞ paracompatta e senza bordo. Un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M si dirà un *q-atlante* se per ogni coppia α, β nel diffeomorfismo $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ riesce

$$(3.1) \qquad {}^t(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})' \in C^\infty(\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), GL_q(n, \mathbf{R})) .$$

Due q-atlanti $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ si diranno *q-compatibili* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un q-atlante.

Tale relazione definisce per ogni q-atlante $\mathcal{A}$ un q-atlante massimale $\tilde{\mathcal{A}}$. Osserviamo che l'esistenza di un q-atlante massimale su M implica che M è una *varietà fogliettata* (cfr. per la definizione [4], [3]). Qualora sia $\nu = 2$ (vale a dire $q_1 = \ldots = q_{r_1} > q_{r_1+1} = \ldots = q_{r_1+r_2} = q_n$) allora, viceversa, ogni varietà fogliettata con un fogliettamento di codimensione r_1 $(1 \leqslant r_1 < n)$ possiede un q-atlante massimale quali che siano $q_1, \ldots, q_n$, con $q_1 = \ldots = q_{r_1} > q_{r_1+1} = \ldots = q_n$ (cfr. loc. citato). Supponiamo quindi che M sia dotata di un q-atlante massimale; una carta di M sarà, per definizione, una carta di $\tilde{\mathcal{A}}$. Siano poi E ed F due fibrati vettoriali complessi, C^∞, su M di rango d_2 e d_1 rispettivamente (cfr. [11], [13]). Ciò posto diamo la

DEFINIZIONE 3.1. Indichiamo con $L^{\mu,q}(M; E, F)$ lo spazio degli operatori lineari continui

$$A: C_0^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$$

tali che:

i) Per ogni coppia di aperti disgiunti U e V di M, l'operatore

$$C_0^\infty(U, E) \xrightarrow{i_U} C_0^\infty(M, E) \xrightarrow{A} C^\infty(M, F) \xrightarrow{r_V} C^\infty(V, F)$$

è a nucleo distribuzione C^∞ (i_U è l'immersione, r_V la restrizione).

ii) Per ogni aperto a carta (U, φ) su cui E ed F sono banali, dette α e β due trivializzazioni di $E|U$ ed $F|U$ e posto $A_U = \beta \circ A \circ \alpha^{-1}$, l'operatore

$$\begin{cases} \tilde{A}_U\colon C_0^\infty(\varphi(U), \mathbf{C}^{d_2}) \to C^\infty(\varphi(U), \mathbf{C}^{d_1}) \\ \tilde{A}_U f = [A_U(f\circ\varphi)]\circ\varphi^{-1} \end{cases}$$

appartiene ad $L^{\mu,q}(\varphi(U); d_1, d_2)$. ∎

Servendosi dei Teoremi 2.2 e 2.3 si prova subito che la definizione ora data è ben posta. A questo punto è possibile stabilire, in modo analogo a quanto si fa per il caso isotropo, i consueti risultati sulla composizione, esistenza dell'aggiunto, ecc.; su ciò non ci tratteniamo. È il caso di osservare che dal Teorema 2.4 segue il

TEOREMA 3.1. Sia $A\colon C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ un operatore differenziale sulla varietà M (C^∞, paracompatta e senza bordo). Supponiamo che esista un atlante $\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}$ per M tale che, posto

$$A_j\colon C_0^\infty(\varphi_j(U_j)) \to C^\infty(\varphi_j(U_j)), \qquad A_j f = [A(f\circ\varphi_j)]\circ\varphi_j^{-1}$$

riesca $A_j \in L^{\mu,q}(\varphi_j(U_j))$, A_j quasi-ellittico, per ogni j (con $\mu > 0$, μ multiplo di θ). Allora $\mathcal{A}$ è un q-atlante.

Prova. È una conseguenza immediata del Teorema 2.4. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. ATIYAH - R. BOTT, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I,* Ann. of. Math., **86** (1967), 374-407.

[2] A. CAVALLUCCI, *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche relativamente a domini normali,* Boll. Un. Mat. Ital., Serie III, **19** (1964), 465-477.

[3] C. GODBILLON, *Problèmes d'existence et d'homotopie dans les feuilletages,* Sémin. Bourbaki, 23e année, **390** (1970/71), 167-181.

[4] A. HAEFLIGER, *Variétés feuilletées,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **16** (1962), 367-397.

[5] L. HÖRMANDER, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations.* Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., **10** (1966), 138-183.

[6] L. HÖRMANDER, *Fourier integral operators, I,* Acta Math., **127** (1971), 79-183.

[7] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlino. 1964.
[8] C. Hunt - A. Piriou, *Opérateurs pseudo-différentiels anisotropes d'ordre variable*, C.R.A.S. Paris, Série A, **269** (1969), 28-31.
[9] P. Krée, *A class of singular integrals, etc.*, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., **10** (1966), 208-212.
[10] J. E. Lewis, *A Poisson integral formula for solution of parabolic partial differential equations*, Journ. of Math. Anal. and Appl., **26** (1969), 479-511.
[11] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, Masson & Cie, North-Holland, 1968.
[12] C. Parenti, *Problemi quasi-ellittici di trasmissione* (in corso di stampa sugli Ann. di Mat. Pura ed Appl.).
[13] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1951.
[14] I. Tamura, *Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one*, Comm. Math. Helv., **47** (1972), 164-170.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 luglio 1974.