

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALESSANDRO TORELLI

## **Su un problema di filtrazione da un canale**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 52 (1974), p. 25-58

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1974\\_\\_52\\_\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__25_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Su un problema di filtrazione da un canale.

ALESSANDRO TORELLI (\*)

Come è noto lo studio dei moti di filtrazione attraverso materiali porosi può essere ricondotto a problemi di frontiera libera per equazioni a derivate parziali. Tali problemi sono stati, in passato, molto studiati soprattutto dal punto di vista numerico con tecniche non completamente adeguate dal punto di vista del rigore (cfr. ad. es. [7] e [11] e per maggiori dettagli bibliografici [4] e [5]). C. Baiocchi [2] ha, però, recentemente introdotto un nuovo metodo (sistematicamente sviluppato presso il laboratorio di Analisi Numerica di Pavia (L.A.N.), cfr. [3], [4], [5], [6], [9]) mediante il quale sono stati ottenuti risultati del tutto rigorosi di esistenza e unicità della soluzione.

Nell'ambito di tale ricerca si situa il presente lavoro dedicato al moto stazionario di filtrazione delle acque di un canale attraverso un mezzo poroso. Tale problema, di notevole interesse in idraulica, già studiato da diversi autori con metodi ingegneristici (cfr. [11], [12], [13], ecc.), viene ora affrontato seguendo l'impostazione del Baiocchi e riuscendo ad ottenere un risultato di esistenza e unicità della soluzione.

Nel n. 1 del presente lavoro, dopo aver formulato matematicamente il problema del canale (cfr. la definizione 1.1 in cui  $u$  è un potenziale della velocità e  $v$  una sua armonica coniugata), viene provata l'unicità della soluzione.

Nel n. 2 si riconduce il problema dell'esistenza della soluzione del problema del canale allo studio di una famiglia di disequazione varia-

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Pavia.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni e del Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia.

zionali. Si trova qui una difficoltà che non si era presentata nei precedenti lavori del L.A.N. su tali argomenti, in quanto la forma bilineare che compare nelle disequazioni variazionali non è in generale coerciva. Si supera, però, tale ostacolo provando l'esistenza della soluzione per una famiglia di problemi non lineari equivalenti a quelli relativi alla risoluzione delle sopradette disequazioni, il che si ottiene utilizzando tecniche abituali in tali tipi di problemi (cfr. ad es. [17]). La famiglia di soluzioni così ottenuta è tutta costituita di funzioni « regolari ». Fra tali soluzioni sceglieremo quella che poi ci porterà alla risoluzione del problema del canale imponendo una condizione che, dal punto di vista fisico, significa imporre il passaggio del « pelo libero » per un punto opportuno.

Nel n. 3 si completa la dimostrazione dell'esistenza della soluzione del problema del canale.

### 1. Unicità della soluzione debole.

a) Siano assegnati  $a, m, n \in \mathbf{R}$  tali che

$$(1.1) \quad 0 < m < a < n$$

Sia inoltre  $\alpha$  una funzione reale tale che <sup>(1)</sup>:

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in C^\infty(\mathbf{R}), \\ \alpha(x) = \alpha(-x) \quad \forall x \in \mathbf{R} \text{ (e dunque } \alpha'(0) = 0), \\ \alpha(x) \text{ strettamente crescente in } [m, n], \\ \alpha(x) \text{ costante in } [0, m] \text{ e } [n, +\infty) \\ \alpha(0) > 0. \end{array} \right.$$

Introduciamo la seguente

**DEFINIZIONE 1.1.**  $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$  si dice soluzione debole del problema del canale se (cf. Fig. 1.1):

---

<sup>(1)</sup> Abbiamo supposto la funzione  $\alpha(x)$  di classe  $C^\infty$  per semplicità di esposizione.

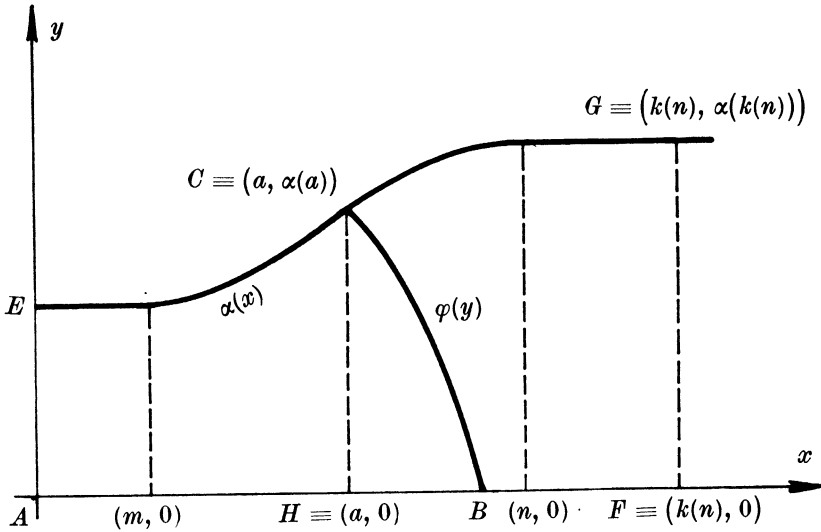


Fig. 1.1.

(1.3)  $\varphi \in C^0([0, \alpha(a)])$ , *strettamente decrescente*,  $\varphi(\alpha(a)) = a$

(1.4)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: 0 < x < a, 0 < y < \alpha(x)\} \cup$   
 $\cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: 0 < y < \alpha(a), a < x < \varphi(y)\}$

(1.5)  $q \in \mathbf{R}$

(1.6)  $u, v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

(1.7)  $u = 0$  su  $\overline{AB}$ ,  $u = \alpha(a)$  su  $\widehat{CE}$ ,  $u = y$  su  $\widehat{BC}$

(1.8)  $v = 0$  su  $\widehat{BC}$ ,  $v = q$  su  $\overline{EA}$

(1.9)  $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$  in  $\Omega$ .

OSSERVAZIONE 1.1. Se  $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$  è una soluzione debole del problema del canale si verifica immediatamente che valgono le relazioni seguenti:

(1.10)  $\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$  in  $\Omega$ ,

(1.11)  $u_x = 0$  su  $\overline{EA}$ ,

$$(1.12) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \widehat{BC},$$

$$(1.13) \quad v_n = 0 \quad \overline{\text{su } AB},$$

$$(1.14) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \widehat{CE},$$

dove  $n$  è la normale esterna ad  $\Omega$  e le (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) devono intendersi in senso variazionale ordinario.

Utilizzando, inoltre, noti risultati relativi alla regolarità all'« interno » di  $\Omega$  e sulle « parti regolari » della frontiera, delle soluzioni di problemi ai limiti ellittici (cfr. ad es. [15]) si ha che (cfr. la (1.2)):

$$(1.15) \quad u, v \text{ sono analitiche in } \Omega \cup \overline{AB} \cup \overline{EA}$$

$$(1.16) \quad u, v \text{ sono di classe } C^\infty \text{ su } \widehat{CE}$$

Si ha allora che le (1.11), (1.13) e (1.14) possono essere intese anche in senso usuale.

**LEMMA 1.1.** *Se  $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$  è una soluzione debole del problema del canale, si ha che*

$$(1.17) \quad u(x, y) \geq y \text{ in } \overline{\Omega}, \quad u(x, y) > y \text{ in } \Omega,$$

$$(1.18) \quad v(x, y) \geq 0 \text{ in } \overline{\Omega}, \quad v(x, y) > 0 \text{ in } \Omega.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per la (1.10) si ha che  $\Delta(y - u) = 0$  in  $\Omega$ .

Per verificare la (1.17) è allora sufficiente controllare che  $y - u \leq 0$  su  $\partial\Omega - EA$  (cfr. il principio del massimo di Hopf e la (1.11)). Tale controllo è immediato grazie alla (1.7).

La (1.18) si verifica in modo del tutto simile.

b) Sia:

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ la famiglia delle curve } \gamma \text{ che ammettono la rappresentazione} \\ y = \chi(x) \text{ (} 0 \leq x \leq \lambda \text{), dove } \chi \text{ verifica le condizioni} \\ (0, \chi(0)) \in \overline{EA}, (\lambda, \chi(\lambda)) \in \widehat{BC}, \chi \in C^1([0, \lambda]), \text{ graf } (\chi) \subset \overline{\Omega}. \end{array} \right.$$

Sia inoltre  $\gamma_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo) la curva

$$y = \chi(x) \quad (\varepsilon \leq x \leq \lambda - \varepsilon)$$

cioè  $\gamma_\varepsilon$  si ottiene troncando  $\gamma$  agli estremi. Vale allora il:

LEMMA 1.2.  $\forall \gamma \in \Gamma$  si ha che:

$$(1.21) \quad q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

dove  $n$  è la normale alla curva  $\gamma$  orientata verso l'alto.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\gamma \in \Gamma$ .  $\forall x \in [0, \lambda]$  (insieme di definizione di  $\gamma$ ) indichiamo con  $\vartheta(x)$  l'angolo formato fra la tangente (orientata positivamente) alla curva  $\gamma$  nel punto  $(x, \chi(x))$  e l'asse  $x$ .

Avremo (cfr. la (1.9) e l'osservazione 1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, \chi(x)) = -v_\nu(x, \chi(x)) \frac{\chi'(x)}{\sqrt{1 + \chi'^2(x)}} - v_x(x, \chi(x)) \frac{1}{\sqrt{1 + \chi'^2(x)}}.$$

Si ha dunque:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = - \int_\varepsilon^{\lambda-\varepsilon} \frac{dv(x, \chi(x))}{dx} dx = - [v(\lambda - \varepsilon, \chi(\lambda - \varepsilon)) - v(\varepsilon, \chi(\varepsilon))].$$

Per le (1.6) e (1.8) si ottiene, passando al limite, la (1.21).

OSSERVAZIONE 1.2. La costante  $q$  ha dunque l'evidente significato fisico di « portata » del canale.

LEMMA 1.3. Si ha che

$$q \geq \varphi(0) > a.$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie all'osservazione 1.1. la funzione  $u(x, y)$  è « regolare » su  $\overline{AB}$ . Si ha anche (cfr. lemma 1.1 e la (1.7))  $\forall x \in ]0, \varphi(0)[$

$$u_\nu(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x, h)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Abbiamo, dunque, (cfr. lemma 1.2):

$$q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{\varphi(0)-\varepsilon} u_\nu(x, 0) dx \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{\varphi(0)-\varepsilon} dx = \varphi(0).$$

Abbiamo così verificato che  $q > \varphi(0)$ . La disuguaglianza  $\varphi(0) > a$  è ovvia conseguenza della (1.3).

Si ponga

$$(1.22) \quad D_a = \{(x, y) \in \Omega, 0 < x < a\}.$$

Consideriamo ora il seguente problema (cfr. la Fig. 1.1):

$$(1.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{determinare } g \in H^1(D_a), \text{ tale che} \\ \Delta g = 0 \text{ su } D_a, \\ g = 0 \text{ su } \overline{AH}, g = y \text{ su } \overline{HC}, g = \alpha(a) \text{ su } \widehat{CE}, \\ D_x g = 0 \text{ su } \overline{EA}, \end{array} \right.$$

la condizione  $D_x g = 0$  essendo intesa in senso variazionale.

Come è noto il problema (1.23) ammette una ed una sola soluzione.

**LEMMA 1.4.** *La funzione  $g$  soluzione del problema (1.23) appartiene ad  $H^2(D_a)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Procedendo per simmetria rispetto all'asse  $y$ , l'asserto è ricondotto ad una questione di regolarità per un problema di Dirichlet (invece che per un problema misto). In tal caso l'asserto è una conseguenza di un risultato sulla regolarità del problema di Dirichlet in un dominio poligonale a lati curvilinei (cfr. Grisvard [10], teorema 4.2 e osservazione 4.1).

Dato che  $g \in H^2(D_a)$ , ha senso considerare  $\partial g / \partial n$  ( $n =$  normale esterna a  $\partial D_a$ ). Inoltre, utilizzando la formula di Green, si ha:

$$(1.24) \quad \int_{\partial D_a} \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Si ponga

$$(1.25) \quad \bar{q} = \int_{\widehat{CE}} \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma,$$

$$(1.26) \quad q_1 = \int_{\overline{AH}} \frac{\partial g}{\partial y} dx,$$

$$(1.27) \quad q_2 = - \int_{\overline{HC}} \frac{\partial g}{\partial x} dy.$$

La (1.24) può essere, dunque, così riscritta

$$(1.28) \quad \bar{q} = q_1 + q_2 .$$

LEMMA 1.5. - *Si ha che*

$$q \leq \bar{q} .$$

DIMOSTRAZIONE. È facile verificare che

$$(1.29) \quad g \leq u \quad \text{su } D_a$$

dove  $g$  è la soluzione del problema (1.23). Si ha infatti che  $\Delta(g - u) = 0$  in  $D_a$ . Per il principio del massimo sarà allora sufficiente verificare che  $g - u \leq 0$  su  $\partial D_a - \overline{EA}$  (cfr. le (1.11) e (1.23)). Tale verifica è immediata a partire dalle (1.7) e (1.23) e dal lemma 1.1.

Osserviamo ora che su  $\widehat{OE}$   $g = u = \alpha(a)$  (cfr. le (1.7) e le (1.23)).

Per la (1.29) si ha allora che  $\partial u / \partial n \leq \partial g / \partial n$  su  $\widehat{OE}$  ( $n =$  normale esterna). Grazie alle (1.21) e (1.25) il lemma è così dimostrato.

Introduciamo la funzione:

$$(1.30) \quad k(z) = \alpha(z) \left[ \frac{z}{\alpha(0)} + \lambda(z) \right], \quad 0 \leq z < +\infty$$

dove:

$$(1.31) \quad \lambda(z) = \max\{\alpha'(x), \quad 0 \leq x \leq z\} .$$

LEMMA 1.6. *Si ha che  $g \leq k(a)$ .*

DIMOSTRAZIONE. i) Verifichiamo prima di tutto che ( $g$  essendo la soluzione del problema (1.23)):

$$(1.32) \quad g(x, y) \leq \frac{\alpha(a)}{\alpha(0)} y \quad \text{su } D_a ,$$

$$(1.33) \quad g(x, y) \leq \lambda(a)(a - x) + y \quad \text{su } D_a .$$

La (1.32) si verifica subito utilizzando il principio del massimo di Hopf e il fatto che  $g$  soddisfa la (1.23).

Verifichiamo la (1.33). Si ponga, per semplicità,

$$\psi(x, y) = \lambda(a)(a - x) + y .$$



Avremo (per la (1.23)) che  $\Delta(g - \psi) = 0$ . Il massimo di  $g - \psi$  deve dunque essere in  $D_a - \overline{EA}$  (in quanto su  $\overline{EA}$   $D_x(g - \psi) = \lambda(a) > 0$  per le (1.2)). Si ha d'altra parte:

$$g - \psi = \lambda(a)(x - a) \leq 0 \quad \text{su } \overline{AH}$$

$$g - \psi = 0 \quad \text{su } \overline{HC}$$

$$g - \psi = \alpha(a) - [\lambda(a)(a - x) + \alpha(x)] = \alpha(a) - \alpha(x) - \lambda(a)(a - x) \leq 0 \quad \text{su } \overline{CE}$$

per le (1.2), (1.23) e (1.31). Dunque  $g - \psi \leq 0$  su  $D_a$ , cioè la (1.33).

ii) Osserviamo che le due funzioni che compaiono nella (1.32) (risp. nella (1.33)) assumono lo stesso valore su  $\overline{AH}$  (risp. su  $\overline{HC}$ ).

Dunque utilizzando la (1.32) (risp. la (1.33)) si ha:

$$(1.34) \quad D_v g \leq \frac{\alpha(a)}{\alpha(0)} \quad \text{su } \overline{AH}, \quad (\text{risp. } -D_x g \leq \lambda(a) \text{ su } \overline{HC}).$$

Si ha allora (cfr. le (1.26) e (1.27))

$$(1.35) \quad q_1 \leq a \frac{\alpha(a)}{\alpha(0)}, \quad q_2 \leq \lambda(a)\alpha(a).$$

Le (1.28) e (1.35) e il lemma 1.5 ci danno l'asserto.

c) Si ponga (cfr. la (1.30) e (1.31) per la definizione di  $k(z)$ ):

$$(1.36) \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: 0 < x < k(n), 0 < y < \alpha(x)\}.$$

Si ha allora (cfr. (1.3) e (1.4) e i lemmi 1.3, 1.5 e 1.6):

$$(1.37) \quad \Omega \subset D$$

Consideriamo i seguenti prolungamenti di  $u$  e  $v$  su  $D$ :

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{su } \Omega, \\ y & \text{su } D - \Omega, \end{cases} \quad \tilde{v}(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & \text{su } \Omega, \\ 0 & \text{su } D - \Omega, \end{cases}$$

Avremo:

$$(1.38) \quad \tilde{u}, \tilde{v} \in H^1(D) \cap C^0(\overline{D}),$$

e che

$$(1.39) \quad \tilde{u}_x = \begin{cases} u_x & \text{su } \Omega, \\ 0 & \text{su } D - \Omega, \end{cases} \quad \tilde{u}_y = \begin{cases} u_y & \text{su } \Omega, \\ 1 & \text{su } D - \Omega, \end{cases}$$

$$(1.40) \quad \tilde{v}_x = \begin{cases} v_x & \text{su } \Omega, \\ 0 & \text{su } D - \Omega, \end{cases} \quad \tilde{v}_y = \begin{cases} v_y & \text{su } \Omega, \\ 0 & \text{su } D - \Omega. \end{cases}$$

Da cui (cfr. le (1.9)):

$$(1.41) \quad \tilde{u}_x = \tilde{v}_y, \quad -\tilde{v}_x = \tilde{u}_y - 1 + \chi_\Omega \quad \text{su } D$$

$\chi_\Omega$  essendo la funzione caratteristica di  $\Omega$ .

Osserviamo inoltre che la seguente forma differenziale

$$(1.42) \quad -\tilde{v}(x, y) dx + (y - \tilde{u}(x, y)) dy$$

è esatta grazie alla 1<sup>a</sup> delle (1.41). È lecito allora introdurre la seguente funzione

$$(1.43) \quad w(x, y) = \int_C^{(x,y)} -\tilde{v}(x, y) dx + (y - \tilde{u}(x, y)) dy, \quad (x, y) \in D$$

tale integrale essendo esteso ad una qualunque curva continua,  $C^1$  a tratti, congiungente i punti  $C$  e  $(x, y)$  il cui sostegno è contenuto in  $\bar{D}$ .  
Si ha:

PROPOSIZIONE 1.1.  $w(x, y)$  soddisfa le seguenti condizioni:

$$(1.44) \quad w \in H^2(D) \cap C^1(\bar{D}),$$

$$(1.45) \quad w > 0 \quad \text{su } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{su } \bar{D} - \bar{\Omega},$$

$$(1.46) \quad D_x w(x, y) = -\tilde{v}(x, y), \quad D_y w(x, y) = y - \tilde{u}(x, y),$$

$$(1.47) \quad w_y = 0 \quad \text{su } \overline{AB},$$

$$(1.48) \quad w_y = y - \alpha(a) \quad \text{su } \widehat{CE},$$

$$(1.49) \quad w_x = -q \quad \text{su } \overline{EA},$$

$$(1.50) \quad \Delta w = \chi_\Omega \quad \text{su } D.$$

DIMOSTRAZIONE. Le (1.44) e (1.46) sono conseguenza della (1.43), del fatto che la forma (1.42) è esatta e della (1.38).

La (1.45) discende dalla definizione (1.43) di  $w(x, y)$  e dal lemma 1.1.

Le (1.47), (1.48) e (1.49) sono conseguenza della (1.46) e delle (1.7) e (1.8). Si ha inoltre (cfr. le (1.41)):

$$\Delta w = -\tilde{v}_x + (y - \tilde{u})_y = \tilde{u}_y - 1 + \chi_\Omega + 1 - \tilde{u}_y = \chi_\Omega.$$

La proposizione è così dimostrata.

d) Sia (cfr. l'osservazione 1.2):

$Q = \{q \in \mathbf{R}: \exists \text{ una soluzione debole del problema del canale di « portata » } q\}$   
 $\forall q \in Q$  indicheremo con  $\{\varphi_q, \Omega_q, u_q, v_q, q\}$  una <sup>(2)</sup> soluzione debole del problema del canale di portata  $q$ . Indicheremo, inoltre, con  $\tilde{u}_q, \tilde{v}_q, w_q$  le funzioni, definite in  $D$ , costruite come indicato in c) a partire da  $\{\varphi_q, \Omega_q, u_q, v_q, q\}$ . Indicheremo inoltre con  $F'$  (risp.  $G'$ ) il punto di  $\bar{D}$  di coordinate

$$(k(n), 0) \quad (\text{risp. } (k(n), \alpha(k(n)))) .$$

Vale il seguente:

LEMMA 1.7. *Se  $q'$  e  $q'' \in Q$  e  $q' < q''$  allora*

$$w_{q'}(x, y) < w_{q''}(x, y) \quad \text{su } D.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che:

$$(1.51) \quad \omega = \{(x, y) \in D: w_{q'}(x, y) > w_{q''}(x, y)\} \neq \emptyset.$$

Osserviamo, prima di tutto, che  $\omega \subset \Omega_{q'}$ , in quanto che su  $\Omega$  si ha che  $w_{q'}(x, y) > w_{q''}(x, y) \geq 0$  (cfr. la (1.45)). Si ha allora (cfr. la (1.50))  $\Delta w_{q'} = 1$  e dunque:

$$(1.52) \quad \Delta(w_{q'} - w_{q''}) \geq 0 \quad \text{su } \omega.$$

Sia

$$\mu = \sup\{w_{q'}(x, y) - w_{q''}(x, y), (x, y) \in \omega\} .$$

---

<sup>(2)</sup> A priori potrebbero esservi più soluzioni deboli in corrispondenza da una assegnata  $q \in Q$ .

Essendo  $w_{q'} - w_{q''}$  una funzione continua, deve esistere  $(x_0, y_0) \in \bar{\omega}$ , tale che  $w_{q'}(x_0, y_0) - w_{q''}(x_0, y_0) = \mu$ . Si ha poi:

$$(1.53) \quad w_{q'}(x_0, y_0) - w_{q''}(x_0, y_0) > 0,$$

$$(1.54) \quad (x_0, y_0) \in \partial D \cap \partial \omega,$$

la (1.53) a causa della (1.51) e la (1.54) per il principio del massimo e per ragioni di continuità.

Le (1.53) e (1.54) portano, però, all'assurdo in quanto <sup>(3)</sup> (cfr. la Fig. 1.1 e la proposizione 1.1):

$$\begin{aligned} w_{q'} - w_{q''} &= 0 & \text{su } \overline{FG} \\ D_y(w_{q'} - w_{q''}) &= 0 & \text{su } \overline{AF} \cup \widehat{GC} \cup \widehat{CE} \\ D_x(w_{q'} - w_{q''}) &= -q' - (-q'') \geq 0 & \text{su } \overline{EA}. \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE 1.3.** Conseguenza immediata del lemma 1.7 è il fatto che  $\forall q \in Q$ , esiste al più una soluzione debole di «portata»  $q$ . Infatti se  $\{\varphi'_a, \Omega'_a, u'_a, v'_a, q\}$  e  $\{\varphi''_a, \Omega''_a, u''_a, v''_a, q\}$  fossero due soluzioni deboli corrispondenti alla medesima  $q$ , per il lemma 1.7, si avrebbe  $w'_a = w''_a$  (con ovvio significato dei simboli) e dunque per le (1.45) e (1.46)  $\Omega'_a = \Omega''_a$  e  $\tilde{u}'_a = \tilde{u}''_a$ . Le due soluzioni deboli devono quindi coincidere.

Il lemma 1.7 e la (1.45) implicano fra l'altro il:

**LEMMA 1.8.** *Se  $q'$  e  $q'' \in Q$  e  $q' \leq q''$  allora  $\Omega_{q'} \subset \Omega_{q''}$ .*

Si ha inoltre:

**LEMMA 1.9.** *Se  $q'$  e  $q'' \in Q$  e  $q' \leq q''$ , allora  $\tilde{u}_{q'} \leq \tilde{u}_{q''}$  su  $D$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Si supponga per assurdo che:

$$(1.55) \quad \omega_1 = \{(x, y) \in D: \tilde{u}_{q'}(x, y) > \tilde{u}_{q''}(x, y)\} \neq \emptyset.$$

Dato che  $\tilde{u}_{q'}(x, y) = y$  su  $D - \Omega_{q'}$  (per la definizione di  $\tilde{u}_{q'}$ ) e che  $\tilde{u}_{q''}(x, y) \geq y$  su  $D - \Omega_{q''}$  (per la definizione di  $\tilde{u}_{q''}$  e il lemma 1.1), si ha

<sup>(3)</sup> Se  $q' = q''$  il principio di massimo classico (cfr. ad es. [16]) non è applicabile ai punti  $A$  e  $E$ . Tale difficoltà si supera facilmente ragionando per simmetria rispetto all'asse  $y$  (ci si accorge subito allora che  $A$  e  $E$  non possono essere punti di massimo per  $w_{q'} - w_{q''}$ ).

che (cfr. il lemma 1.8):

$$(1.56) \quad \omega_1 \subset \Omega_{q'} \cap \Omega_{q''},$$

e dunque, grazie all'osservazione 1.1,

$$(1.57) \quad \Delta(\tilde{u}_{q'} - \tilde{u}_{q''}) = 0 \quad \text{su } \omega_1.$$

A tale punto con un ragionamento del tutto simile a quello condotto nel lemma 1.7, si prova l'esistenza di un punto  $(x_0, y_0) \in \bar{\omega}_1$ , tale che

$$(1.58) \quad \tilde{u}_{q'}(x_0, y_0) - \tilde{u}_{q''}(x_0, y_0) > 0,$$

$$(1.59) \quad (x_0, y_0) \in \partial\omega_1 \cap \partial D.$$

Ciò è, però, assurdo perchè  $\tilde{u}_{q'}(x, y) - \tilde{u}_{q''}(x, y) = 0$  su  $\partial D - \overline{EA}$  e su  $\overline{EA}$  si ha che  $D_x(\tilde{u}_{q'} - \tilde{u}_{q''}) = 0$ .

Conseguenza immediata dei lemmi 1.8 e 1.9 è il seguente:

**LEMMA 1.10.** *Se  $q'$  e  $q'' \in Q$  e  $q' \leq q''$ , allora  $u_{q'} \leq u_{q''}|_{\Omega_{q'}}$  su  $\Omega_{q'}$ .*

Siamo a tale punto in grado di provare il seguente teorema di unicità:

**TEOREMA 1.1.** *Sotto l'ipotesi (1.2), il problema del canale ammette al più una soluzione debole.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\{\varphi', \Omega', u', v', q'\}$  e  $\{\varphi'', \Omega'', u'', v'', q''\}$  due distinte soluzioni deboli. Per l'osservazione 1.4 non è restrittivo supporre che:

$$(1.60) \quad q' < q''.$$

Per il lemma 1.10, l'osservazione 1.1 e il fatto che  $u' = u'' = \alpha(a)$  su  $\widehat{CE}$  (cfr. la (1.7)) si ha che  $\partial u' / \partial n \geq \partial u'' / \partial n$  su  $\widehat{CE}$ , dove  $n$  è la normale esterna.

Per il lemma 1.2 si avrà allora che  $q' \geq q''$ , che è in contrasto con la (1.60).

## 2. Studio di un problema non lineare.

a) Si ponga (cfr. Fig. 1.1)

$$(2.1) \quad K = \{g \in H^1(D), g = 0 \text{ su } \overline{FG}\}.$$

Sia inoltre  $\beta: D \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione soddisfacente alle condizioni:

$$(2.2) \quad \beta \in C^2(\bar{D})$$

$$(2.3) \quad \beta = 0 \quad \text{su } \overline{AF} \cup \overline{EA}$$

$$(2.4) \quad \beta(x, \alpha(x)) = \alpha'(x) \quad \forall x \in [0, k(n)].$$

Si può ad esempio porre

$$(2.5) \quad \beta(x, y) = \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} y.$$

Introduciamo, inoltre la forma bilineare definita su  $K$

$$(2.6) \quad a(h, g) = \int_D [h_x - \beta h_y] g_x + (h_y + \beta h_x) g_y + \beta_y h_x g - \beta_x h_y g] dx dy.$$

Vale allora la:

**PROPOSIZIONE 2.1.** *Se  $\{\varphi, \Omega, u, v, q\}$  è una soluzione debole del problema del canale, la funzione  $w$  (ad essa associata con il procedimento descritto in 1, c) appartiene a  $K$  e verifica la seguente disequazione variazionale <sup>(4)</sup>:*

$$(2.7) \quad a(w, g - w) + \int_D (g^+ - w^+) dx dy + \int_{\frac{\partial \Omega}{\partial x}} (\alpha'^2 + 1)(y - \alpha(a))(g - w) dx + \\ + q \int_{\frac{EA}{EA}} (g - w) dy \geq 0, \quad \forall g \in K$$

dove  $\beta$  è una funzione soddisfacente le condizioni (2.2), (2.3) e (2.4).

**OSSERVAZIONE 2.1.** È ovvio l'interesse della proposizione 2.1 dal punto di vista dello studio dell'esistenza della soluzione debole del problema del canale. Si potrebbe, difatti, studiare le eventuali soluzioni della disequazione variazionale (2.7) e risalire poi, con un procedimento a ritroso rispetto a quello descritto nel n. 1, a una soluzione debole del problema del canale (è questo uno dei punti fondamentali del me-

<sup>(4)</sup> Abbiamo qui adottato la seguente convenzione simbolica

$$v^+ = \frac{|v| + v}{2}, \quad v^- = \frac{|v| - v}{2}, \quad \text{da cui } v = v^+ - v^-.$$

todo del Baiocchi). Si incontra, però, subito una difficoltà in quanto la forma  $a(h, g)$ , che compare nella disequazione (2.7), non è in generale coerciva (cfr. il lemma 2.2 più avanti).

Più avanti supereremo tale difficoltà dimostrando direttamente la esistenza della soluzione per un problema equivalente alla (2.7).

Prima di passare alla dimostrazione della proposizione 2.1 consideriamo il seguente lemma (di facile verifica grazie ai noti teoremi di densità e di traccia contenuti ad es. in [15]):

**LEMMA 2.1.** *Siano  $h \in K \cap H^2(D)$  e  $g \in K$ . Vale allora la seguente formula di Green <sup>(5)</sup>:*

$$(2.8) \quad a(h, g) = - \int_D \Delta h \cdot g \, dx \, dy - \int_{\overline{AF}} h_{,y} g \, dx - \\ - \int_{\widehat{GC} \cup \widehat{CE}} (\alpha'^2 + 1) h_{,y} g \, dx + \int_{\overline{EA}} h_{,x} g \, dy .$$

**DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.1.** Grazie ai risultati della proposizione 1.1 e al lemma 2.1 si ha  $\forall g \in K$ :

$$a(w, g - w) + \int_D (g^+ - w^+) \, dx \, dy + \int_{\widehat{CE}} (\alpha'^2 + 1)(y - \alpha(a))(g - w) \, dx + \\ + \int_{\overline{EA}} g(g - w) \, dy = - \int_D \Delta w(g - w) \, dx \, dy + \int_D (g^+ - w^+) \, dx \, dy = \\ = - \int_{\Omega} g \, dx \, dy + \int_D g^+ \, dx \, dy > 0 .$$

**LEMMA 2.2.**  $\forall g \in K$  si ha che:

$$(2.9) \quad a(g, g) = \int_D (g_x^2 + g_y^2) \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_0^{k(n)} a''(x) [g(x, \alpha(x))]^2 \, dx .$$

---

<sup>(5)</sup> Le condizioni al contorno naturali associate alla forma  $a(h, g)$  sono dunque dello stesso tipo di quelle cui soddisfa la funzione  $w$  (cfr. la proposizione 1.1).

DIMOSTRAZIONE. Si ha che:

$$\begin{aligned}
 a(g, g) &= \int_D (g_x^2 + g_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_D \beta_y D_x(g^2) - \beta_x D_y(g^2) dx dy = \\
 &= \int_D (g_x^2 + g_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\partial D} \beta_y g^2 dy + \beta_x g^2 dx = (\text{dato che } g \in K \text{ e } \beta \text{ ve-} \\
 &\text{rifica (2.3) e (2.4)}) = \int_D (g_x^2 + g_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\widehat{\partial D} \cup \widehat{\partial E}} \beta_y g^2 dy + \beta_x g^2 dx = \\
 &= \int_D (g_x^2 + g_y^2) dx dy - \frac{1}{2} \int_0^{k(n)} \frac{d\beta(x, \alpha(x))}{dx} [g(x, \alpha(x))]^2 dx = \\
 &= \int_D (g_x^2 + g_y^2) dx dy - \frac{1}{2} \int_0^{k(n)} \alpha''(x) [g(x, \alpha(x))]^2 dx .
 \end{aligned}$$

b) Vale il seguente lemma (di dimostrazione pressochè ovvia):

LEMMA 2.3.  $\exists \lambda \in \mathbf{R}$  e  $\mu > 0$  tali che

$$(2.10) \quad a(g, g) + \lambda \|g\|_{L^2(D)}^2 \geq \mu \|g\|_{H^1(D)}^2 \quad \forall g \in K .$$

Osserviamo inoltre che dalla definizione di  $K$  e da noti risultati si ha che:

$$(2.11) \quad \text{L'immersione di } K \text{ in } L^2(D) \text{ è densa e compatta .}$$

Identifichiamo  $L^2(D)$  al suo duale. Se  $K'$  è il duale di  $K$ , si può, allora identificare  $L^2(D)$  ad una varietà lineare di  $K'$  (grazie alla (2.11)) e si può porre:

$$(2.12) \quad K \subset L^2(D) \subset K' .$$

Se  $f \in K'$  e  $g \in K$  denoteremo la loro dualità con  $\langle f, g \rangle$ . Nel caso in cui  $f \in L^2(D)$ , tale dualità coincide con il prodotto scalare in  $L^2(D)$ .

Associamo alla forma  $a(h, g)$  (risp. alla forma  $a^*(h, g) = a(g, h)$ ) definita in  $K$ , l'operatore  $A$  (risp.  $A^*$ ) definito nel seguente modo fra  $K$  e  $K'$ :

$$a(h, g) = \langle Ah, g \rangle \quad \forall v \in K$$

$$(\text{risp.}) \quad a^*(h, g) = \langle A^* h, g \rangle \quad \forall v \in K).$$



Come è noto, grazie alla condizione (2.11) e al lemma 2.3, l'operatore  $A$  (risp.  $A^*$ ) è un operatore di Fredholm fra  $K$  e  $K'$ , ad indice nullo. Si ha dunque l'isomorfismo algebrico e topologico:

$$(2.13) \quad A: K/N \leftrightarrow [K', N^*]^{(*)},$$

con

$$(2.14) \quad \dim(N) = \dim(N^*) < +\infty,$$

dove

$$N = \ker(A), \quad N^* = \ker(A^*),$$

$$[K', N^*] = \{f \in K': \langle f, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in N^*\}.$$

Vale il:

LEMMA 2.4.  $\dim(N) = 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\xi \in N$ , si ha ovviamente che

$$(2.15) \quad a(\xi, g) = 0 \quad \forall g \in K,$$

da cui  $\xi = 0$  con una semplice applicazione del principio di massimo in forma variazionale (cf. ad es. [8]).

Grazie al lemma 2.4, l'isomorfismo (2.13) può essere così precisato

$$(2.16) \quad A: K \leftrightarrow K'$$

Sia ora (cfr. fig. 1.1):

$$(2.17) \quad Z = \{(q, z) \in \mathbf{R}^2: m \leq q \leq k(n), \quad m \leq z \leq n\}.$$

Sia inoltre  $C_z$  ( $m \leq z \leq n$ ) il punto di  $\partial D$  di coordinate

$$(2.18) \quad C_z = (z, \alpha(z)).$$

---

(<sup>6</sup>) Per semplicità, si è indicato ancora con  $A$  l'operatore dopo il passaggio al quoziente.

Sia ora  $(g, z) \in Z$  e  $f \in L^2(D)$ . Grazie alla regolarità di  $\alpha(x)$  (cfr. la (1.2)), il seguente funzionale

$$L(g) = \int_D fg \, dx \, dy - \int_{\widehat{C_z E}} (\alpha'^2 + 1)(y - \alpha(z)) g \, dx - q \int_{\overline{EA}} g \, dy,$$

è lineare e continuo in  $K$ . L'isomorfismo (2.16) ci dice allora che la equazione variazionale

$$(2.19) \quad a(h_{qz}, g) = \int_D fg \, dx \, dy - \int_{\widehat{C_z E}} (\alpha'^2 + 1)(y - \alpha(z)) g \, dx - q \int_{\overline{EA}} g \, dy,$$

ammette una ed una sola soluzione in  $K$ .

Vale la:

**PROPOSIZIONE 2.2.** *La soluzione  $h_{qz} \in K$  della equazione variazionale (2.19) verifica le condizioni seguenti*

$$(2.20) \quad -\Delta h_{qz} = f \quad \text{nel senso di } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$(2.21) \quad h_{qz} = 0 \quad \text{su } \overline{FG} \text{ (nel senso di } H^1(\overline{FG}))$$

$$(2.22) \quad D_y h_{qz} = 0 \quad \text{su } \overline{AF}$$

$$(2.23) \quad D_y h_{qz} = 0 \quad \text{su } \widehat{GC_z}$$

$$(2.24) \quad D_y h_{qz} = y - \alpha(z) \quad \text{su } \widehat{C_z E}$$

$$(2.25) \quad D_x h_{qz} = -q \quad \text{su } \overline{EA}$$

la condizione (2.22) dovendo essere intesa nel senso di  $(H_{00}^1(\overline{AF}))'$  e analogamente le (2.23), (2.24) e (2.25) (per la definizione e le proprietà di tali spazi vedere ad es. [15]).

Si ha inoltre:

$$(2.26) \quad h_{qz} \in H^2(D).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Le (2.20) e (2.21) sono ovvie. Per verificare la (2.22), si prenda  $g \in K$  nulla su  $\partial D - \overline{AF}$ . Vale allora la formula di Green:

$$a(h_{qz}, g) = - \int_D \Delta h_{qz} g \, dx \, dy - \langle D_y h_{qz}, g \rangle,$$

la dualità essendo intesa fra  $H_{00}^1(\overline{AF})$  e il suo duale. Tenendo presente il fatto che  $h_{az}$  verifica l'equazione (2.19) si ha

$$\langle D_\nu h_{az}, g \rangle = 0 \quad \forall g \in K, \quad \text{nulle su } \partial D - \overline{AF},$$

e dunque la (2.22). Le relazioni (2.23), (2.24) e (2.25) si verificano analogamente.

Verifichiamo la (2.26). Sfruttando noti risultati sulla regolarità all'« interno » di  $D$  e sulle « parti regolari » della frontiera delle soluzioni di problemi ai limiti ellittici (vedere ad es. [15]) si ha che:

$$(2.27) \quad h_{az} \in H_{\text{loc}}^2 \text{ in un intorno di ogni punto di } \overline{D} \text{ differente da } A, F, G, E.$$

Si vede poi che  $h_{az} \in H_{\text{loc}}^2$  in un intorno di  $A$  e  $C$  ragionando per simmetria rispetto all'asse  $y$  (si pone  $\tilde{h}(x, y) = h_{az}(|x|, y)$  e si verifica che  $\Delta \tilde{h} \in L^2$  e che verifica condizioni al contorno « regolari » in un intorno di  $A$  e di  $E$ ).

Analogamente si verifica che  $h_{az} \in H_{\text{loc}}^2$  in un intorno di  $F$  (risp. di  $G$ ) ragionando per simmetria rispetto all'asse  $x$  (risp. per simmetria rispetto alla retta  $y = \alpha(n)$ ).

La (2.26) è così completamente verificata.

OSSERVAZIONE 2.2. Se si tiene presente la (2.26) si ha che la (2.22) si può intendere nel senso di  $H^1(\overline{AF})$  (analogamente le (2.23), (2.24) e (2.25)).

Si ponga  $((q, z) \in Z)$ :

$$(2.28) \quad H_{az}^3(D) = \{g \in H^2(D), g \text{ verificanti} \\ \text{le (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25)}\},$$

$H_{az}^2(D)$  è ovviamente una varietà affine di  $H^2(D)$ . L'isomorfismo (2.16) e la proposizione 2.2 implicano allora la seguente corrispondenza biunivoca e bicontinua:

$$\Delta: H_{az}^2(D) \leftrightarrow L^2(D). \quad (2.29)$$

c) Sia

$$(2.30) \quad \vartheta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{una funzione lipschitziana e limitata.}$$

Sia inoltre  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ . È allora una immediata conseguenza della (2.29) il seguente lemma:

**LEMMA 2.5.** *Per ogni  $(q, z) \in Z$ , per ogni  $f \in H^{1+\varepsilon}(B)$ , esiste una ed una sola  $g \in H_{qz}^2(D)$  tale che  $\Delta g = \vartheta(f)$ .*

Si indichi con  $T_{qz}: H^{1+\varepsilon}(D) \rightarrow H_{qz}^2(D)$  l'applicazione definita nel lemma 2.5.

**PROPOSIZIONE 2.3.**  $\forall (q, z) \in Z$ , l'applicazione  $T_{qz}$  ammette un punto fisso, cioè  $\forall (q, z) \in Z, \exists g_{qz} \in H_{qz}^2(D)$ , tale che

$$\Delta g_{qz} = \vartheta(g_{qz}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** i) Proviamo, prima di tutto, che  $T_{qz}$  è continua. Per verificare tale asserzione è sufficiente verificare che l'applicazione  $f \rightarrow \vartheta(f)$  è continua da  $H^{1+\varepsilon}(D)$  in  $L^2(D)$ . Tale proprietà è di facile dimostrazione in quanto che se  $f_n, f \in H^{1+\varepsilon}(D)$  e se  $f_n \rightarrow f$  in  $H^{1+\varepsilon}(D)$ , si ha:

$$\begin{aligned} \|\vartheta(f) - \vartheta(f_n)\|_{L^2(D)}^2 &= \int_D |\vartheta(f(x, y)) - \vartheta(f_n(x, y))|^2 dx dy \leq \\ &\leq \lambda^2 \int_D |f(x, y) - f_n(x, y)|^2 dx dy = \lambda^2 \|f - f_n\|_{L^2(D)}^2, \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  è la costante di lipschitzianità di  $\vartheta$ .

ii) Dato che  $\vartheta$  è una funzione limitata, è limitato il rango di  $T_{qz}$ , esiste cioè una costante  $N$  (dipendente da  $(q, z)$ ) tale che:

$$(2.31) \quad \|T_{qz} f\|_{H^2} \leq N \quad \forall f \in H^{1+\varepsilon}(D).$$

Si ponga:

$$(2.32) \quad \Sigma_1 = \{g \in H_{qz}^2, \|g\|_{H^2} \leq N\}$$

e

$$(2.33) \quad \Sigma = \text{chiusura in } H^{1+\varepsilon}(D) \text{ di } \Sigma_1.$$

Si ha ovviamente che:

$$(2.34) \quad \Sigma \text{ è compatto e convesso in } H^{1+\varepsilon}(D).$$

Indichiamo ancora con  $T_{qz}$ , la sua restrizione a  $\Sigma$ .  $T_{qz}$  è allora continuo fra gli insiemi

$$(2.35) \quad T_{qz}: \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Per la (2.34) e il teorema del punto fisso di Schauder, l'applicazione (2.35) ha un punto fisso.

d) Sia ora  $H_r: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ( $r \in \mathbf{N}$ ) definita nel seguente modo

$$(2.36) \quad H_r(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ rx & 0 < x < \frac{1}{r}, \\ 1 & x \geq \frac{1}{r}, \end{cases}$$

$\forall r \in \mathbf{N}$ ,  $H_r(x)$  soddisfa la condizione (2.30), dunque per la proposizione 2.3 si ha che

$$(2.37) \quad \forall (q, z) \in Z, \quad \forall r \in \mathbf{N}, \quad \exists g_r \in H_{qz}^2(D) \quad \text{tale che } \Delta g_r = H_r(g_r).$$

Osserviamo a tale punto che:

**LEMMA 2.6.**  $\forall r \in \mathbf{N}$  si ha  $g_r(x, y) \geq g_{r+1}(x, y)$ , cioè la successione  $g_r$  è monotona non crescente.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia per assurdo:

$$\omega = \{(x, y) \in D: g_{r+1}(x, y) > g_r(x, y)\} \neq \emptyset.$$

Per la (2.37) si ha allora  $\Delta(g_{r+1} - g_r) \geq 0$  su  $\omega$ . Si ponga

$$\mu = \sup\{g_{r+1}(x, y) - g_r(x, y), (x, y) \in \omega\}.$$

Essendo  $g_{r+1} - g_r$  una funzione continua si ha che esiste  $(x_0, y_0) \in \bar{\omega}$  tale che  $g_{r+1}(x_0, y_0) - g_r(x_0, y_0) = \mu > 0$ .  $(x_0, y_0)$  deve inoltre appartenere a  $\partial\omega \cap \partial D$  per il principio di massimo e per ragioni di continuità. Ciò, ancora per il principio del massimo, porta ad un assurdo perchè  $g_{r+1}$  e  $g_r$  soddisfano le medesime condizioni ai limiti su  $\partial D$  (?).

---

(?) È lecito l'impiego del principio del massimo perchè le funzioni  $g_r \in C^1(\bar{D})$  (cfr. l'osservazione 2.3, più avanti). Nei punti  $A$  e  $E$  si può ragionare adattando, in modo ovvio, le considerazioni condotte nella nota (3).

Essendo le funzioni  $H_r(x)$  equilimitate, la successione  $g_r$  è limitata in  $H^2(D)$ . Si può allora estrarre una sottosuccessione  $g_{r_j}$  e si può determinare una  $g \in H_{az}^2(D)$  in modo tale che  $g_{r_j} \rightarrow g$  in  $C^0(\bar{D})$ . Grazie al lemma 2.6 si ha che  $g_r \rightarrow g$  in  $C^0(\bar{D})$ , cioè tutta la successione  $g_r$  converge a  $g$  in  $C_0(\bar{D})$ .

Si ponga

$$(2.38) \quad \Omega = \{(x, y) \in D, g(x, y) > 0\},$$

$$(2.39) \quad \Omega^- = \{(x, y) \in D, g(x, y) < 0\}.$$

LEMMA 2.7. *La funzione  $v$  verifica le condizioni:*

$$(2.40) \quad g = \lim_{r \rightarrow \infty} g_r \quad \text{in } C^0(\bar{D}),$$

$$(2.41) \quad 0 \leq \Delta g \leq 1,$$

$$(2.42) \quad \Delta g = 1 \quad \text{su } \Omega,$$

$$(2.43) \quad \Delta g = 0 \quad \text{su } \Omega^-.$$

DIMOSTRAZIONE. La (2.40) è già stata verificata. La (2.41) è una conseguenza della (2.40) e del fatto che  $0 \leq \Delta g_r \leq 1$  (cfr. le (2.36) e (2.37)).

Sia ora  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e  $\lambda = \min\{g(x, y) \mid (x, y) \in \text{supp}(\psi)\}$ . Per la definizione di  $\Omega$  e la continuità di  $g$  si ha che  $\lambda > 0$ . Dato che  $g_r \rightarrow g$  in  $C^0(\bar{Q})$ , esiste un  $\bar{r}$  tale che per  $r > \bar{r}$  si abbia  $g_r(x, y) > 1/r$  sul supporto di  $\psi$  e dunque (cfr. le (2.36) e (2.37))  $\Delta g_r = 1$  sul supporto di  $\psi$ . Si ha dunque:  $\langle \Delta g, \psi \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle \Delta g_r, \psi \rangle = \langle 1, \psi \rangle$  la dualità essendo fra  $\mathcal{D}(\Omega)$  e il duale.

Abbiamo così provato la (2.42). Analogamente si verifica la (2.43).

OSSERVAZIONE 2.3. Dato che  $\Delta g \in L^\infty(D)$  (risp.  $\Delta g_r \in L^\infty(D)$ ), con un procedimento del tutto simile a quello utilizzato per dimostrare la (2.26) (sfruttando però i risultati di regolarità contenuti in [1], invece che quelli contenuti in [15]) si arriva al seguente risultato

$$g \in W^{2,p}(D), \quad 1 \leq p < +\infty$$

$$\text{(risp. } g_r \in W^{2,p}(D), \quad 1 \leq p < +\infty)$$

e dunque, grazie ai noti teoremi di immersione di Sobolev,

$$g \in C^1(\bar{D}) \quad \text{(risp. } g_r \in C^1(\bar{D})).$$

e) Riassumiamo il risultato raggiunto con il procedimento descritto nei punti b), c), d):

TEOREMA 2.1.  $\forall (q, z) \in Z, \exists w_{qz} \in H^2(D)$  tale che:

$$(2.44) \quad w_{qz} \in W^{2,p}(D) \cap C^1(\bar{D}) \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$(2.45) \quad \Delta w_{qz} \in L^\infty(D), \quad 0 \leq \Delta w_{qz} \leq 1$$

$$(2.46) \quad w_{qz} = 0 \quad \text{su } \overline{FG}$$

$$(2.47) \quad D_y w_{qz} = 0 \quad \text{su } \overline{AF} \cup \widehat{GC}_z$$

$$(2.48) \quad D_y w_{qz} = y - \alpha(z) \quad \text{su } \widehat{C}_z \overline{E}$$

$$(2.49) \quad D_x w_{qz} = -q \quad \text{su } \overline{EA}.$$

Se, inoltre, si pone:

$$(2.50) \quad \Omega_{qz} = \{(x, y) \in D: w_{qz}(x, y) > 0\},$$

$$(2.51) \quad \Omega_{qz}^- = \{(x, y) \in D: w_{qz}(x, y) < 0\},$$

si ha ancora

$$(2.52) \quad \Delta w_{qz} = 1 \quad \text{su } \Omega_{qz}$$

$$(2.53) \quad \Delta w_{qz} = 0 \quad \text{su } \Omega_{qz}^-.$$

OSSERVAZIONE 2.4. Per la dimostrazione dell'esistenza della soluzione debole del problema del canale è sufficiente il risultato enunciato nel teorema 2.1. Si può d'altra parte verificare facilmente che una funzione  $w_{qz}$  verifica le condizioni del teorema 2.1 se e solo se soddisfa la disequazione variazionale (2.7).

Abbiamo così indirettamente dimostrato l'esistenza della soluzione della disequazione (2.7). Più avanti (cfr. il corollario 3.1) si ricaverà anche un risultato di unicità.

OSSERVAZIONE 2.5. Sempre tenendo presente i risultati illustrati nei punti b), c), d) (e in particolare le (2.36) e (2.37) ed il lemma 2.6) si ha che  $\forall (q, z) \in Z$  esiste una successione  $w_{qz}^{(r)}$  di funzioni di  $H^2(D)$  verificanti tutte le condizioni del teorema 2.1 eccetto la (2.45) che

viene sostituita dalla relazione

$$\Delta w_{qz}^{(r)} = H_r(w_{qz}^{(r)})$$

Si ha inoltre che:

$$w_{qz}^{(r)} \rightarrow w_{qz} \quad \text{in } C^0(\bar{D}).$$

**OSSERVAZIONE 2.6.** Notiamo che al variare di  $q$  le funzioni  $w_q$  sono tutte « regolari » (cfr. le (2.44)), in quanto soddisfano una condizione ai limiti di tipo uniforme sul tratto  $\widehat{GC}_z \cup \widehat{C}_z E$ . Per risolvere, più avanti, il problema dell'esistenza della soluzione del problema del canale, sceglieremo il « giusto » valore di  $q$ , imponendo una condizione del tipo passaggio del « pelo libero » da un punto opportuno.

Nella dimostrazione dell'esistenza si poteva pensare di seguire un'altra strada, cioè quella di costruire le funzioni  $w_q$  imponendo su  $\widehat{GC}_z$  la condizione di Dirichlet  $w_q = 0$  (che dà luogo a un problema di tipo misto), invece che la condizione di derivata obliqua  $D_\nu w_q = 0$ . Le funzioni  $w_q$ , per soddisfare le (2.44), avrebbero però dovuto verificare una opportuna condizione di compatibilità. Avremmo così potuto scegliere il « giusto » valore di  $q$ , in modo tale che la corrispondente  $w_q$ , essendo « sufficientemente regolare », ci avrebbe permesso di costruire una soluzione del problema del canale (per tale modo di procedere vedere il problema V di [5] e [9]).

### 3. Esistenza della soluzione debole.

a) Per ogni  $(q, z) \in Z$  (per la definizione di  $Z$  vedere la (2.17)) indichiamo con  $w_{qz}$  una funzione verificante il teorema 2.1 (la scelta di  $w_{qz}$  potrebbe essere, a priori, non univoca).

Valgono allora i seguenti risultati:

**LEMMA 3.1.** *Siano  $m \leq q_1 \leq q_2 \leq k(n)$  e  $m \leq z \leq n$  (cioè  $(q_1, z)$  e  $(q_2, z) \in Z$  e  $q_1 \leq q_2$ ). Si ha allora che:*

$$(3.1) \quad 0 \leq w_{q_2 z}(x, y) - w_{q_1 z}(x, y) \leq (q_2 - q_1)(k(n) - x) \quad \text{in } D.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Verifichiamo la prima disuguaglianza del lemma. Per fare questo è sufficiente verificare  $\forall r \in \mathbf{N}$  (cfr. l'osservazione 2.5) che:

$$(3.2) \quad w_{q_2 z}^{(r)} - w_{q_1 z}^{(r)} \geq 0 \quad \text{su } D.$$



Sia per assurdo:

$$(3.3) \quad \omega = \{(x, y) \in D: w_{a_1z}^{(r)}(x, y) > w_{a_2z}^{(r)}(x, y)\} \neq \emptyset.$$

Abbiamo allora:

$$(3.4) \quad \Delta(w_{a_1z}^{(r)} - w_{a_2z}^{(r)}) = H_r(w_{a_1z}^{(r)}) - H_r(w_{a_2z}^{(r)}) \geq 0 \quad \text{su } \omega.$$

Sia

$$(3.5) \quad \lambda = \sup\{w_{a_1z}^{(r)}(x, y) - w_{a_2z}^{(r)}(x, y), (x, y) \in \omega\}.$$

Per la continuità di  $w_{a_1z}^{(r)}$  e  $w_{a_2z}^{(r)}$ , esiste  $(x_0, y_0) \in \bar{\omega}$ , tale che:

$$(3.6) \quad w_{a_1z}^{(r)}(x_0, y_0) - w_{a_2z}^{(r)}(x_0, y_0) = \lambda > 0.$$

Si ha inoltre (sempre per ragioni di continuità e per il principio di massimo):

$$(3.7) \quad (x_0, y_0) \in \partial\omega \cap \partial D.$$

Le (3.6) e (3.7) portano, però, ad un assurdo in quanto  $(x_0, y_0)$  non può appartenere a  $\overline{FG}$  perchè ivi  $w_{a_1z}^{(r)} - w_{a_2z}^{(r)} = 0$ , neanche a  $\overline{AF} \cup \widehat{GC}_z \cup \widehat{C}_zE$  perchè ivi  $D_y(w_{a_1z}^{(r)} - w_{a_2z}^{(r)}) = 0$ , neanche a  $\overline{EA}$  perchè ivi si ha che  $D_x(w_{a_1z}^{(r)} - w_{a_2z}^{(r)}) = -q_1 + q_2 \geq 0$  (cfr. il principio del massimo di Hopf <sup>(8)</sup> e l'osservazione 2.5).

Analogamente si dimostra la seconda parte della disuguaglianza (3.1).

Con tecniche del tutto simili a quelle descritte nella dimostrazione del lemma 3.1, si prova anche il seguente:

LEMMA 3.2. *Siano  $m \leq q \leq k(n)$  e  $m \leq z_1 \leq z_2 \leq n$ . Si ha allora che:*

$$0 \leq w_{a_1} - w_{a_2} \leq \frac{\alpha(z_2) - \alpha(z_1)}{2\alpha(0)} [y^2 - x^2 + (k(n))^2] \quad \text{in } D$$

COROLLARIO 3.1.  $\forall (q, z) \in Z$  la disequazione variazionale (2.7) (o equivalentemente il problema associato al teorema 2.1) ammette una ed una sola soluzione.

---

<sup>(8)</sup> Nei punti  $A$  e  $E$  si può ragionare in modo analogo a quanto si è fatto in nota <sup>(3)</sup>.

**DIMOSTRAZIONE.** Resta da verificare solo l'unicità. Se esistesse  $(q, z) \in Z$  a cui corrispondono due soluzioni  $w'_{qz}$  e  $w''_{qz}$ , avremmo (ad esempio per il lemma 3.1) che  $w'_{qz} \leq w''_{qz}$  in  $D$  e viceversa. Dunque  $w'_{qz} = w''_{qz}$ .

**COROLLARIO 3.2.** *Sia  $r \in \mathbf{N}$  e  $(q_r, z_r), (q, z) \in Z$  tali che*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (q_r, z_r) = (q, z) \quad \text{in } \mathbf{R}^2 .$$

*Si ha allora:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w_{q_r z_r} = w_{qz} \quad \text{in } C_0(\bar{D}) .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si ha infatti (cfr. i lemmi 3.1 e 3.2)  $\forall (q, z) \in Z$  e  $\forall (x, y) \in D$

$$(3.8) \quad |w_{qz}(x, y) - w_{q_r z_r}(x, y)| \leq \frac{|\alpha(z) - \alpha(z_r)|}{2\alpha(0)} \cdot \left( (k(n))^2 + (\alpha(n))^2 \right) + |q - q_r| k(n) .$$

**COROLLARIO 3.3.** i)  $\forall q \in [m, k(n)]$  si ha

$$w_{qm}(x, y) = \begin{cases} \frac{(q-x)^2}{2} & \text{su } D_q , \\ 0 & \text{su } D - D_q , \end{cases}$$

dove

$$(3.9) \quad D_q = \{(x, y) \in D : 0 < x < q\} ,$$

ii)  $\forall (q, z) \in Z$  si ha

$$w_{qz}(x, y) \leq \begin{cases} \frac{(q-x)^2}{2} & \text{su } D_q , \\ 0 & \text{su } D - D_q , \end{cases}$$

e dunque

$$\Omega_{qz} \subset D_q .$$

**DIMOSTRAZIONE.** La parte i) è immediata (basta infatti osservare che sono soddisfatte le condizioni del teorema 2.1 con  $z = m$ ). La parte ii) è conseguenza della parte i) e del lemma 3.2.

b) Si ponga

$$(3.10) \quad T = \{(q, z) \in Z: w_{qz}(x, y) \geq 0 \text{ su } D\}.$$

Valgono allora i seguenti lemmi:

LEMMA 3.3.  $\forall (q, z) \in T$  si ha che

$$D_y w_{qz}(x, y) < 0 \quad \text{su } D.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $z = m$  l'asserto è conseguenza del corollario 3.3, i). Sia allora  $m < z < n$  e supponiamo per assurdo che:

$$\omega = \{(x, y) \in D: D_y w_{qz}(x, y) > 0\} \neq \emptyset.$$

È facile verificare che  $\omega \subset \Omega_{qz}$  (dato che  $(q, z) \in T$ ), dunque si ha che  $\Delta(D_y w_{qz}) = 0$  su  $\omega$ . Esiste inoltre  $(x_0, y_0) \in \bar{\omega}$  tale che:

$$D_y w_{qz}(x_0, y_0) = \sup\{D_y w_{qz}(x, y), (x, y) \in \omega\}.$$

Per il principio del massimo e per la continuità di  $D_y(w_{qz})$  si deve avere che  $D_y w_{qz}(x_0, y_0) > 0$  e  $(x_0, y_0) \in \partial\omega \cap \partial D$ . Osserviamo che  $(x_0, y_0) \notin \overline{AF} \cup \overline{FG} \cup \widehat{GC}_z \cup \widehat{C}_z E$ , in quanto ivi  $D_y w_{qz} < 0$ .

Deve essere allora  $(x_0, y_0) \in \overline{EA}$ . In tal caso esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $U \cap D$  è contenuto in  $\omega$  (e dunque in  $\Omega_{qz}$ ).  $w_{qz}$  è dunque « regolare » in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e si ha che  $D_x(D_y w_{qz}) = 0$  su  $U \cap \partial D$ . Ciò è assurdo per il principio del massimo di Hopf.

LEMMA 3.4.  $\forall (q, z) \in T$  si ha che (per la definizione di  $D_z$  vedere la (3.9)).

$$(3.11) \quad \Omega_{qz} \supset D_z \quad (\text{cioè } w_{qz}(x, y) > 0 \text{ su } D_z).$$

DIMOSTRAZIONE. Se per assurdo esistesse  $(x_0, y_0) \in D_z$  tale che  $w_{qz}(x_0, y_0) = 0$ , si avrebbe allora (cfr. il lemma 3.3) che  $w_{qz}(x_0, y) = 0$  per ogni  $y > y_0$  e dunque  $D_y w_{qz}(x_0, \alpha(x_0)) = 0$ , il che contrasta con la (2.48).

LEMMA 3.5.  $\forall (q, z) \in T$  si ha che:

$$D_x w_{qz} = 0 \quad \text{su } \overline{FG}.$$

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza immediata del fatto che  $(q, z) \in T$  e del corollario 3.3, ii).

LEMMA 3.6.  $\forall (q, z) \in T$  si ha che:

$$D_x w_{qz}(x, y) \leq 0 \quad \text{su } D.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia per assurdo:

$$(3.12) \quad \omega = \{(x, y) \in D: D_x w_{qz}(x, y) > 0\} \neq \emptyset.$$

Si vede subito inoltre che (cfr. il fatto che  $(q, z) \in T$ ):

$$(3.13) \quad \omega \subset \Omega_{qz}.$$

Si ha dunque che

$$(3.14) \quad \Delta(D_x w_{qz}) = 0 \quad \text{su } \omega.$$

Esiste allora  $(x_0, y_0) \in \bar{\omega}$  tale che:

$$(3.15) \quad D_x w_{qz}(x_0, y_0) > 0,$$

$$(3.16) \quad (x_0, y_0) \in \partial\omega \cap \partial D,$$

$(x_0, y_0) \notin \overline{EA} \cap \overline{FG}$  perchè ivi si ha che  $D_x w_{qz} \leq 0$  (cfr. la (2.49) e il lemma 3.5).

Sia  $(x_0, y_0) \in \overline{AF}$ . Si può allora, determinare un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $U \cap D$  sia contenuto in  $\omega$  e dunque in  $\Omega_{qz}$  (per le (3.15) e (3.13)).

$w_{qz}$  è allora « regolare » in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e si ha

$$D_y(D_x w_{qz}(x_0, y_0)) = 0$$

(cfr. il teorema 2.1) e ciò è assurdo per il principio del massimo di Hopf. Analogamente si ragiona su  $\widehat{GC}_z$  e  $\widehat{C}_z E$  (cfr. le (3.21) e (3.22) più avanti).

Resta solo da provare che  $(x_0, y_0) \neq C_z$  per arrivare all'asserto. Se, per assurdo  $(x_0, y_0) = C_z$ , allora esiste un intorno circolare  $V$  di  $C_z$  tale che  $\bar{V} \cap D \subset \omega \subset \Omega_{qz}$ . Avremo che  $w_{qz}$  è « regolare » in ogni punto di  $\bar{V} \cap \bar{D}$ , fuorchè nel punto  $C_z$ . Si ha inoltre che

$$(3.17) \quad D_x w_{qz} \in H^1(V \cap D),$$

$$(3.18) \quad \Delta(D_x w_{qz}) = 0 \quad \text{su } V \cap D.$$

Si ponga:

$$(3.19) \quad \mathfrak{S} = \{g \in H^1(V \cap D), g = 0 \text{ su } (\partial V) \cap D\}.$$

Vale allora la formula di Green (cfr. [15]):

$$(3.20) \quad \int_{V \cap D} \text{grad}(w_{az})_x \text{grad} g \, dx \, dy = + \left\langle \frac{\partial(w_{az})_x}{\partial n}, g \right\rangle \quad \forall g \in \mathfrak{S},$$

la dualità essendo fra  $H^{\frac{1}{2}}(\partial(V \cap D))$  e il duale e  $n$  essendo la normale esterna.

Si ha inoltre su  $\partial(V \cap D) \cap (GC_z \cup C_z E)$  (su cui  $w_{az}$  è « regolare »):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(w_{az})_x}{\partial n} &= (w_{az})_{xz} \cos(n, x) + (w_{az})_{xy} \sin(n, x) = \\ &= (1 - (w_{az})_{yy}) \sin(t, x) - (w_{az})_{xy} \cos(t, x) = \sin(t, x) - \frac{\partial(w_{az})_y}{\partial t} \end{aligned}$$

dove  $t$  è la tangente a  $\partial(V \cap D)$  orientata positivamente.

Si ha allora (cfr. le (2.47) e (2.48)):

$$(3.21) \quad \frac{\partial}{\partial n} (w_{az})_x = \sin(t, x) \leq 0 \quad \text{su } \widehat{CC}_z,$$

$$(3.22) \quad \frac{\partial}{\partial n} (w_{az})_x = 0 \quad \text{su } \widehat{C}_z E.$$

Tenendo presente il fatto che in  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial(V \cap D))$  non vi possono essere « masse concentrate » nel punto  $C_z$  e che su  $\partial(V \cap D) - \{C_z\}$  la  $(w_{az})_x$  è regolare, le (3.20), (3.21) e (3.22) implicano la relazione seguente:

$$(3.23) \quad \int_{V \cap D} \text{grad}(w_{az})_x \text{grad} g \, dx \, dy \leq 0 \quad \forall g \in \mathfrak{S}.$$

Il principio di massimo sotto forma variazionale (cfr. ad es. [8]) ci dice allora che  $(w_{az})_x$  non può avere massimo in  $C_z$ .

Il lemma è così completamente dimostrato.

Sia  $P \equiv (\bar{x}, \bar{y}) \in D$ . Si ponga:

$$Q_P^+ = \{(x, y) \in D: x > \bar{x}, y > \bar{y}\},$$

$$Q_P^- = \{(x, y) \in D: x < \bar{x}, y < \bar{y}\}.$$

LEMMA 3.7.  $\forall (q, z) \in T$  si ha che:

$$(3.24) \quad Q_P^+ \subset D - \bar{\Omega}_{az} \quad \forall P \in D - \Omega_{az},$$

$$(3.25) \quad Q_P^- \subset \Omega_{az} \quad \forall P \in D \cap \partial\Omega_{az}.$$

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza praticamente immediata dei lemmi 3.3 e 3.6.

e) Dimostriamo ora alcune proprietà di  $T$ .

LEMMA 3.8.  $T$  è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(q, z)$  punto di aderenza di  $T$  e  $(q_r, z_r)$  una successione di elementi di  $T$  tali che  $(q_r, z_r) \rightarrow (q, z)$ . Avremo allora che (cfr. corollario 3.2)  $w_{q_r z_r} \rightarrow w_{qz}$  in  $C^0(\bar{D})$  e dunque, dato che  $w_{q_r z_r}(x, y) \geq 0$  su  $D$ , si ha che  $w_{qz}(x, y) \geq 0$  su  $D$ , cioè  $(q, z) \in T$ .

Si definisca  $\forall P \equiv (q_0, z_0) \in Z$ :

$$A'_P = \{(q, z) \in Z: q \geq q_0, z \leq z_0\},$$

$$A''_P = \{(q, z) \in Z: q \leq q_0, z \geq z_0\}.$$

LEMMA 3.9. Si ha che:

$$A'_P \subset T \quad \forall P \in T,$$

$$A''_P \subset T - Z \quad \forall P \in Z - T.$$

DIMOSTRAZIONE. Ovvio per la definizione di  $T$  e i lemmi 3.1 e 3.2 (se  $q$  aumenta,  $w_{qz}$  non diminuisce, se  $z$  aumenta,  $w_{qz}$  non aumenta).

Si ponga:

$$(3.26) \quad I = \overline{\partial T - \partial Z}.$$

Vale allora il seguente:

LEMMA 3.10. Si ha che

i)  $I \subset T$ .

ii)  $I \cap \{(m, z), m \leq z \leq n\} \cap \{(q, m), m \leq q \leq k(n)\} = \{(m, m)\}$ .

iii) Esistono punti di  $I$  interni a  $Z$ .

- iv)  $I$  è il grafico di una funzione lipschitziana rispetto agli assi:  $X = x + y$ ,  $Y = -x + y$ . Inoltre  $I$  congiunge il punto  $(m, m)$  con un punto appartenente a  $\overline{RS} \cup \overline{SU}$ .

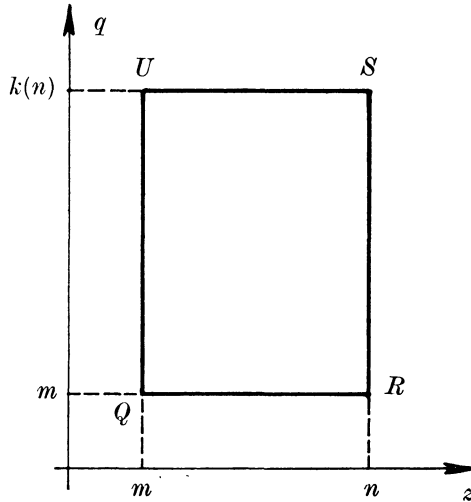


Fig. 3.1.

**DIMOSTRAZIONE.** La i) è conseguenza della definizione di  $I$  e del lemma 3.8.

Sia ora  $m < z \leq n$  e supponiamo per assurdo che  $(m, z) \in I$  e dunque (cfr. la i))  $(m, z) \in T$ , cioè a dire  $w_{mz} \geq 0$  su  $D$ . Si ha allora che (cfr. lemma 3.2)  $w_{mz}(x, y) \leq w_{m,m}(x, y)$  su  $D$  e dunque (cfr. corollario 3.3)  $w_{mz} = 0$  su  $D_z - D_m$ . Ciò è assurdo in quanto si deve avere la condizione al contorno  $D_y w_{mz} = y - \alpha(z) < 0$  su  $C_z E$ . Si ha dunque che

$$(3.27) \quad I \cap \{(m, z), m < z \leq n\} = \emptyset.$$

Sia ora  $m < \bar{q} \leq k(n)$ . Si ha allora che esiste un intorno  $V$  di  $(\bar{q}, m)$  in modo tale che (cfr. i corollari 3.2 e 3.3):

$$w_{qz}(x, y) > 0 \quad \text{su } D_z,$$

per ogni  $(q, z) \in V \cap Z$ . Si vede poi che, con ragionamenti abituali che si appoggiano al principio di massimo, che  $w_{qz}(x, y) \geq 0$  su  $D$  e dunque

$V \cap Z \subset T$ . Si ottiene così che:

$$(3.28) \quad I \cap \{(q, m), m < q < k(n)\} \neq \emptyset .$$

Per dimostrare la ii) non resta che verificare che  $(m, m) \in I$ . Osserviamo che per ogni intorno  $V_1$  di  $(m, m)$ , esiste  $(q_1, z_1) \in T \cap V_1$ , con  $q_1 > m$  e  $z_1 > m$ . Sia ora

$$\tilde{q} = \inf\{q: (q, z_1) \in T\} .$$

Si ha ovviamente che  $(\tilde{q}, z) \in T$  perchè  $T$  è chiuso, che  $\tilde{q} > m$  per la (3.27) e dunque  $(\tilde{q}, z_1) \in I$ .  $(m, m)$ , in quanto punto di aderenza di elementi di  $I$ , appartiene a  $I$ . In questo modo si è anche controllata la iii).

La verifica di iv) è immediata in quanto la lipschitzianità di  $I$  è conseguenza del lemma 3.9 e il fatto che  $I$  congine  $(m, m)$  con un punto di  $\overline{RS} \cup \overline{SU}$  è conseguenza delle ii) e iii).

LEMMA 3.11.  $\forall (q, z) \in I$ , si ha che  $w_{\alpha z}(z, \alpha(z)) = 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che  $q \neq m$ , in quanto  $(m, z) \in I$  soltanto se  $z = m$  (cfr. il lemma 3.10, ii)) e tale caso si tratta direttamente utilizzando il corollario 3.3, i).

Sia dunque  $(\bar{q}, \bar{z}) \in I$  con  $\bar{q} > m$  e ammettiamo per assurdo che  $w_{\alpha z}(z, \alpha(z)) = \lambda > 0$ . Per i lemmi 3.3 e 3.6 si ha allora che  $w_{\alpha z}(x, y) \geq \lambda$  su  $D_z$ . Si ha allora utilizzando il corollario 3.2, che esiste un intorno  $V$  di  $(\bar{q}, \bar{z})$ , tale che  $\forall (q, z) \in V \cap Z$  si abbia  $w_{\alpha z}(x, y) > 0$  su  $D_z$  e dunque, con una semplice applicazione del principio del massimo, si ha  $w_{\alpha z}(x, y) \geq 0 \quad \forall (q, z) \in V \cap Z$ . Si ha allora che  $V \cap Z \subset T$  e dunque  $(\bar{q}, \bar{z}) \notin \partial T$  il che porta all'assurdo.

LEMMA 3.12.  $\forall (q, z) \in I$  si ha che:

$$(3.29) \quad \partial \Omega_{\alpha z} \cap (\overline{FG} \cup \widehat{GC}_z) = \emptyset ,$$

$$(3.30) \quad \partial \Omega_{\alpha z} \cap D \neq \emptyset ,$$

$$(3.31) \quad \partial \Omega_{\alpha z} \text{ non contiene tratti orizzontali o verticali.}$$

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che  $\partial \Omega_{\alpha z} \cap D$  non contiene tratti orizzontali. Si avrebbe su un tale tratto che  $w = 0$  e  $w_y = 0$ , dunque, per l'unicità del problema di Cauchy, per il fatto che su  $\Omega_{\alpha z}$  si ha che  $\Delta w_{\alpha z} = 1$  e per il fatto che  $\Omega_{\alpha z}$  è connesso (cfr. lemma 3.7), che  $w_{\alpha z}(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0)^2$  ( $y_0$  opportuno) e ciò è manifestamente assurdo.



Analogamente si verifica che  $\partial\Omega_{qz} \cap D$  non contiene tratti verticali.

In modo analogo si prova che  $\partial\Omega_{qz} \cap \overline{FG} = \emptyset$  (su  $\overline{FG}$  si ha che  $w_{qz} = 0$  e inoltre  $D_x w_{qz} = 0$  (cfr. lemma 3.5)).

Verifichiamo che  $\partial\Omega_{qz} \cap \widehat{GC}_z = \emptyset$ . Distinguiamo a tale scopo due casi: 1)  $z = n$ ; 2)  $z < n$ .

Nel caso 1)  $GC_z$  è un segmento orizzontale. L'asserto si dimostra allora con tecniche analoghe a quelle usate nella prima parte della dimostrazione.

Nel caso 2) si ha (cfr. i lemmi 3.3, 3.6, 3.11):

$$w_{qz}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D \text{ tali che } x > z, y > \alpha(z),$$

e dunque l'asserto.

d) Grazie ai lemmi 3.4 e 3.10, i) si vede che  $\forall (q, z) \in I - \{(m, m)\}$ ,  $\forall y \in ]0, \alpha(z)[$  si ha che

$$\{x: (x, y) \in \Omega_{qz}\} \neq \emptyset.$$

Ha dunque senso porre  $\forall z \in ]m, n]$  tale che  $\exists (q, z) \in I$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{qz}(y) &= \sup \{x: (x, y) \in \Omega_{qz}\}, \\ \varphi_{qz}(0) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi_{qz}(y), \\ \varphi_{qz}(\alpha(z)) &= \lim_{y \rightarrow \alpha(z)^-} \varphi_{qz}(y). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per i lemmi 3.4, 3.11 e 3.12 si ha che

$$(3.32) \quad \varphi_{qz}(\alpha(z)) = z.$$

Si ponga inoltre per definizione

$$(3.33) \quad \varphi_{mm}(y) = m \quad \forall y \in [0, \alpha(0)].$$

**TEOREMA 3.1.**  $\forall z \in [m, n]$ , tale che  $\exists (q, z) \in I$ ,  $\varphi_{qz}$  verifica la (1.3) e l'insieme  $\Omega_{qz}$  verifica la (1.4) (con  $a = z$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** La continuità di  $\varphi_{qz}$  è conseguenza dei lemmi 3.7 e 3.12. Tali lemmi implicano anche la monotonia stretta. La relazione  $\varphi_{qz}(\alpha(z)) = z$  è già stata dimostrata (cfr. la (3.32)).

Si ha inoltre che  $\Omega_{qz}$  soddisfa la (1.4) grazie al fatto che  $w_{qz}$  (con  $(q, z) \in I$ ) verifica le proprietà di monotonia enunciate nei lemmi 3.3 e 3.6.

Si ponga  $\forall z \in [m, n]$ , tale che  $\exists (q, z) \in I$ :

$$\begin{aligned} u_{qz} &= y - (w_{qz})_y|_{\Omega_{qz}}, \\ v_{qz} &= - (w_{qz})_x|_{\Omega_{qz}}. \end{aligned}$$

Tenendo presente i teoremi 2.1 e 3.1 è allora una semplice verifica il seguente:

**TEOREMA 3.2.**  $\forall z \in [m, n]$  tale che  $\exists (q, z) \in I$ ,  $\{q_{qz}, \Omega_{qz}, u_{qz}, v_{qz}, q\}$  è una soluzione debole del problema del canale (quando nella definizione 1.1 si ponga  $a = z$ ).

A tale punto per risolvere completamente il problema dell'esistenza della soluzione debole del problema del canale è solo necessario verificare che

$$(3.34) \quad \{z \in [m, n]: \exists (q, z) \in I\} = [m, n].$$

Ciò equivale a verificare che  $I$  (cfr. lemma 3.10) è il sostegno di una curva con un estremo appartenente a  $\overline{RS}$  (cfr. Fig. 3.1).

Osserviamo che  $\forall z \in [m, n]$ , tale che  $\exists (q, z) \in I$  si ha (cfr. teorema 3.2 e i lemmi 1.5 e 1.6):

$$(3.35) \quad q \leq k(z).$$

Tenendo presente che  $k(z)$  è una funzione continua strettamente crescente tale che  $k(m) = m$ , si ha allora che l'insieme  $I$  è contenuto nel sottografico di  $k(z)$  e quindi l'insieme  $I$  deve « toccare »  $\overline{RS}$ . Abbiamo così completamente dimostrato il teorema seguente:

**TEOREMA 3.3.** *Sotto l'ipotesi (1.2) il problema del canale ammette almeno una soluzione debole.*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIREMBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623-927.
- [2] C. BAIOCCHI, *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. di Mat. pura e appl. (1972), 107-127; C.R. Acad. Sc. Paris, **273** (1971), 1215-1217.

- [3] C. BAIOCCHI, *Sur quelques problèmes à frontière libre*, Atti Colloque Int. sur les équations aux dérivées partielles, Orsay, settembre 1972.
- [4] C. BAIOCCHI - V. COMINCIOLI - L. GUERRI - G. VOLPI, *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: numerical approach*, Calcolo, **10** (1973), 1-86.
- [5] C. BAIOCCHI - V. COMINCIOLI - E. MAGENES - G. A. POZZI, *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media, existence and uniqueness theorems*, Ann. di Mat. pura e appl. **96** (1973), 1-82.
- [6] C. BAIOCCHI - E. MAGENES, *Problemi di frontiera libera in idraulica*, Atti del convegno Internazionale sul tema «Metodi valutativi nella Fisica Matematica», 15-20 dicembre 1972, Accademia Nazionale dei Lincei.
- [7] J. BEAR, *Dinamic of fluids in porous media*, Amer. Elsevier (1972).
- [8] M. CHICCO, *Principio di massimo per sottosoluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. U.M.I., (4), **3** (1970), 384-394.
- [9] V. COMINCIOLI, *A theoretical and numerical approach to some free boundary problems*, in corso di stampa su: Ann. di Mat. pura e appl.
- [10] P. GRISVARD, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre*, Boll. U.M.I., (4), **5** (1972), 132-164.
- [11] M. E. HARR, *Groundwater and seepage*, New York, McGraw-Hill, 1962.
- [12] R. W. JEPSON, *Seepage from channels through layered porous mediums*, Water Resources Research, **4**, no. 2 (1968), 435-445.
- [13] R. W. JEPSON, *Free-surface flow through heterogeneous porous media*, Journal of the Hydraulics Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers, **95** (January 1969), 364-381.
- [14] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de resolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.
- [15] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vol. I, Grundlehren B. 181, Springer, 1972.
- [16] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1968.
- [17] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Proc. Nato, Venezia (1968), 101-192.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 novembre 1973.