Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Angelo Favini

Sulle equazioni differenziali astratte degeneri

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 52 (1974), p. 243-263

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__243_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Sulle equazioni differenziali astratte degeneri.

ANGELO FAVINI (*)

SUMMARY - This paper is concerned with existence and uniqueness of a « strong » solution for the equation

$$Bx'(t) = -Ax(t) + f(t)\,, \qquad t \in]0, T]\,,$$

in a Banach space X, satisfying the initial condition

$$\lim_{t\to 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0\,, \qquad x_0 \in Y\,,$$

where Y is a Banach space, in general different from X. Here A is a linear closed operator, B a bounded operator from Y to X.

The results allow to handle degenerate Cauchy problems for some partial differential equations.

Introduzione.

In questa nota considero il problema astratto di stabilire esistenza ed unicità di una soluzione « stretta » dell'equazione

$$Bx'(t) = -Ax(t) + f(t)\,, \qquad t \in]0, T]\,,$$

in uno spazio di Banach complesso X soddisfacente la condizione iniziale

$$\lim_{t\to 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0\,, \qquad x_0 \in Y\,,$$

essendo Y uno spazio di Banach, in generale diverso da X.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

Qui A è un operatore lineare chiuso da Y a X, B è un operatore limitato da Y a X, $f\colon [0, T] \to X$ è una funzione continua e $x_0 \in Y$.

Trovo che, sotto opportune condizioni sul «risolvente» $(\lambda B + A)^{-1}$, tale soluzione è esprimibile nella forma

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp[\lambda t](\lambda B + A)^{-1} B x_0 \, d\lambda + \int_0^t V(t, s) f(s) \, ds ,$$

dove

$$V(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp[\lambda(t - s)](\lambda B + A)^{-1} \, d\lambda \qquad (\in L(X, Y)) .$$

La motivazione di questa trattazione astratta è offerta dalla possibilità di risolvere problemi di Cauchy degeneri del tipo

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t} = - A(x, D) u(t), x) + g(t, x) , & t \in]0, T] , \ x \in \Omega , \\ u(t, x)|_\Gamma = 0 \qquad \forall t \in]0, T] , & \\ \lim\limits_{t \to 0+} u(t, x) = u_0(x) , \qquad x \in \Omega . & \end{cases}$$

dove $\alpha(x)$ è una funzione $\geqslant 0$ su $\bar{\Omega}$ che si annulla su parte della frontiera Γ di Ω o su un sottoinsieme di misura nulla di Ω.

Tali problemi furono oggetto di un precedente lavoro (cfr. [1]). La differenza tra la prima elaborazione e la presente sta nel considerare A e B come operanti in spazi distinti.

Ciò permette, fra l'altro, di indebolire le assunzioni sulla regolarità dei dati.

LEMMA 1. *Siano X, Y spazi di Banach complessi immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico separato $\mathcal{E}$.*

Siano poi A un operatore lineare chiuso da Y a X con dominio D_A denso in Y, B un operatore limitato da Y a X. Sia

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbf{C} | (\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)\} .$$

Allora per ogni $m \in \mathbf{N}$ riesce

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} (\lambda B + A)^{-1} = (-1)^m m! (\lambda B + A)^{-1} [B(\lambda B + A)^{-1}]^m , \qquad (\text{cfr. [1]})$$

DIMOSTRAZIONE. Σ è aperto. Sia infatti $\lambda_0 \in \Sigma$. Allora

$$\lambda B + A = \big(1 - (\lambda_0 - \lambda) B(\lambda_0 B + A)^{-1}\big)(\lambda_0 B + A) .$$

$\big($Si noti che $B(\lambda_0 B + A)^{-1} \in L(X, X)\big)$. Quindi, se

$$|\lambda_0 - \lambda| \|B(\lambda_0 B + A)^{-1}\|_{X \to X} < 1 ,$$

riesce $(\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)$ e $(\lambda B + A)^{-1} = (\lambda_0 B + A)^{-1}(1 - (\lambda_0 - \lambda) \cdot$
$\cdot B(\lambda_0 B + A)^{-1})^{-1}$.

Vale

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \lambda_0)^{-1}[(\lambda B + A)^{-1} - (\lambda_0 B + A)^{-1}] = \\
&\quad = (\lambda - \lambda_0)^{-1}(\lambda B + A)^{-1}[(\lambda_0 - \lambda) B(\lambda_0 B + A)^{-1}] = \\
&\quad = -(\lambda B + A)^{-1} B(\lambda_0 B + A)^{-1} \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} -(\lambda_0 B + A)^{-1}[B(\lambda_0 B + A)^{-1}] .
\end{aligned}$$

e quindi l'affermazione è vera per $m = 1$.

Supposta la uguaglianza vera per $m = k$, dimostriamola per $m = k + 1$. A questo scopo mostriamo che per ogni $k \in \boldsymbol{N}$ risulta

$$\frac{d}{d\lambda}[B(\lambda B + A)^{-1}]^k_{\lambda = \lambda_0} = -k[B(\lambda_0 B + \ )^{-1}]^{k+1} .$$

Per $k = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \lambda_0)^{-1}[B(\lambda B + A)^{-1} - B(\lambda_0 B + A)^{-1}] = \\
&\quad = B(\lambda - \lambda_0)^{-1}[(\lambda B + A)^{-1} - (\lambda_0 B + A)^{-1}] \xrightarrow[\lambda \leftarrow \lambda_0]{} -B(\lambda_0 B + A)^{-1} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot B(\lambda_0 B + A)^{-1} = -[B(\lambda_0 B + A)^{-1}]^2 .
\end{aligned}$$

Supponiamo ora $(d/d\lambda)[B(\lambda B + A)^{-1}]^{n-1} = -(n-1)[B(\lambda B + A)^{-1}]^n$. Si ha

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \lambda_0)^{-1}\big[\big(B(\lambda B + A)^{-1}\big)^n - \big(B(\lambda_0 B + A)^{-1}\big)^n\big] = \\
&= (\lambda - \lambda_0)^{-1}\big[\big(B(\lambda B + A)^{-1}\big(B(\lambda B + A)^{-1}\big)^{n-1} - \\
&- \big(B(\lambda_0 B + A)^{-1}\big)\big(B(\lambda B + A)^{-1}\big)^{n-1} + \big(B(\lambda_0 B + A)^{-1}\big) \cdot \\
&\cdot \big(B(\lambda B + A)^{-1}\big)^{n-1} - \big(B(\lambda_0 B + A)^{-1}\big)\big(B(\lambda_0 B + A)^{-1}\big)^{n-1}\big] =
\end{aligned}$$

$$= (\lambda-\lambda_0)^{-1}\big([B(\lambda B+A)^{-1}-B(\lambda_0 B+A)^{-1}](B(\lambda B+A)^{-1})^{n-1}\big)+$$
$$+B(\lambda_0 B+A)^{-1}(\lambda-\lambda_0)^{-1}\big[(B(\lambda B+A)^{-1})^{n-1}-(B(\lambda_0 B+A)^{-1})^{n-1}\big] \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{}$$
$$\xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} -[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^2[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^{n-1}-B(\lambda_0 B+A)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\big[(n-1)[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^n\big]=-n[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^{n+1}.$$

Vale allora

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1}\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda B+A)^{-1}-\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda_0 B+A)^{-1}\right]=$$
$$=(-1)^k k!(\lambda-\lambda_0)^{-1}\{(\lambda B+A)^{-1}[B(\lambda B+A)^{-1}]^k-$$
$$-(\lambda_0 B+A)^{-1}[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^k\}=$$
$$=(-1)^k k!(\lambda-\lambda_0)^{-1}\{(\lambda B+A)^{-1}[B(\lambda B+A)^{-1}]^k-$$
$$-(\lambda_0 B+A)^{-1}[B(\lambda B+A)^{-1}]^k+(\lambda_0 B+A)^{-1}[B(\lambda B+A)^{-1}]^k-$$
$$-(\lambda_0 B+A)^{-1}[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^k\}=$$
$$=(-1)^k k!\{(\lambda-\lambda_0)^{-1}((\lambda B+A)^{-1}-(\lambda_0 B+A)^{-1})[B(\lambda B+A)^{-1}]^k+$$
$$+(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\lambda_0 B+A)^{-1}([B(\lambda B+A)^{-1}]^k-[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^k\} \xrightarrow[\lambda\leftarrow\lambda_0]{}$$
$$\xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{}(-1)^k k!\big[-(\lambda_0 B+A)^{-1}B(\lambda_0 B+A)^{-1}[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^k+$$
$$+(\lambda_0 B+A)^{-1}[-k[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^{k+1}]\big]=$$
$$=(-1)^k k!\{-(\lambda_0 B+A)^{-1}([B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^{k+1}+k[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^{k+1})\}=$$
$$=(-1)^{k+1}(k+1)!(\lambda_0 B+A)^{-1}[B(\lambda_0 B+A)^{-1}]^{k+1}.$$

Di qui l'affermazione.

DEFINIZIONE 1. *Valgano le ipotesi del Lemma* 1 *relativamente agli operatori A e B. Sia inoltre $f(t)$, $t\in[0,T]$, una funzione continua da $[0,T]$ a X. Diciamo che $x:[0,T]\to Y$ è una soluzione «stretta» del problema*

$$(1)\qquad \begin{cases} Bx'(t)=-Ax(t)+f(t)\,, & t\in\,]0,T]\,,\\ \lim\limits_{t\to 0+}\|x(t)-x_0\|_Y=0\,, & x_0\in Y\,,\end{cases}$$

se $x(t)$ è fortemente continua da $[0,T]$ a Y, fortemente differenziabile da $]0,T]$ a Y, $x(t)\in D_A$ $\forall t\in\,]0,T]$, e vale (1).

LEMMA 2. *Valgano le ipotesi del Lemma* 1 *su* A *e* B; *inoltre, esista* $(\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)$ $\forall \lambda \in \boldsymbol{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$, *con*

$$\|(\lambda B + A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha .$$

Allora esiste $(\lambda B + A)^{-1} \in L(X, Y)$ *per ogni* λ *in un dominio* Σ_q *del piano complesso situato alla destra della curva* Γ_q, $q \in]0, 1[$, *di equazione* $\operatorname{Re}\lambda = \alpha - (q/M\|B\|_{Y\to X})(1 + |\operatorname{Im}\lambda|)$ *e*

$$\|((\sigma + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant M_q(1 + |\tau|)^{-1}, \qquad \sigma + i\tau \in \Sigma_q .$$

(cfr. [4], p. 67).

DIMOSTRAZIONE. Sia $\operatorname{Re}\lambda = \sigma$, $\operatorname{Im}\lambda = \tau$. Se x è un elemento arbitrario di X e

(2) $$|\sigma - \alpha| < q(1 + |\tau|)(\|B\|_{Y\to X} M)^{-1}, \qquad q \in]0, 1[,$$

allora

$$((\sigma + i\tau)B + A)^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \alpha)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n}((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sigma - \alpha)^n ((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}[B((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}]^n x .$$

Infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha|^n \, \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X\to Y} \, \|[B((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}]^n x\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|_{X\to Y} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha| \, \|B\|^n_{Y\to X} \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|^n_{X\to Y} \, \|x\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{1 + |\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha|^n \, \|B\|^n_{Y\to X} \|((\alpha + i\tau)B + A)^{-1}\|^n_{X\to Y} \, \|x\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{1 + |\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma - \alpha|^n \, \|B\|^n_{Y\to X} \frac{M^n}{(1 + |\tau|)^n} \, \|x\|_X ,$$

che è convergente se vale la (2).

Ne segue che

$$\|((\sigma + i\tau)B + A)^{-1}x\|_Y \leqslant \frac{Mq}{1 + |\tau|} \, \|x\|_X .$$

Teorema 1. *Valgano le ipotesi del Lemma 2. Allora, per ogni* $x_0 \in Y$, *il problema*

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
Bx'(t) = -Ax(t)\,, & t \in]0, T[\,, \\
\lim\limits_{t \to 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0\,, &
\end{array}
\right. \tag{3}
$$

ha una soluzione stretta.

Dimostrazione. Osserviamo che si può senz'altro supporre $\alpha - (q/M\|B\|_{Y \to X}) > 0$, in modo che l'origine sia situata alla sinistra della curva Γ_q.

In forza del Lemma 2 (cfr. [1]),

$$
x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} (\lambda B + A)^{-1} B x_0 \, d\lambda\,, \qquad t > 0\,,
$$

ha senso in Y e, per la configurazione di Γ_q insieme alla maggiorazione ottenuta nel precedente Lemma, riesce

$$
\begin{aligned}
Bx'(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} \lambda B (\lambda B + A)^{-1} B x_0 \, d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} B x_0 \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} A (\lambda B + A)^{-1} B x_0 \, d\lambda = -Ax(t)\,, \qquad t > 0\,.
\end{aligned}
$$

Dimostriamo che $\|x(t) - x_0\|_Y \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$, (cfr. [3]).

Poniamo $\lambda t = \xi$. Allora

$$
x(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{\gamma_q} e^{\xi} \left(\frac{\xi}{t} B + A\right)^{-1} B x_0 \, d\xi\,,
$$

dove γ_q si può supporre indipendente da t ed ha la stessa configurazione di Γ_q. Se supponiamo $x_0 \in D_A$, poichè

$$
x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_q} \frac{e^{\xi}}{\xi} x_0 \, d\xi\,,
$$

risulta

$$x(t)-x_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\frac{e^\xi}{\xi}\left[\frac{\xi}{t}\left(\frac{\xi}{t}B+A\right)^{-1}Bx_0-x_0\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\frac{e^\xi}{\xi}\left[\left(\frac{\xi}{t}B+A\right)^{-1}\left(\frac{\xi}{t}B+A-A\right)x_0-x_0\right]d\xi=$$

$$=-\frac{t}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\frac{e^\xi}{\xi}(\xi B+tA)^{-1}Ax_0\,d\xi\,.$$

D'altra parte, su Γ_a, $1/(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\leqslant C/|\lambda|$. Infatti, se $\gamma=q/(M\|B\|_{Y\to X})$,

$$\frac{|\lambda|}{1+|\operatorname{Im}\lambda|}=\frac{\left(\alpha^2+\gamma^2(1+|\tau|)^2-2\alpha\gamma(1+|\tau|)+|\tau|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1+|\tau|}\leqslant C\,.$$

Quindi,

$$\|(\xi B+tA)^{-1}\|_{X\to Y}=\frac{1}{t}\left\|\left(\frac{\xi}{t}B+A\right)^{-1}\right\|_{X\to Y}\leqslant\frac{1}{t}C_1\left|\frac{\xi}{t}\right|^{-1}=\frac{C_1}{|\xi|}$$

Pertanto,

$$\|x(t)-x_0\|_Y\leqslant M_1t\int_{\gamma_a}\frac{|e^\xi|}{|\xi|^2}|d\xi|\,\|Ax_0\|_X\,.$$

Poiché l'ultimo integrale converge, $\lim\limits_{t\to0+}\|x(t)-x_0\|_Y=0$.

Per la densità di D_A in Y, l'affermazione è, con ciò, completamente dimostrata.

Nella stessa maniera in cui fu provato il Teorema 2 in [1], si prova il seguente risultato di unicità.

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi del Teorema* 1, *la soluzione stretta del problema* (3) *è unica.*

TEOREMA 3. *Sia $g(t)$ una funzione da $[0, T]$ a Y derivabile con continuità e sia $f(t)=Bg(t)$.*

Allora, nelle ipotesi del Teorema 1, *il problema non-omogeneo* (1) *ha una* (*ed una sola*) *soluzione stretta. Precisamente, posto*

$$V(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda B+A)^{-1}d\lambda\qquad(\in L(X,Y))$$

dove $\Gamma = \Gamma_q$, $q \in]0,1[$ (*cfr. Teorema* 1), *tale soluzione è esprimibile nella forma*

$$x(t) = V(t)Bx_0 + \int_0^t V(t-s)\, f(s)\, ds\,.$$

DIMOSTRAZIONE. In forza del Teorema 1, basta mostrare che

$$y(t) = \int_0^t V(t-s)\, f(s)\, ds$$

è derivabile con continuità su $]0, T]$, soddisfa

$$By'(t) = -Ay(t) + f(t)\,, \qquad t \in]0, T]$$

e $\lim_{t\to 0+} \|y(t)\|_Y = 0$.

Ora, poichè

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_\gamma e^\xi \left(\frac{\xi}{t} B + A\right)^{-1} d\xi\,,$$

dalla maggiorazione $\|((\xi/t)B + A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant (M/|\xi|)t$ segue

$$\|V(t)\|_{X\to Y} \leqslant M'\,, \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Quindi,

$$\|y(t)\|_Y \leqslant \int_0^t \|V(t-s)\|_{X\to Y}\, \|f(s)\|_X\, ds \leqslant M' \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|f(s)\|_X\, t \xrightarrow[t\to 0+]{} 0\,.$$

Mostriamo che in X

$$\lim_{t\to 0+} BV(t)\, f(s) = f(s)\,.$$

Ciò ci tornerà utile nel seguito della prova. Si ha

$$V(t)\, f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda B + A)^{-1} B g(s)\, d\lambda$$

e allora, dalla dimostrazione del Teorema 1, possiamo senz'altro dedurre che

$$\| V(t) f(s) - g(s) \|_Y \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 .$$

Pertanto

$$\| BV(t) f(s) - Bg(s) \|_X = \| BV(t) f(s) - f(s) \|_X \leqslant$$
$$\leqslant \| B \|_{Y\to X} \| V(t) f(s) - g(s) \|_Y \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 .$$

Si può quindi supporre che $BV(0) f(t) = f(t)$.

Per dimostrare la parte restante dell'affermazione procediamo come in [3], pp. 486-487.

In virtù dell'ipotesi su g, risulta

$$y(t) = \int_0^t V(t-s) f(0)\, ds + \int_0^t \Big[\int_r^t V(t-s) Bg'(r)\, ds \Big] dr .$$

D'altra parte,

$$A \int_r^t V(s) Bg(u)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_r^t \Big(\int_\Gamma e^{\lambda s} A(\lambda B + A)^{-1} Bg(u)\, d\lambda \Big) ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_r^t \Big(\int_\Gamma e^{\lambda s} Bg(u)\, d\lambda \Big) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_r^t \Big(\int_\Gamma e^{\lambda s} \lambda B(\lambda B + A)^{-1} Bg(u)\, d\lambda \Big) ds =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} B \Big(\int_r^t \Big(\int_\Gamma \lambda e^{\lambda s} (\lambda B + A)^{-1} Bg(u)\, d\lambda \Big) ds \Big) = -B \int_r^t V'(s) Bg(u)\, ds =$$
$$= B[V(r) - V(t)] f(u) , \qquad 0 \leqslant r \leqslant t .$$

Si noti che anche $BV(0) f(u)$, per quello che si è visto sopra, risulta ben definito. Così

$$A \int_r^t V(t-s) f(u)\, ds = A \int_0^{t-r} V(r) f(u)\, d\eta =$$
$$= B[V(0) - V(t-r)] f(u) = f(u) - BV(t-r) f(u) .$$

Ne segue che

$$Ay(t)=\int_0^t AV(t-s)f(0)\,ds+\int_0^t\Big(\int_r^t AV(t-s)f'(r)\,ds\Big)\,dr=$$

$$=f(0)-BV(t)f(0)+\int_0^t[f'(r)-BV(t-r)f'(r)]\,dr=$$

$$=f(0)-BV(t)f(0)+f(t)-f(0)-B\int_0^t V(t-r)f'(r)\,dr=$$

$$=f(t)-BV(t)f(0)-B\int_0^t V(t-r)f'(r)\,dr\,.$$

D'altra parte, poichè $y(t)=\int_0^t V(s)f(t-s)\,ds$, si ha

$$h^{-1}[y(t+h)-y(t)]=$$

$$=\int_0^t V(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\,ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}V(s)f(t+h-s)\,ds=$$

$$=\int_0^t V(s)\big([f(t+h-s)-f(t-s)]/h\big)\,ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}V(s)Bg(t+h-s)\,ds=$$

$$=\int_0^t V(s)\big([f(t+h-s)-f(t-s)]/h\big)\,ds+\frac{1}{h}\int_0^h V(t+s)Bg(h-s)\,ds\,.$$

Ora, si riconosce facilmente che

$$V(t+s)Bg(u)=V(t)BV(s)Bg(u)\,;$$

(la prova è analoga a quella che, per un semigruppo olomorfo $U(t)$ riesce $U(t+s)=U(t)\,U(s)$). Quindi,

$$\int_0^h V(t+s)Bg(h-s)\,ds=V(t)B\int_0^h V(s)Bg(h-s)\,ds\,.$$

Segue che

$$\lim_{h\to 0+} [y(t+h) - y(t)]/h =$$

$$= \int_0^t V(s) f'(t-s)\, ds + V(t) B g(0) = \int_0^t V(t-s) f'(s)\, ds + V(t) f(0) .$$

Così

$$By'(t) = BV(t) f(0) + \int_0^t BV(t-s) f'(s)\, ds = -Ay(t) + f(t) , \qquad t \in]0, T] .$$

Ciò prova l'affermazione.

COROLLARIO. *Valgano le ipotesi precedenti sull'operatore* A. *Inoltre*, B *sia un isomorfismo da* Y *a* X. *Se* $f\colon [0, T] \to X$ *è derivabile con derivata continua e* $x_0 \in Y$, *allora esiste una ed una sola soluzione stretta del problema* (1).

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza immediata del Teorema 3, riuscendo $f(t) = Bg(t)$, $g(t) = B^{-1} f(t)$.

Il precedente Corollario ammette, però, una generalizzazione, nel senso che esso resta valido sotto ipotesi meno restrittive su f. Infatti,

TEOREMA 4. *Valgono le ipotesi del Teorema* 1 *su* A *e* B *sia un isomorfismo da* Y *a* X. *Se* $f\colon [0, T] \to X$ *è hölderiana, cioè risulta*

$$\|f(t) - f(\tau)\|_X \leqslant C|t-\tau|^\alpha , \qquad 0 < \alpha \leqslant 1 ,$$

allora il problema (1) *ha una e una sola soluzione stretta.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo B un isomorfismo, se $x = x(t)$ soddisfa

$$Bx'(t) = -Ax(t) + f(t) , \qquad t \in]0, T] ,$$

allora

$$x'(t) = -B^{-1}Ax(t) + B^{-1}f(t) , \qquad t \in]0, T] ,$$

ed inversamente. Notiamo che

$$t \to B^{-1} f(t) , \qquad t \in [0, T] ,$$

riesce anch'essa hölderiana in Y.

D'altronde, sempre per l'ipotesi su B, se $\lambda \in \Sigma_a$, risulta $(\lambda B + A)^{-1}B$: $Y \to Y$ l'operatore inverso dell'operatore $\lambda + B^{-1}A$.

Poichè inoltre .

$$\|(\lambda B + A)^{-1}\|_{X\to Y} \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha,$$

vale

$$\|(\lambda + B^{-1}A)^{-1}\|_{Y\to Y} \leqslant \|(\lambda B + A)^{-1}\|_{X\to Y}\|B\|_{Y\to X} \leqslant C'(1 + |\lambda|)^{-1}, \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha .$$

La teoria dei semigruppi olomorfi è quindi applicabile alla risoluzione del problema

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} x'(t) = -B^{-1}Ax(t) + B^{-1}f(t), & t \in]0, T], \\ \lim\limits_{t\to 0+} \|x(t) - x_0\|_Y = 0 . \end{cases}$$

È noto, infatti, che (4) ha una unica soluzione stretta.

Di qui scende la nostra affermazione.

Applicazioni.

Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ con frontiera Γ che supponiamo, per semplicità, di classe C^∞. Sia poi $A(x, D)$ l'operatore differenziale tale che

$$A(x, D)u(x) = -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \\ + a(x)u(x), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega ,$$

dove a, a_i, $i = 1, \dots, n$, sono funzioni continue da $\bar{\Omega}$ a $\boldsymbol{C}$ e le a_{ik} sono elementi di $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ con $a_{ik}(x) = \bar{a}_{ik}(x)$ e $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\gamma_i\bar{\gamma}_k \geqslant \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} |\gamma_i|^2$ per ogni $\gamma_1, \dots, k_u$ e una costante $\alpha > 0$ indipendente da $x \in \bar{\Omega}$.

Supponiamo inoltre che valga $\operatorname{Re} a(x) \geqslant a_0 > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, (cfr. [5]).

Con $\alpha(x)$ denotiamo una funzione continua su $\bar{\Omega}$, non-negativa, tale che $\alpha(x) = 0$ $\forall x \in \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ mentre $\alpha(x) > 0$ $\forall x \in \Omega$.

Ci proponiamo di risolvere la questione della esistenza ed unicità di una soluzione (in un senso che verrà sotto precisato) del problema differenziale

$$
(5)\qquad \begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -A(x,D)u(t,x) + g(t,x)\,, & x\in\Omega\,,\ t\in\,]0,T]\,,\\ u(t,x)|_\Gamma = 0\,, \quad \forall t\in\,]0,T]\,, & \\ \lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = u_0(x)\,, \quad x\in\Omega\,. & \end{cases}
$$

Precisiamo gli spazi funzionali in cui considereremo tale problema.

Con $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ denotiamo lo spazio di Banach delle funzioni $u\colon \Omega\to \boldsymbol{C}$, misurabili, per le quali la norma

$$
\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} = \Big(\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx\Big)^{\frac12}
$$

risulta finita.

È chiaro che lo spazio $L^2(\Omega)$ delle funzioni di quadrato sommabili su Ω risulta immerso nello spazio $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$, essendo

$$
\|u\|^2_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} = \int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx \leqslant C\int_\Omega |u(x)|^2\,dx = C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
$$

Inoltre, riesce anche $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$; infatti, $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)$ è il duale forte di $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ e quindi, per l'identificazione di $L^2(\Omega)$ col suo antiduale, possiamo dedurre che $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow$ $\hookrightarrow L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$.

Notiamo che le immersioni sono dense, poichè $\mathfrak{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ è denso in questi spazi.

Definiamo l'operatore A nel modo seguente:

$$
D_A = \{u\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)|\ Au\in L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)\}\,,
$$

$$
(Au)(x) = A(x,D)\,u(x)\,.
$$

D_A è denso in $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$, essendo $\mathfrak{D}(\Omega)\subset D_A$.

Se poniamo $v(t,x) = \exp[-\delta t]u(t,x)$, il problema connesso con l'equazione

$$
\alpha(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -A(x,D)u(t,x) + g(t,x)\,,\qquad t\in\,]0,T]\,,\ x\in\Omega\,,
$$

viene mutato nel problema

$$\alpha(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = -\big(A(x,D)+\delta\alpha(x)\big)v(t,x)+g(t,x)\,, \qquad t\in\,]0,T]\,,\ x\in\Omega\,,$$

restando ferme le condizioni iniziale ed ai limiti. Supponiamo $\delta > 0$.

Poniamo poi $A_1(x,D) = A(x,D) + \delta\alpha(x)$.

Per provare la disuguaglianza successiva procediamo seguendo Sobolevskii (cfr. [5], pp. 55-56). Poniamo

$$f(x) = \big(A_1(x,D)+\lambda\alpha(x)\big)u(x)\,, \qquad x\in\Omega\,,$$

e notiamo che $u\in D_A \Rightarrow f\in L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)$.

Moltiplicando entrambi i membri della uguaglianza precedente per $\bar{u}(x)$, otteniamo

$$\lambda\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx - \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_k}\bar{u}(x)\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\bar{u}(x)\,dx +$$
$$+\int_\Omega a(x)|u(x)|^2\,dx + \delta\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx = \int_\Omega f(x)\bar{u}(x)\,dx\,.$$

Ora, per ipotesi, $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ e quindi, integrando per parti,

$$-\int_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_k}\bar{u}(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_x}\cdot\frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial x_i}\,dx +$$
$$+\int_\Omega \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\bar{u}(x)\,dx\,.$$

Per la disuguaglianza di Schwarz si ha (cfr. [5], p. 55):

$$\left|\int_\Omega \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\bar{u}(x)\,dx\right| + \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\bar{u}(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\,,$$

dove ε è un numero positivo arbitrario. Segue che, se $\operatorname{Re}\lambda > 0$,

$$(\operatorname{Re}\lambda + \delta)\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx + \operatorname{Re}\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{u} a_{ik}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,\frac{\partial \overline{u}(x)}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \operatorname{Re}\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{u} \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,\overline{u}(x)\,dx + \operatorname{Re}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\overline{u}(x)\,dx +$$

$$+ \operatorname{Re}\int_\Omega a(x)|u(x)|^2\,dx = \operatorname{Re}\int_\Omega f(x)\,\overline{u}(x)\,dx \geqslant (\operatorname{Re}\lambda + \delta)\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx +$$

$$+ a_0\int_\Omega |u(x)|^2\,dx + \alpha\int_\Omega \sum_{i=1}^{u}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega \sum_{i=1}^{u}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx - \frac{C}{\varepsilon}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx =$$

$$= (\operatorname{Re}\lambda + \delta)\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx + \left(a_0 - \frac{C}{\varepsilon}\right)\int_\Omega |u(x)|^2\,dx + (\alpha - \varepsilon)\int_\Omega \sum_{i=1}^{u}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx.$$

Scegliamo ε tale che sia $0 < \varepsilon < \alpha$ e supponiamo $a_0 > C/\varepsilon$. Si può allora dedurre

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(a_0 - \frac{C}{\varepsilon}\right)^{-1} \operatorname{Re}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx\,,$$

$$\sum_{i=1}^{u}\int_\Omega \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx \leqslant (\alpha - \varepsilon)^{-1}\operatorname{Re}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx\,.$$

Poi, da

$$(\operatorname{Im}\lambda)\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx = \operatorname{Im}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx - \operatorname{Im}\int_\Omega a(x)|u(x)|^2\,dx -$$

$$- \operatorname{Im}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\overline{u}(x)\,dx - \operatorname{Im}\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,\frac{\partial \overline{u}(x)}{\partial x_i}\,dx -$$

$$- \operatorname{Im}\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,\overline{u}(x)\,dx$$

deduciamo

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|\int_\Omega \alpha(x)|u(x)|^2\,dx \leqslant \left(C_1+\frac{C}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left|\mathrm{Im}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx\right| +$$

$$+\,\varepsilon\int_\Omega\sum_{i=1}^{u}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx \leqslant \left(C_1+\frac{C}{\varepsilon}\right)\left(a_0-\frac{C}{\varepsilon}\right)^{-1}\mathrm{Re}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx +$$

$$+\left|\mathrm{Im}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx\right| + \varepsilon(\alpha-\varepsilon)^{-1}\,\mathrm{Re}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx\,.$$

Poiché

$$\left|\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)}\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)}\,,$$

otteniamo

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|\;\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant C_\varepsilon\|f\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)}\,.$$

Analogamente, poichè

$$(\mathrm{Re}\,\lambda+\delta)\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant \mathrm{Re}\int_\Omega f(x)\overline{u}(x)\,dx \leqslant \|f\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)}\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)}\,,$$

riesce

$$(\mathrm{Re}\,\lambda+\delta)\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)}$$

e quindi

$$(*)\qquad \|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}\|(\lambda B+A_1)u\|_{(L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)}\,,$$

$$\forall u\in D_A\,,\ \forall\lambda\in \boldsymbol{C}\,,\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\,.$$

B è, ben inteso, l'operatore limitato da $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)$ definito da

$$(Bu)(x)=\alpha(x)\,u(x)\,.$$

Si noti che B è addirittura un isomorfismo da $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)$.

In effetti, da

$$\|Bu\|^2_{L^2(1/\sqrt{\alpha},\Omega)}=\int_\Omega \alpha(x)^{-1}|\alpha(x)\,u(x)|^2\,dx=\|u\|^2_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)}$$

segue $Bu = 0 \Rightarrow u = 0$; così B è $1-1$. Infine, se $f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$, $v = f/\alpha$ appartiene a $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega \left(\int_\Omega \alpha(x)|v(x)|^2\, dx = \|f\|^2_{L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)} \right)$ e $f = Bv$.

Sia $\tilde{a} = a + \delta\alpha$. Poichè

$$\big(\lambda B + A_1(x, D)\big) u(x) = -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \\ + \tilde{a}(x)\, u(x) + \lambda\alpha(x)\, u(x)\,,$$

e

$$\operatorname{Re}\big(\tilde{a}(x) + \lambda\alpha(x)\big) = \operatorname{Re}\tilde{a}(x) + (\operatorname{Re}\lambda)\,\alpha(x) \geqslant \operatorname{Re}\tilde{a}(x) \geqslant a_0 > 0\,,$$

l'operatore $\lambda B + A_1$, per $\operatorname{Re}\lambda > 0$, gode della seguente proprietà: data $f \in L^2(\Omega)$ esiste $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ tale che

$$\big(\lambda B + A_1(x, D)\big)\, u(x) = f(x)\,, \qquad \forall x \in \Omega\,,$$

(cfr. ancora [5]).

Se, di più, $f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, allora $A_1 u \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

In effetti, da

$$A_1(x, D)\, u(x) = f(x) - \lambda\alpha(x)\, u(x)$$

segue

$$|A_1(x, D)\, u(x)|^2 \leqslant |f(x)|^2 + |\lambda|^2 \alpha(x)^2 |u(x)|^2 + 2|\lambda|\,\alpha(x)\,|f(x)|\,|u(x)|$$

e, da una parte, per ipotesi, $\int_\Omega \alpha(x)^{-1} |f(x)|^2\, dx < +\infty$, dall'altra,

$$\int_\Omega \alpha(x)^{-1} |\alpha(x)\, u(x)|^2\, dx = \int_\Omega \alpha(x)\, |u(x)|^2\, dx \leqslant C \int_\Omega |u(x)|^2\, dx < +\infty\,,$$

essendo $u \in L^2(\Omega)$. Infine

$$\int_\Omega |f(x)|\,|u(x)|\, dx \leqslant \left(\int_\Omega \alpha(x)^{-1} |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \alpha(x)\, |u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Così, data $f \in L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$ esiste $u \in D_{A_1} = D_A$ tale che $(\lambda B + A_1) u = f$. Pertanto, da questo risultato e dalla (*) possiamo dedurre che l'operatore $\lambda B + A_1$ ha inverso limitato $(\lambda B + A_1)^{-1}\colon L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \underset{1-1}{\rightrightarrows} L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$, $\forall \lambda$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Ma allora anche $((\lambda B + A_1)^{-1})^{-1} = \lambda B + A_1$ è un operatore chiuso con $D_A = D_{\lambda B + A_1}$. (Si ricordi che $A\colon D_A \to X_1$ è chiuso se e solo se $A^{-1}\colon A(D_A) \to X$ è chiuso (cfr. [3], p. 165)).

Così $\lambda B + A_1$ è chiuso da $L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ a $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$. Poichè B è limitato e $A_1 = (\lambda B + A_1) - \lambda B$, anche A_1 è un operatore chiuso. Si è quindi mostrato che esiste $(\lambda B + A_1)^{-1}\colon L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \to L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ per ogni λ con $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ e

$$\|(\lambda B + A_1)^{-1}\|_{L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \to L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Veniamo ora a fare le ipotesi sul dato u_0 e sulla parte non omogenea $g(t, x)$ del problema in questione. Prima di tutto, supporremo $u_0 \in L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)$ e poi

$$\Big(\int_\Omega \alpha(x)^{-1} |g(t, x) - g(\tau, x)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C|t - \tau|^\alpha, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Allora il Teorema 4 porta a concludere che esiste una ed una sola soluzione stretta del problema (5), $\big(X = L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega),\ Y = L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)\big)$.

Quanto alla natura della soluzione trovata, possiamo dire che essa è, in particolare, soluzione debole di (5) nel senso di [2].

Infatti, poichè $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, l'equazione risulta soddisfatta anche nello spazio $L^2(\Omega)$ e quindi, se $A^*(x, D)$ denota l'aggiunto formale di $A(x, D)$, vale, per ogni « test-function » $\varphi(t, x)$ in Q^T (per le notazioni, cfr. [2], p. 417)

$$-\int_\Omega \alpha(x)\, u(0, x)\, \bar{\varphi}(0, x)\, dx - \int_\Omega \int_0^T \alpha(x)\, u(t, x)\, \frac{\partial \bar{\varphi}(t, x)}{\partial t}\, dt\, dx + \\ + \int_\Omega \int_0^T u(t, x)\, A^*(x, D)\, \bar{\varphi}(t, x)\, dt\, dx = \int_\Omega \int_0^T g(t, x)\, \bar{\varphi}(t, x)\, dt\, dx.$$

Poichè

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t) - u_0\|_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} = 0$$

e

$$\left|\int_\Omega \alpha(x)\, u(0, x)\bar{\varphi}(0,x)\, dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega \alpha(x)|u(0, x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \alpha(x)|\varphi(0, x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

possiamo senz'altro sostituire

$$\int_\Omega \alpha(x)\, u(0, x) w(0, x)\, dx \qquad \text{con} \qquad \int_\Omega \alpha(x)\, u_0(x) w(0, x)\, dx\,,$$

per ottenere che

$$-\int_\Omega \int_0^T \alpha(x)\, u(t, x)\, \frac{\partial \bar{\varphi}(t, x)}{\partial t}\, dt\, dx + \int_\Omega \int_0^T u(t, x) A^*(x, D)\bar{\varphi}(t, x)\, dt\, dx =$$

$$= \int_\Omega \int_0^T g(t, x)\bar{\varphi}(t, x)\, dt\, dx + \int_\Omega \alpha(x)\, u_0(x)\bar{\varphi}(0, x)\, dx\,.$$

Supponiamo ora che la funzione $\alpha\colon \bar{\Omega} \to \boldsymbol{R}$, $\alpha(x) \geqslant 0$, sia strettamente positiva su $\Omega_0 \subset \Omega$ e $\alpha(x) = 0$ $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$, dove Ω_0 è un aperto e $\Omega \setminus \Omega_0$ ha misura nulla.

Consideriamo ancora il problema (5). Poniamo

$$\beta(x) = \begin{cases} 1/\alpha(x)\,, & x \in \Omega_0\,, \\ 1\,, & x \in \Omega \setminus \Omega_0\,. \end{cases}$$

β è chiaramente misurabile. Possiamo allora considerare lo spazio $L^2(\sqrt{\beta}, \Omega)$, che, nelle considerazioni che seguono, prenderà il posto di $L^2(1/\sqrt{\alpha}, \Omega)$.

Procedendo come è stato fatto nel primo caso, risulta che, se $(\lambda B + A_1) u = f$, allora

$$(\operatorname{Re} \lambda + \delta) \|u\|^2_{L^2(\sqrt{\alpha}, \Omega)} \leqslant \operatorname{Re} \int_\Omega f(x)\, \bar{u}(x)\, dx\,,$$

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|\,\|u\|^2_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant C'\Big(\mathrm{Re}\int_\Omega f(x)\,\overline{u}(x)\,dx + \Big|\mathrm{Im}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}(x)\,dx\Big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C''\int_\Omega |f(x)||u(x)|\,dx \leqslant C''\Big(\int_{\Omega_0}\beta(x)|f(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\Omega_0}\alpha(x)|u(x)|^2\,dx\Big) =$$

$$= C''\|f\|^2_{L^2(\sqrt{\beta},\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)},$$

da cui

$$\|u\|_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)} \leqslant C(1+|\lambda|)^{-1}\|(\lambda B + A_1)u\|_{L^2(\sqrt{\beta},\Omega)}.$$

Poichè $L^2(\sqrt{\beta},\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ $\Big($in effetti,

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega_0} u(x)|^2\,dx = \int_{\Omega_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}\,|u(x)|^2\,dx \leqslant C_1\int_{\Omega_0}\alpha(x)^{-1}|u(x)|^2\,dx =$$

$$= C_1\int_\Omega \beta(x)|u(x)|^2\,dx = C_1\|u\|^2_{L^2(\sqrt{\beta},\Omega)}\Big),$$

data $f \in L^2(\sqrt{\beta},\Omega)$, esiste $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ tale che $\lambda\alpha(x)\,u(x) + A_1(x,D)\,u(x) = f(x)$.

Poichè allora

$$\beta(x)|A_1(x,D)\,u(x)|^2 \leqslant \beta(x)|f(x)|^2 + \beta(x)|\lambda|^2\alpha(x)^2|u(x)|^2 + 2\beta(x)|\lambda|\alpha(x)|f(x)||u(x)|,$$

riesce

$$\|A_1(x,D)\,u\|_{L^2(\sqrt{\beta},\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\sqrt{\beta},\Omega)} + |\lambda|^2\int_{\Omega_0}\alpha(x)|u(x)|^2\,dx + 2|\lambda|\int_{\Omega_0}|f(x)||u(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\lambda)\|f\|^2_{L^2(\sqrt{\beta},\Omega)} + C_2(\lambda)\|u\|^2_{L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)}.$$

D'altra parte, è facile riconoscere che l'applicazione $u \to \alpha u$ risulta un isomorfismo di $L^2(\sqrt{\alpha},\Omega)$ su $L^2(\sqrt{\beta},\Omega)$.

Pertanto, possiamo ancora applicare il Teorema 4 per ottenere un risultato di esistenza ed unicità della soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Favini, *Su certe equazioni astratte a coefficienti operatoriali*, Boll. U.M.I., (4), **9** (1974), 463-485.

[2] A. Friedman - Z. Schuss, *Degenerate evolution equations in Hilbert space*, Trans A.M.S., **161** (1971), 401-427.

[3] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer, 1966.
[4] S. G. KREIN, *Linear differential equations in Banach space*, ed. A.M.S., 1971.
[5] P. E. SOBOLEVSKI-, *Equations of parabolic type in a Banach space* (1961); Traduzione inglese: A.M.S. Transl., (2), **49** (1965), 1-62.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 aprile 1974.