

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAURA TOTI RIGATELLI

Anelli di frazioni fortemente valutativi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 201-210

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__201_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Anelli di frazioni fortemente valutativi.

LAURA TOTI RIGATELLI (*)

SUMMARY - In this note we study conditions for a ring of fractions of a strongly valuative ring (as introduced in [5]) to be strongly valuative either.

SUNTO - In questa Nota si studiano condizioni sotto le quali la proprietà di forte valutatività, introdotta in [5], si estende da un anello ad un suo anello di frazioni.

In un precedente lavoro ([5]) è stata introdotta una classe di anelli, detti anelli *fortemente valutativi*, i quali sono caratterizzati dal fatto di possedere un algoritmo di divisione rispetto a più divisori, e sui quali è possibile definire una funzione resto che ha tutte le proprietà rilevanti del « resto positivo » nella divisione euclidea dell'anello degli interi (cfr. [5], [6]).

La classe degli anelli fortemente valutativi ammette notevoli teoremi di chiusura, in particolare è chiusa rispetto al passaggio all'anello dei polinomi, delle serie formali e agli anelli quozienti.

Scopo del presente lavoro è la ricerca di condizioni sotto le quali la proprietà di forte valutatività si estende da un anello ad un suo

(*) Indirizzo dell'A.: Viale delle Regioni, 6 - 53100 Siena.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R., anno 1974.

L'A. ringrazia il Prof. S. GRECO per la stimolante opera di critica costruttiva.

anello di frazioni. I principali risultati sono contenuti nei teoremi 1, 4, 5. Resta aperto il problema se *ogni* anello di frazioni di un anello fortemente valutativo sia fortemente valutativo.

1. Ricordiamo anzitutto, per comodità del lettore, le definizioni seguenti (cfr. [5]).

DEF. 1. *Dato un anello A , una quaterna $\langle v, M, \leq, \varrho \rangle$ è detta un sistema di valutazione forte per A se:*

- 1) M è un insieme non vuoto;
- 2) \leq è una relazione riflessiva in M ;
- 3) esiste in M un elemento minimo 0 , ed uno solo;
- 4) ogni successione transitivamente discendente, ossia ogni $(a_i)_{i \in \omega}$ con 4,1) se $i < j$ allora $a_i \geq a_j$ ammette ripetizioni;
- 5) v è un'applicazione da A ad M tale che 5,1) $va = 0$ se e solo se $a = 0$;
- 6) detto $\mathfrak{J}(A)$ l'insieme degli ideali di A , ϱ è un'applicazione da $A \times \mathfrak{J}(A)$ ad A tale che:
 - 6,1) $\varrho(0, J) = 0$ ($J \in \mathfrak{J}(A)$)
 - 6,2) se $a \equiv b(J)$ allora $\varrho(a, J) = \varrho(b, J)$ ($a, b \in A; J \in \mathfrak{J}(A)$)
 - 6,3) se $b \in J$, $b \neq 0$ allora $v\varrho(a, J) < vb$ ($a \in A; J \in \mathfrak{J}(A)$)
 - 6,4) $a - \varrho(a, J) \in J$ »
 - 6,5) se $J \subseteq L$ allora $\varrho(\varrho(a, L), J) = \varrho(a, L)$ ($a \in A; J, L \in \mathfrak{J}(A)$).

Osserviamo che si dice *coppia valutativa* ogni coppia $\langle M, \leq \rangle$ che verifichi le 1), 2), 3) 4) (cfr. [4]).

DEF. 2. *Un anello A è detto fortemente valutativo (f.v.) se e solo se ammette un sistema di valutazione forte.*

2. Da risultati di [5] segue subito il

TEOREMA 1. *Sia A un anello fortemente valutativo ed S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso, finitamente generato. Allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto (agli effetti di $S^{-1}A$) si può supporre che S sia addirittura monogenerato. Sia a un generatore. La f da $A[x]$ ad $S^{-1}A$ così definita: $f \sum_{i=1}^n a_i x^i = \sum_{i=1}^n a_i a^{-i}$, è ovviamente un epimorfismo, onde per i teoremi 1 e 2 di [5], $S^{-1}A$ risulta fortemente valutativo.

3. Prima di passare all'esame di altri casi, ci è utile dare una condizione sufficiente affinché la forte valutatività si estenda da un anello ad un suo sopraanello.

DEF. 3. *Sia A un sottoanello di B ; diremo che A è un buon sottoanello di B se per ogni $J \in \mathfrak{I}(B)$, $J \neq \{0\}$, l'omomorfismo naturale da A a B/J è suriettivo.*

Sono ovviamente formulazioni equivalenti le seguenti:

- (α) *Per ogni ideale J di B , $J \neq \{0\}$, ogni laterale di J abbia traccia non vuota in A .*
- (β) *Per ogni ideale J di B non nullo, il monomorfismo naturale da $A/J \cap A$ a B/J è un isomorfismo.*

(Ovviamente se $J \subseteq L$ e ogni laterale di J ha traccia non vuota in A , così avviene anche per L ; è quindi sufficiente richiedere la (α) per un opportuno insieme di ideali, ad esempio per gli ideali principali.)

Dimostriamo adesso il

TEOREMA 2. *Sia B un anello ed A un suo buon sottoanello; allora se A è fortemente valutativo, anche B lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\langle v, M, \leq, \rho \rangle$ un sistema di valutazione forte per il sottoanello A . Sia J un ideale di B . Definiamo una valutazione v' per gli elementi di B aggiungendo ad M un elemento massimo m (il che non altera il carattere di coppia valutativa di $\langle M, \leq \rangle$) ponendo:

$$v'a = \begin{cases} va & \text{se } a \in A, \\ m & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo poi una ρ' ponendo:

$$\rho'(a, J) = \begin{cases} a & \text{se } J = \{0\}, \\ \rho(b, J \cap A) & \text{altrimenti (} b \text{ essendo un} \\ & \text{qualsunque elemento di } (J + a) \cap A \text{)} \end{cases}$$

Per la 6,2) della def. 1 e per l'ipotesi su A , la definizione è corretta.

È facile ora constatare che ϱ' , v' hanno le proprietà volute. La 5.1) e la 6,1) sono ovvie.

Per quanto riguarda la 6,2) la cosa è ovvia se $J = \{0\}$. Supponiamo allora $J \neq \{0\}$ e sia $a \equiv b(J)$. Consideriamo $\varrho'(a, J)$ e $\varrho'(b, J)$, scegliamo un \bar{a} in $(J + a) \cap A$, allora $\varrho'(a, J) = \varrho(\bar{a}, J \cap A)$, ma \bar{a} appartiene altresì a $(J + b) \cap A$ quindi $\varrho(\bar{a}, J \cap A) = \varrho'(b, J)$ da cui la tesi.

Per la 6,3): sia $b \in J$, $b \neq 0$ quindi $J \neq \{0\}$; si ha $v' \varrho'(a, J) = v \varrho(\bar{a}, J \cap A)$ e distinguiamo adesso due casi: o $b \notin A$ e allora $v' b = m$ e $v \varrho(\bar{a}, J \cap A) < m$, oppure $b \in A$ e allora $v' b = vb$ e

$$v \varrho(\bar{a}, J \cap A) < vb$$

poichè A è f.v., in entrambi i casi segue la tesi.

Per la 6,4): possiamo scrivere

$$a - \varrho'(a, J) = a - \varrho(\bar{a}, J \cap A) = a - \bar{a} + \bar{a} - \varrho(\bar{a}, J \cap A)$$

ma $a - \bar{a} \in J$ e poichè A è f.v., $\bar{a} - \varrho(\bar{a}, J \cap A) \in J \cap A$ quindi $a - \varrho'(a, J) \in J$.

Sia infine $J \subseteq L$, scriviamo:

$$\varrho'(\varrho'(a, L), J) = \varrho'(\varrho(\bar{a}, L \cap A), J) = \varrho(b, J \cap A)$$

dove

$$b \in (J + \varrho(\bar{a}, L \cap A)) \cap A$$

possiamo allora prendere $b = \varrho(\bar{a}, L \cap A)$, e quindi è:

$$\varrho(b, J \cap A) = \varrho(\varrho(\bar{a}, L \cap A), J \cap A)$$

e poichè A è f.v., $\varrho(\varrho(\bar{a}, L \cap A), J \cap A) = \varrho(\bar{a}, L \cap A) = \varrho'(a, L)$ da cui la tesi.

4. Ci è utile tradurre in modo opportuno la condizione del numero precedente nel caso $B = S^{-1}A$.

Si ha:

TEOREMA 3. - *Sia A un dominio d'integrità e S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso; supponiamo che sia $0 \notin S$ e $1 \in S$, come si*

può fare senza perdita di generalità. Allora sono equivalenti le:

(i) A è buon sottoanello di $S^{-1}A$;

(ii) comunque scelti $a \in A (a \neq 0)$, $b \in S$, $c \notin S (c \neq 0)$, l'equazione

$$ax + cy = bxz$$

ammette almeno una soluzione con $x \in S$, $y, z \in A$ ⁽¹⁾.

DIMOSTRAZIONE. (i) \rightarrow (ii). Valga la (i) e siano $a \in A$, $a \neq 0$, $b \in S$, $c \notin S$ con $c \neq 0$. Sia J l'ideale di $S^{-1}A$ generato da c , e consideriamo il laterale $J + b^{-1}a$. Esso avrà almeno un elemento z in A e sarà allora $b^{-1}a - z \in J$. Ma gli elementi di J sono della forma $x^{-1}y'c$ con $x \in S$, $y' \in A$, onde si trova, per un opportuno $x \in S$ e un opportuno $y' \in A$:

$$b^{-1}a - z = x^{-1}y'c$$

ossia:

$$ax - bxz = by'$$

e posto $y = by'$

$$ax + cy = bxz$$

(ii) \rightarrow (i). Sia J un ideale di $B = S^{-1}A$, $J \neq \{0\}$ e sia $J' = J \cap A$ (confondiamo A con la sua immagine canonica in B). Dimostriamo che ogni laterale di J ha traccia non vuota in A .

Dato che J' è certamente non vuoto, possiamo supporre $J \neq B$ e limitarci a considerare laterali non coincidenti con J .

Siano $a \in A$, $b \in S$ e consideriamo il laterale $J + a/b$ (possiamo supporre $a \neq 0$ per l'osservazione precedentemente fatta); sia $c \in J'$, $c \neq 0$ (è ovvio che $J' \neq \{0\}$ e certamente $c \notin S$, altrimenti $1 = c/c \in J = B$) e siano $x \in S$, $y, z \in A$ tali che: $ax + cy = bxz$. Si ha $bx \in S$, $cy/bx \in J$, $a/b + cy/bx = ax + cy/bx = z \in A$.

È ovvio poi che la traccia considerata è un laterale di J' in A .

COROLLARIO 1. *Se A è un dominio d'integrità fortemente valutativo e S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A soddisfacente la (ii) del teorema 3, allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Ovvvia.

⁽¹⁾ La (ii) è certamente soddisfatta se comunque presi $b \in S$, $c \notin S$ con $c \neq 0$, si ha $(b, c) = 1$.

Sia A un dominio d'integrità fortemente valutativo e $S \subseteq A$ un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso con $0 \notin S$. Come è noto ([2] cap. 3, es. 7 e 8) possiamo supporre (agli effetti di $S^{-1}A$) S saturo ($ab \in S$ se e solo se $a, b \in S$) e in tal caso $A - S$ è unione di ideali primi. si ha:

TEOREMA 4. *Se A, S sono al solito (e S saturo, ipotesi che non porta perdita di generalità) e $A - S$ è unione di ideali massimali principali, allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano $a \in A, a \neq 0, b \in S, c \notin S, c \neq 0$.

Sia $(J_i)_{i \in I}$ una famiglia di ideali massimali principali con $\bigcup_{i \in I} J_i = A - S$ e per ogni i sia d_i un generatore di J_i .

Mostriamo che:

(*) esistono certi $n \in \omega, i_0, i_1, \dots, i_n \in I, x \in S$ con $c = xd_0 d_1 \dots d_n$

(dove si è scritto, per comodità, d_r per d_{i_r}).

Non sia così. Poichè $c \in A - S$ dev'essere $c \in J_0$ dove J_0 è un opportuno ideale della famiglia e quindi: $c = c_0 d_0$ con $c_0 \neq 0$ e, per l'ipotesi fatta, $c_0 \in A - S$. Procedendo per induzione si trovano allora certi $(c_n)_{n \in \omega}, (d_n)_{n \in \omega}$ con: $c_n = c_{n+1} d_{n+1}$.

Si ha ovviamente:

$$(c) \subseteq (c_0) \subseteq \dots \subseteq (c_n) \subseteq \dots$$

ed essendo A f.v. e perciò noetheriano, la successione scritta dev'essere stazionaria e per qualche n si deve avere $(c_n) = (c_{n+1})$. Ma ciò implica che d_{n+1} sia invertibile, contro l'ipotesi che esso generi un ideale proprio. La (*) è così dimostrata.

Mostriamo ora che:

(**) comunque scelti $n \in \omega, e d_0, d_1, \dots, d_n$ nella famiglia dei d_i , l'equazione

$$bz + d_0 d_1 \dots d_n y = 1$$

ammette soluzione.

Se infatti così non fosse, l'ideale $(b, d_0 d_1 \dots d_n)$ sarebbe proprio e quindi contenuto in un opportuno ideale massimale I . Si avrebbe allora $d_0 d_1 \dots d_n \in I$ onde per almeno un $i, d_i \in I$ e, essendo $J_i = (d_i)$ massimale, $I = J_i$, il che è assurdo essendo $b \notin \bigcup J_i, b \in I$. La (**) è così dimostrata.

Per la (*) sarà, per opportuni $x \in S$, $n \in \omega$, d_0, d_1, \dots, d_n :

$$c = x d_0 d_1 \cdots d_n$$

e per la (***) esistono certi $y, z \in A$ con:

$$a - bz = d_0 d_1 \cdots d_n y$$

onde

$$x(a - bz) = cy.$$

La tesi segue ora dal corollario 1.

Analogamente si dimostra la seguente

PROPOSIZIONE. *Abbiamo A, S il solito significato. Se A è fortemente valutativo e S è generato da elementi massimali (cioè da elementi che generano ideali massimali) allora $S^{-1}A$ è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Aggiungiamo ad S l'elemento 1. Esiste per ipotesi un insieme $D = \{d_i: i \in I\}$ di elementi massimali tale che ogni $b \in S$ è (1 oppure) prodotto di elementi di D . Comunque presi $b \in S$, $c \notin S$, $c \neq 0$, si trova allora, come si è visto nel precedente teorema, $(b, c) = 1$ onde è soddisfatta la (ii) del teorema 3 (cfr. nota (1)).

5. Ancora sulla base del teorema 2, possiamo trattare il caso di anelli di dimensione 1. Allo scopo ci sono necessari i lemmi seguenti.

LEMMA 1. *Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di anelli, $A = \prod_{i \in I} A_i$, S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A e, per ogni $i \in I$, poniamo: $S_i = \{x_i: x \in S\}$. Allora esiste un omomorfismo f da $S^{-1}A$ a $\prod_{i \in I} S_i^{-1}A_i$.*

DIMOSTRAZIONE. Per $a \in A$, $b \in S$ poniamo:

$$(f a/b)_i = a_i/b_i.$$

Che la f così definita sia un omomorfismo è ovvio.

LEMMA 2. *Sia C un anello locale artiniiano. Allora ogni suo anello di frazioni è isomorfo a C o degenerare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di C . Se $0 \in S$, allora $S^{-1}C$ è degenerare. Se $0 \notin S$ allora S è disgiunto

dall'unico ideale primo J di C (cfr. [3], pp. 4, 5), che per le ipotesi fatte su C , è il massimo ideale proprio. Perciò ogni elemento di S è invertibile e l'applicazione canonica $C \rightarrow S^{-1}C$ è un isomorfismo.

LEMMA 3. *Sia C un anello artiniano e S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Allora l'applicazione canonica $g: C \rightarrow S^{-1}C$ è suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per un noto teorema (cfr. [2], teor. 8,7, pag. 90) si ha: $C \simeq C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$ per opportuni C_i locali artiniani. Per ogni sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di C , si ha, con ovvio significato dei simboli, il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad} & \prod C_i \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ S^{-1}C & \xrightarrow{f} & \prod S_i^{-1}C_i \end{array}$$

onde la g risulta suriettiva (insieme alla f che risulta così essere un isomorfismo).

Siamo ora in grado di dimostrare il:

TEOREMA 5. *Sia A un dominio d'integrità fortemente valutativo di dimensione uno. Allora ogni anello di frazioni di A è fortemente valutativo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 2 è sufficiente dimostrare che preso un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso S di A e un ideale $J \neq \{0\}$ di $S^{-1}A$, l'omomorfismo canonico $\psi: A/I \rightarrow S^{-1}A/J$ (I essendo la controimmagine di J nell'omomorfismo canonico $f: A \rightarrow S^{-1}A$) è suriettivo. Poichè $J \neq \{0\}$ anche $I \neq \{0\}$. Allora A/I ha dimensione 0 ed essendo A noetheriano (poichè è f.v.) è artiniano, onde A/I è nelle ipotesi del lemma 3. Si ha ora l'ovvio diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{I} & \xrightarrow{\quad} & S^{-1}\left(\frac{A}{I}\right) \\ \vdots \downarrow & & \downarrow \\ \frac{S^{-1}A}{J} & \xleftarrow{\quad} & \frac{(S^{-1}A)}{(S^{-1}I)} \end{array}$$

da cui l'asserto.

COROLLARIO 2. *Se A è un dominio d'integrità principale fortemente valutativo, allora ogni suo anello di frazioni è fortemente valutativo.*

COROLLARIO 3. *Se A è un anello euclideo ⁽²⁾, ogni suo anello di frazioni è euclideo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A euclideo e sia S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Come si è visto nella dimostrazione del teorema 5, A è un buon sottoanello di $S^{-1}A$. La coppia valutativa che si costruisce per $S^{-1}A$ con il procedimento del teorema 2, si ottiene da una coppia valutativa per A aggiungendo un elemento massimo onde, se la precedente è ben ordinata è anch'essa ben ordinata e $S^{-1}A$ risulta euclideo.

6. OSSERVAZIONE. Si noti che ciascuno dei teoremi 1, 4, 5, copre casi non coperti dagli altri due. Si considerino infatti i seguenti esempi.

ESEMPIO α . Sia $A = Z[x, y]$ l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti in Z . A è fortemente valutativo. Si prenda ora $S = \{1\} \cup \cup \{x^n : x \in \omega\}$ e si consideri $B = S^{-1}A$. La coppia B, A non soddisfa le ipotesi del teorema 2, infatti preso ad esempio l'ideale J generato da 2, il suo laterale $J + y/x$ ha ovviamente traccia vuota in A . Non sono soddisfatte quindi le ipotesi nè del teorema 4, nè del teorema 5.

ESEMPIO β . Sia K un campo e $A = K[[x]][y]$. La dimensione di A è ovviamente 2. Per ogni $n \in \omega$ l'ideale generato da $1 + xy^n$ è massimale (cfr. [1], pag. 37, es. 4.7). Sia M un'unione di ideali di questo tipo e $S = A - M$. A è un dominio d'integrità fortemente valutativo (cfr. [5], teor. 2 e 3) di dimensione 2 e S non è finitamente generato onde l'esempio cade sotto le ipotesi del teorema 4 ma non dei teoremi 1 e 5.

ESEMPIO γ . Sia A l'anello $Z[\sqrt{5}]$ (ossia $Z[x]/(x^2 - 5)$). Poichè Z è f.v., $Z[x]$ è f.v. e A , come suo quoziente è f.v. (cfr. [5], teor. 1 e 2). $Z[x]$ ha dimensione 2 onde, essendo $(x^2 - 5)$ primo, $Z[\sqrt{5}]$ ha dimensione non superiore a 1 e, non essendo un corpo, ha quindi dimensione 1, e a norma del teorema 5, ogni suo anello di frazioni è f.v.

Sia J l'ideale $(2, 1 + \sqrt{5})$; J è massimale in quanto immagine dell'ideale $(2, 1 + x)$ di $Z[x]$ che è massimale e contiene $(x^2 - 5)$. (L'ideale $(2, 1 + x)$ di $Z[x]$ è massimale in quanto è costituito dai polinomi

⁽²⁾ Come in [6] l'aggettivo euclideo viene inteso nel senso generalizzato di Samuel.

$\sum_0^n a_i x^i$ con $\sum a_i \equiv 0(2)$; si può anche vedere direttamente che $(2, 1 + \sqrt{5})$ è costituito da tutti e soli gli $a + b\sqrt{5}$ con $a + b \equiv 0(2)$.

Posto $S = A - J$, la coppia A, S non cade sotto le ipotesi del teorema 4 in quanto J , come si verifica con facili calcoli, non è principale e non cade sotto le ipotesi del teorema 1 in quanto S non è finitamente generato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. AREZZO, *Sugli ideali massimali principali degli anelli di polinomi*, Le Matematiche, **25**, fasc. 1 (1970), Catania.
- [2] M. F. ATIYAH - I. G. MAC DONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1969.
- [3] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1970.
- [4] L. TOTI RIGATELLI, *Una sottoclasse della classe degli anelli noetheriani, « analoga » alla classe degli euclidei*, Annali dell'Università di Ferrara, Sez. VII, **17**, no. 3 (1971).
- [5] L. TOTI RIGATELLI, *Algoritmi di divisione in anelli non euclidei*, Le Matematiche, **28**, fasc. 1 (1973), Catania.
- [6] L. TOTI RIGATELLI, *Un'osservazione sugli anelli euclidei generalizzati*, Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei, **55**, fasc. 4 (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 marzo 1973.