RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Endlichkeitssätze über Ringe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 52 (1974), p. 185-192

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__185_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 52 (1974)

Endlichkeitssätze über Ringe.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

In [3] wurden Endlichkeitssätze über *nile* Ringe gezeigt. Für die Endlichkeit eines nilen Ringes R ergaben sich folgende hinreichende Bedingungen:

(1) Die Maximalbedingung für Ideale (Linksideale) und die schwache Minimalbedingung für Linksideale (Ideale).
(2) Die schwache Maximalbedingung für Ideale (Linksideale) und die Minimalbedingung für Linksideale (Ideale).
(3) Die Minimalbedingung für Linksideale und die endliche Erzeugbarkeit von R (Endlichkeit von R/R^2).
(4) Die Maximalbedingung für Linksideale und die Finitheit von R (Endlichkeit des Annihilators von R).

Hierbei heißt R finit, wenn es zu jedem $r \in R$ eine natürliche Zahl n gibt, so daß $nr = 0$.

In dieser Note zeigen wir Endlichkeitssätze über 4 weitere Klassen von Ringen.

Zunächst betrachten wir die Klasse der *kommutativen* Ringe und beweisen:

(I) Ein kommutativer Ring R ist endlich, wenn alle einfachen epimorphen Bilder von R endlich sind und R die Maximalbedingung (schwache Maximalbedingung) und schwache Minimalbedingung (Minimalbedingung) für Ideale erfüllt.

(*) Indirizzo dell'A.: Henri-Dunant-Str. 65, Universität, Fachbereich 6 D-43 Essen, Germania Occ.

Jedem Ring R ist der kommutative Ring R/R' zugeordnet. Hierbei ist $r \circ s = rs - sr$ für alle $r, s \in R$,

$$A \circ B = (a \circ b | a \in A, b \in B) \qquad \text{für } A, B \subseteq R,$$

R' das von $R \circ R$ erzeugte Ideal von R.

Wegen (I) setzen wir im folgenden stets die Endlichkeit von R/R' voraus.

Über Ringe R mit nilpotenten Kommutatoridealen R' zeigen wir:

(II) R ist endlich, wenn R/R' endlich und $R/(R')^2$ endlich erzeugt ist.

Ein Ring R besitzt *endliche Klasse* [1; p. 343], wenn es eine natürliche Zahl n und eine Folge J_i, $0 \leqslant i \leqslant n$ von Idealen von R gibt, so daß $J_0 = R$, $J_n = 0$, $J_{i+1} \subseteq J_i$ und $R \circ J_i \subseteq J_{i+1}$ für $0 \leqslant i < n$.

Über Ringe endlicher Klasse beweisen wir:

(III) R ist endlich, wenn R/R' endlich ist.

Ein Ring R heißt *schwach hyperzentral* [2; S. 399], wenn es zu jeder das Nullelement 0 von R enthaltenden echten Teilmenge M von R ein $r \in R$ gibt, so daß $r \notin M$ und $R \circ r \subseteq M$.

Um (II) und (III) auf schwach hyperzentrale Ringe R anwenden zu können, zeigen wir:

(IV) Ein schwach hyperzentraler Ring R besitzt ein nilpotentes Kommutatorideal R', wenn R die Minimalbedingung für Ideale erfüllt.

(V) Ein schwach hyperzentraler Ring R besitzt endliche Klasse, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(*a*) R erfüllt die Maximalbedingung für Ideale.

(*b*) R erfüllt die schwache Maximalbedingung und die Minimalbedingung für Ideale.

(*c*) R erfüllt die Minimalbedingung für Ideale und die beschränkte Engelbedingung.

BEWEISTEIL. Ergänzung der *Notationen*. Sei

$\{A|$ das von $A \subseteq R$ erzeugte Linksideal,

$|A\}$ das von $A \subseteq R$ erzeugte Rechtsideal.

Für Untermoduln A und B von R mit $B \subseteq A$ sei $\operatorname{ind}(A:B)$ die Kardinalzahl der Menge der Restklassen, in die A modulo B zerfällt.

Bezüglich der nicht eigens erwähnten Bezeichnungen verweise ich auf [2; S. 399-401].

Lemma 1. Sei R ein Ring, $\operatorname{ind}(R:J)$ endlich für jedes maximale Linksideal J von R, A und B Linksideale von R mit $B \subset A$ und

$$(a) \qquad (J|J \text{ Linksideal, } B \subset J \subset A) = \emptyset .$$

Dann ist $\operatorname{ind}(A:B)$ endlich.

Beweis. Sei $a \in A$ mit $a \notin B$ beliebig aber fest gewählt. Es gilt entweder $Ra \subseteq B$ oder $Ra \nsubseteq B$.

Zu $Ra \subseteq B$. Für das Linksideal $|a| + B$ gilt $B \subset |a| + B \subseteq A$, also $A = |a| + B$ wegen (a). Aus $2a \in B$ folgt $\operatorname{ind}(A:B) = 2$. Ist dagegen $2a \notin B$, so erhält man mit (a) entsprechend $|2a| + B = A$, also $|2a| + B = |a| + B$, folglich $na \in B$ mit einer geeignet gewählten von null verschiedenen ganzen Zahl n. Demnach ist $\operatorname{ind}(A:B) = \operatorname{ind}(|a| + B:B)$ auch in diesem Fall endlich.

Zu $Ra \nsubseteq B$: Die Menge

$$C := (x|x \in R, xa \in B) \subset R$$

ist Linksideal von R.

Wir zeigen zunächst, daß C maximales Linksideal von R ist:

Sei D Linksideal von R. Aus $C \subset D$ folgt $Da \nsubseteq B$, also $B \subset Da + B \subseteq Ra + B \subseteq A$, hiermit $Da + B = A = Ra + B$ wegen (a), demnach $Ra \subseteq Da + B$. Somit gibt es zu jedem $r \in R$ ein $d \in D$, so daß $(r - d)a = ra - da \in B$, folglich $r - d \in C \subseteq D$, schließlich $r \in D$. Insgesamt ist $R = D$.

Wegen $Ca \subseteq B$ ist mit $\operatorname{ind}(R:C)$ auch $\operatorname{ind}(A:B) = \operatorname{ind}(Ra + B:B)$ endlich.

Lemma 2. Sei R ein Ring und $\operatorname{ind}(R:J)$ endlich für jedes maximale Linksideal J von R. Erfüllt R die Maximalbedingung (schwache Maximalbedingung) und die schwache Minimalbedingung (Minimalbedingung) für Linksideale, so ist R endlich.

Beweis. *Zur ungeklammerten Aussage.* Sei B maximales endliches Linksideal von R. Wir führen die Annahme $B \subset R$ zum Widerspruch:

Sei A minimales Element der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } R,\ B \subset J)\,.$$

Nach Lemma 1 ist $\operatorname{ind}(A\colon B)$, also mit B auch A endlich im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von B.

Analog zeigt man die *geklammerte Aussage*.

Mit Lemma 2 folgt unmittelbar (I).

Lemma 3. Besitzt R endliche Klasse, so ist mit R/R' auch R endlich erzeugt.

Beweis. Es reicht zu zeigen: Ist S ein Ring und J Ideal von S mit

$$(a) \qquad J \subseteq S' \quad \text{und} \quad S \circ J = 0\,,$$

so ist mit S/J auch S endlich erzeugt.

Aus $S \circ J = 0$ folgt $a(r \circ s) = (r \circ s)\,a = r \circ sa - s(r \circ a) = 0$ für alle r, $s \in S$ und $a \in J$, also

$$(b) \qquad S'J = JS' = 0\,.$$

Da S/J endlich erzeugt ist, gibt es einen endlich erzeugten Unterring T von S, so daß

$$(c) \qquad S = T + J\,.$$

Mit (a)-(c) ergibt sich $J \underset{(a)}{\subseteq} S' \underset{(c)}{=} \{(T + J) \circ (T + J)\} \underset{(a)}{=} \{T \circ T\} \underset{(c),(b)}{\subseteq} T$, also $S = T + J = T$.

Lemma 4. Ist R nilpotent, so ist mit R/R^2 auch R endlich erzeugt.

Beweis. Es reicht zu zeigen: Ist S ein Ring und J Ideal von S mit

$$(a) \qquad J \subseteq S^2 \quad \text{und} \quad SJ = JS = 0\,,$$

so ist mit S/J auch S endlich erzeugt.

Da S/J endlich erzeugt ist, gibt es einen endlich erzeugten Teilring T

von S, so daß

$$(b) \qquad S = T + J\,.$$

Mit (a) und (b) folgt $J \subseteq S^2 = (T+J)^2 \subseteq T$, also $S = T + J = T$.

Lemma 5. Ist A nilpotentes Ideal von R mit $A \subseteq R^2$, so ist mit R/A auch R finit.

Beweis. Es reicht zu zeigen: Ist S ein Ring und J Ideal von S mit $J \subseteq S^2$ und $J^2 = 0$, so ist mit S/J auch S finit.

Da S/J finit ist, gibt es eine Abbildung β von S in die Menge der natürlichen Zahlen, so daß $\beta(r)r \in J$ für alle $r \in S$. Wegen $J \subseteq S^2$ gibt es zu $a \in J$ Elemente $r_i, s_i \in S$, so daß $a = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i$, also

$$\Bigl(\prod_{j=1}^{n} \beta(r_j)\,\beta(s_j)\Bigr) a = \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\prod_{j=1}^{n} \beta(r_j)\Bigr) r_i \Bigl(\prod_{j=1}^{n} \beta(s_j)\Bigr) s_i \in J^2 = 0\,.$$

Folglich ist J, also auch S finit.

Beweis zu (II). Anwendung von Lemma 5 auf $A := R'$ erbringt, daß R finit ist.

Wir zeigen die Behauptung zunächst unter der Zusatzvoraussetzung, daß $R'/(R')^2$ endlich ist.

Nach Lemma 4 ist R' endlich erzeugt. Mit R ist auch R' finit. Folglich ist der nilpotente Ring R' endlich. Mit R/R' und R' ist auch R endlich.

Es reicht nunmehr zu zeigen, daß $R'/(R')^2$ endlich ist. O.B.d.A. sei deshalb $(R')^2 = 0$. Es gibt endliche Teilmengen A und B von R, so daß

$$(a) \qquad R = A + R' \quad \text{und} \quad R = \langle B \rangle\,,$$

also

$$R' = \{\langle B\rangle \circ \langle B\rangle\} = \{B \circ B\} \underset{(a)}{=} |B \circ B| + A(B \circ B) + (B \circ B)A + A(B \circ B)A\,.$$

Da A und B endlich und R finit ist, ist R' endlich.

Beweis zu (III). Nach [1; Theorem 5.6, p. 350] ist R' nilpotent. Nach Lemma 3 ist R endlich erzeugt. Mit (II) folgt die Behauptung.

Lemma 6. Sei R schwach hyperzentral und $A \neq 0$ Ideal von R. Aus

$$(a) \qquad R'' A = 0 ,$$

$$(b) \qquad (J | J \text{ Ideal von } R,\ 0 \subset J \subset A) = \emptyset$$

folgt $R \circ A = 0$.

Beweis. Da R schwach hyperzentral ist, gilt $\circ(0 \cup \mathfrak{C}A) \not\subseteq 0 \cup \mathfrak{C}A$. Also gibt es $0 \neq a \in A$ mit $R \circ a \subseteq (0 \cup \mathfrak{C}A) \cap A = 0$.

Wir zeigen zunächst $(R \circ R)\, a = 0$, indem wir die Annahme, daß es $b \in R \circ R$ gibt, so daß $ba \neq 0$, zum Widerspruch führen:

Aus $ba \neq 0$ folgt $A = \{ba\}$ wegen (b). Mit $R \circ a = 0$ und (a) ergibt sich $bas = -b(s \circ a) - (s \circ b)\, a + sba = sba$ für alle $s \in R$, also $A = \{ba\} = \{ba|$, folglich $a = (rb + nb)\, a$ mit einer ganzen Zahl n und $r \in R$, schließlich $a = (rb + nb)^i a$ für alle natürlichen Zahlen i. Nach [2; Satz 10, S. 409] ist $rb + nb$ als Element von R' nilpotent, also $a = 0$ im Widerspruch zu $a \neq 0$.

Aus $R \circ a = 0$ und $(R \circ R)\, a = 0$ folgt $R \circ \{a\} = 0$. Nach (b) gilt $A = \{a\}$ wegen $a \neq 0$. Also ist $R \circ A = 0$.

Lemma 7. Jeder schwach hyperzentrale Ring R, der die schwache Minimalbedingung für Ideale erfüllt, ist hyperzentral.

Beweis. Sei $S \neq 0$ epimorphes Bild von R. Wir zeigen, daß es ein Ideal $A \neq 0$ von S gibt, so daß $S \circ A = 0$:

Da mit R auch S schwach hyperzentral ist, gibt es nach [2; Satz 2, S. 403] ein Ideal $B \neq 0$ von S mit $S'' B = 0$. Für S und ein beliebig gewähltes minimales Element A der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } S,\ 0 \subset J \subseteq B)$$

sind die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt. Also gilt $S \circ A = 0$.

Beweis zu (IV). Nach Lemma 7 ist R hyperzentral. Da R die Minimalbedingung für Ideale erfüllt, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $A := (R')^n = (R')^{2n} = A^2$.

Wir zeigen die Behauptung, indem wir die Annahme $A \neq 0$ zum Widerspruch führen:

Wegen $RA \supseteq A^2 \neq 0$ gilt

$$B := (x | x \in R,\ xA = 0) \subset R .$$

Sei C Ideal von R mit $B \subset C$ und $R \circ C \subseteq B$, D minimales Element der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } R,\ B \subset J \subseteq C)$$

und $d \in D$ mit $d \notin B$ beliebig aber fest gewählt. Mit der Minimaleigenschaft von D und $R \circ D \subseteq R \circ C \subseteq B$ ergibt sich $D = \{d\} + B = |d\} + B$. Aus $B \subset D$ und $A^2 = A$ folgt $0 \neq DA = D(A^2) = (DA)A$, also $DA \nsubseteq B$, schließlich $D = DA + B$ wegen der Minimaleigenschaft von D. Insgesamt gilt

$$D = DA + B = (|d\} + B)A + B = |d\}A + B = dA + B\,.$$

Folglich gibt es $a \in A$, so daß $d \equiv da$ modulo B, also $d \equiv da^i$ modulo B für alle natürlichen Zahlen i, schließlich $d \in B$, da a Element des nach [2; Satz 10, S. 409] nilen Ringes R' ist, im Widerspruch zu $d \notin B$.

Beweis zu (V). (a) Nach [2; Satz 8, S. 408] ist R' hypernilpotent in R, also nilpotent. Nach [2; Satz 1, S. 402] ist R hyperzentral, folglich Ring endlicher Klasse.

Lemma 8. Jeder schwach hyperzentrale Ring R, der die schwache Maximalbedingung für Ideale erfüllt, ist absteigend hyperzentral (d.h. für jedes Ideal $A \neq 0$ von R gilt $\{R \circ A\} \subset A$).

Beweis. Sei $A \neq 0$ Ideal von R, B maximales Element der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } R,\ J \subset A)$$

und C maximales Element der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } R,\ J \cap A = B)\,.$$

Wegen $R \cap A = A \supset B$ gilt $C \subset R$. Nach [2; Satz 2, S. 403] gibt es ein Ideal D von R mit $C \subset D$ und $R''D \subseteq C$. Wegen der Maximaleigenschaften von B und C ist $D \cap A \supset B$, also $D \cap A = A$. Mit $R''D \subseteq C$ folgt $R''A = R''(D \cap A) \subseteq (C \cap A) = B$. Demnach sind für R/B und A/B die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt, Folglich gilt $\{R \circ A\} \subseteq$ $\subseteq B \subset A$.

(V). (b) folgt unmittelbar mit Lemma 8.

Lemma 9. Erfüllt R die Minimalbedingung für Ideale und die beschränkte Engelbedingung und ist R' nilpotent, so besitzt R endliche Klasse.

BEWEIS. Wir zeigen die Behauptung, indem wir die Annahme, daß es ein Ideal A von R gibt mit $A \neq 0$ und $\{A \circ R\} = A$ zum Widerspruch führen:

Da R' nilpotent ist, gilt $B := R'A + AR' \subset A$. Für $S := R/B$ und $C := A/B$ gilt

$$C \in (J | J \text{ Ideal von } S,\ 0 \subset J \subseteq C,\ \{J \circ S\} = J)\ .$$

Sei D minimales Element dieser Menge und $t \in S$ mit $D \circ t \neq 0$ beliebig aber fest gewählt. Wegen $S'D = DS' = 0$ gilt für $d \in D$ und $s, u, v, w \in S$

$$\begin{aligned}
(a)\quad & (d \circ s)\, u \circ w = (d \circ s)(u \circ w) + \big((d \circ s) \circ w\big)\, u = \big((d \circ s) \circ w\big)\, u,\\
& v(d \circ s) \circ w = (v \circ w)(d \circ s) + v\big((d \circ s) \circ w\big) = v\big((d \circ s) \circ w\big),\\
& v(d \circ s)\, u \circ w = (v \circ w)(d \circ s)\, u + v(d \circ s)(u \circ w) + v(d \circ s) \circ w\big)\, u =\\
& \qquad\qquad = v\big((d \circ s) \circ w\big)\, u,
\end{aligned}$$

$$(b)\quad (d \circ s) \circ u = (d \circ u) \circ s + d \circ (s \circ u) = (d \circ u) \circ s,$$

also

$$\big\{\{D \circ t\} \circ S\big\} = \{(D \circ t) \circ S\} = \{(D \circ S) \circ t\} = \big\{\{D \circ S\} \circ t\big\} = \{D \circ t\}\ ,$$

demnach $\{D \circ t\} = D$ wegen der Minimaleigenschaft von D, folglich $\{(D \circ t) \circ t\} = \big\{\{D \circ t\} \circ t\big\} = \{D \circ t\} = D, \ldots,$ schließlich $D = 0$ im Widerspruch zu $D \neq 0$.

(V). (c) folgt unmittelbar mit (IV) und Lemma 9.

LITERATUR

[1] S. A. JENNINGS, *Central chains of ideals in an associative ring,* Duke Mathematical Journal, **9** (1942), 341-355.

[2] W. STREB, *Über schwach hyperzentrale Ringe,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), 399-409.

[3] W. STREB, *Über die Endlichkeit niler Ringe,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **48** (1972), 349-357.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1974.