

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

## **Endlichkeitssätze über Ringe**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 52 (1974), p. 185-192

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1974\\_\\_52\\_\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__185_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Endlichkeitssätze über Ringe.

WALTER STREB (\*)

### Einleitung.

In [3] wurden Endlichkeitssätze über *nile* Ringe gezeigt. Für die Endlichkeit eines nilen Ringes  $R$  ergaben sich folgende hinreichende Bedingungen:

- (1) Die Maximalbedingung für Ideale (Linksideale) und die schwache Minimalbedingung für Linksideale (Ideale).
- (2) Die schwache Maximalbedingung für Ideale (Linksideale) und die Minimalbedingung für Linksideale (Ideale).
- (3) Die Minimalbedingung für Linksideale und die endliche Erzeugbarkeit von  $R$  (Endlichkeit von  $R/R^2$ ).
- (4) Die Maximalbedingung für Linksideale und die Finitheit von  $R$  (Endlichkeit des Annihilators von  $R$ ).

Hierbei heißt  $R$  *finit*, wenn es zu jedem  $r \in R$  eine natürliche Zahl  $n$  gibt, so daß  $nr = 0$ .

In dieser Note zeigen wir Endlichkeitssätze über 4 weitere Klassen von Ringen.

Zunächst betrachten wir die Klasse der *kommutativen* Ringe und beweisen:

- (I) Ein kommutativer Ring  $R$  ist endlich, wenn alle einfachen epimorphen Bilder von  $R$  endlich sind und  $R$  die Maximalbedingung (schwache Maximalbedingung) und schwache Minimalbedingung (Minimalbedingung) für Ideale erfüllt.

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Henri-Dunant-Str. 65, Universität, Fachbereich 6 D-43 Essen, Germania Occ.

Jedem Ring  $R$  ist der kommutative Ring  $R/R'$  zugeordnet. Hierbei ist  $ros = rs - sr$  für alle  $r, s \in R$ ,

$$A \circ B = (a \circ b | a \in A, b \in B) \quad \text{für } A, B \subseteq R,$$

$R'$  das von  $R \circ R$  erzeugte Ideal von  $R$ .

Wegen (I) setzen wir im folgenden stets die Endlichkeit von  $R/R'$  voraus.

Über Ringe  $R$  mit nilpotenten Kommutatoridealen  $R'$  zeigen wir:

(II)  $R$  ist endlich, wenn  $R/R'$  endlich und  $R/(R')^2$  endlich erzeugt ist.

Ein Ring  $R$  besitzt *endliche Klasse* [1; p. 343], wenn es eine natürliche Zahl  $n$  und eine Folge  $J_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  von Idealen von  $R$  gibt, so daß  $J_0 = R$ ,  $J_n = 0$ ,  $J_{i+1} \subseteq J_i$  und  $R \circ J_i \subseteq J_{i+1}$  für  $0 \leq i < n$ .

Über Ringe endlicher Klasse beweisen wir:

(III)  $R$  ist endlich, wenn  $R/R'$  endlich ist.

Ein Ring  $R$  heißt *schwach hyperzentral* [2; S. 399], wenn es zu jeder das Nullelement 0 von  $R$  enthaltenden echten Teilmenge  $M$  von  $R$  ein  $r \in R$  gibt, so daß  $r \notin M$  und  $R \circ r \subseteq M$ .

Um (II) und (III) auf schwach hyperzentrale Ringe  $R$  anwenden zu können, zeigen wir:

(IV) Ein schwach hyperzentraler Ring  $R$  besitzt ein nilpotentes Kommutatorideal  $R'$ , wenn  $R$  die Minimalbedingung für Ideale erfüllt.

(V) Ein schwach hyperzentraler Ring  $R$  besitzt endliche Klasse, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a)  $R$  erfüllt die Maximalbedingung für Ideale.

(b)  $R$  erfüllt die schwache Maximalbedingung und die Minimalbedingung für Ideale.

(c)  $R$  erfüllt die Minimalbedingung für Ideale und die beschränkte Engelbedingung.

BEWEISTEIL. Ergänzung der *Notationen*. Sei

{A} das von  $A \subseteq R$  erzeugte Linksideal,

|A} das von  $A \subseteq R$  erzeugte Rechtsideal.

Für Untermoduln  $A$  und  $B$  von  $R$  mit  $B \subseteq A$  sei  $\text{ind}(A : B)$  die Kardinalzahl der Menge der Restklassen, in die  $A$  modulo  $B$  zerfällt.

Bezüglich der nicht eigens erwähnten Bezeichnungen verweise ich auf [2; S. 399-401].

LEMMA 1. Sei  $R$  ein Ring,  $\text{ind}(R : J)$  endlich für jedes maximale Linksideal  $J$  von  $R$ ,  $A$  und  $B$  Linksideale von  $R$  mit  $B \subseteq A$  und

$$(a) \quad (J|J \text{ Linksideal, } B \subseteq J \subseteq A) = \emptyset .$$

Dann ist  $\text{ind}(A : B)$  endlich.

BEWEIS. Sei  $a \in A$  mit  $a \notin B$  beliebig aber fest gewählt. Es gilt entweder  $Ra \subseteq B$  oder  $Ra \not\subseteq B$ .

Zu  $Ra \subseteq B$ . Für das Linksideal  $|a| + B$  gilt  $B \subseteq |a| + B \subseteq A$ , also  $A = |a| + B$  wegen (a). Aus  $2a \in B$  folgt  $\text{ind}(A : B) = 2$ . Ist dagegen  $2a \notin B$ , so erhält man mit (a) entsprechend  $|2a| + B = A$ , also  $|2a| + B = |a| + B$ , folglich  $na \in B$  mit einer geeignet gewählten von null verschiedenen ganzen Zahl  $n$ . Demnach ist  $\text{ind}(A : B) = \text{ind}(|a| + B : B)$  auch in diesem Fall endlich.

Zu  $Ra \not\subseteq B$ : Die Menge

$$C := (x|x \in R, xa \in B) \subseteq R$$

ist Linksideal von  $R$ .

Wir zeigen zunächst, daß  $C$  maximales Linksideal von  $R$  ist:

Sei  $D$  Linksideal von  $R$ . Aus  $C \subseteq D$  folgt  $Da \not\subseteq B$ , also  $B \subseteq Da + B \subseteq Ra + B \subseteq A$ , hiermit  $Da + B = A = Ra + B$  wegen (a), demnach  $Ra \subseteq Da + B$ . Somit gibt es zu jedem  $r \in R$  ein  $d \in D$ , so daß  $(r - d)a = ra - da \in B$ , folglich  $r - d \in C \subseteq D$ , schließlich  $r \in D$ . Insgesamt ist  $R = D$ .

Wegen  $Ca \subseteq B$  ist mit  $\text{ind}(R : C)$  auch  $\text{ind}(A : B) = \text{ind}(Ra + B : B)$  endlich.

LEMMA 2. Sei  $R$  ein Ring und  $\text{ind}(R : J)$  endlich für jedes maximale Linksideal  $J$  von  $R$ . Erfüllt  $R$  die Maximalbedingung (schwache Maximalbedingung) und die schwache Minimalbedingung (Minimalbedingung) für Linksideale, so ist  $R$  endlich.

BEWEIS. *Zur ungeklammerten Aussage.* Sei  $B$  maximales endliches Linksideal von  $R$ . Wir führen die Annahme  $B \subset R$  zum Widerspruch: Sei  $A$  minimales Element der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } R, B \subset J).$$

Nach Lemma 1 ist  $\text{ind}(A;B)$ , also mit  $B$  auch  $A$  endlich im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von  $B$ .

Analog zeigt man die *geklammerte Aussage*.

Mit Lemma 2 folgt unmittelbar (I).

LEMMA 3. Besitzt  $R$  endliche Klasse, so ist mit  $R/R'$  auch  $R$  endlich erzeugt.

BEWEIS. Es reicht zu zeigen: Ist  $S$  ein Ring und  $J$  Ideal von  $S$  mit

$$(a) \quad J \subseteq S' \quad \text{und} \quad S \circ J = 0,$$

so ist mit  $S/J$  auch  $S$  endlich erzeugt.

Aus  $S \circ J = 0$  folgt  $a(ros) = (ros)a = rosa - s(rosa) = 0$  für alle  $r, s \in S$  und  $a \in J$ , also

$$(b) \quad S'J = JS' = 0.$$

Da  $S/J$  endlich erzeugt ist, gibt es einen endlich erzeugten Unter-ring  $T$  von  $S$ , so daß

$$(c) \quad S = T + J.$$

Mit (a)-(c) ergibt sich  $J \underset{(a)}{\subseteq} S' \underset{(c)}{=} \{(T+J) \circ (T+J)\} \underset{(a)}{=} \{T \circ T\} \underset{(c),(b)}{\subseteq} T$ , also  $S = T + J = T$ .

LEMMA 4. Ist  $R$  nilpotent, so ist mit  $R/R^2$  auch  $R$  endlich erzeugt.

BEWEIS. Es reicht zu zeigen: Ist  $S$  ein Ring und  $J$  Ideal von  $S$  mit

$$(a) \quad J \subseteq S^2 \quad \text{und} \quad SJ = JS = 0,$$

so ist mit  $S/J$  auch  $S$  endlich erzeugt.

Da  $S/J$  endlich erzeugt ist, gibt es einen endlich erzeugten Teilring  $T$

von  $S$ , so daß

$$(b) \quad S = T + J .$$

Mit (a) und (b) folgt  $J \subseteq S^2 = (T + J)^2 \subseteq T$ , also  $S = T + J = T$ .

LEMMA 5. Ist  $A$  nilpotentes Ideal von  $R$  mit  $A \subseteq R^2$ , so ist mit  $R/A$  auch  $R$  finit.

BEWEIS. Es reicht zu zeigen: Ist  $S$  ein Ring und  $J$  Ideal von  $S$  mit  $J \subseteq S^2$  und  $J^2 = 0$ , so ist mit  $S/J$  auch  $S$  finit.

Da  $S/J$  finit ist, gibt es eine Abbildung  $\beta$  von  $S$  in die Menge der natürlichen Zahlen, so daß  $\beta(r)r \in J$  für alle  $r \in S$ . Wegen  $J \subseteq S^2$  gibt es zu  $a \in J$  Elemente  $r_i, s_i \in S$ , so daß  $a = \sum_{i=1}^n r_i s_i$ , also

$$\left( \prod_{j=1}^n \beta(r_j) \beta(s_j) \right) a = \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n \beta(r_j) \right) r_i \left( \prod_{j=1}^n \beta(s_j) \right) s_i \in J^2 = 0 .$$

Folglich ist  $J$ , also auch  $S$  finit.

BEWEIS ZU (II). Anwendung von Lemma 5 auf  $A := R'$  erbringt, daß  $R$  finit ist.

Wir zeigen die Behauptung zunächst unter der Zusatzvoraussetzung, daß  $R'/(R')^2$  endlich ist.

Nach Lemma 4 ist  $R'$  endlich erzeugt. Mit  $R$  ist auch  $R'$  finit. Folglich ist der nilpotente Ring  $R'$  endlich. Mit  $R/R'$  und  $R'$  ist auch  $R$  endlich.

Es reicht nunmehr zu zeigen, daß  $R'/(R')^2$  endlich ist. C.B.d.A. sei deshalb  $(R')^2 = 0$ . Es gibt endliche Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $R$ , so daß

$$(a) \quad R = A + R' \quad \text{und} \quad R = \langle B \rangle ,$$

also

$$R' = \{ \langle B \rangle \circ \langle B \rangle \} = \{ B \circ B \} \stackrel{(a)}{=} |B \circ B| + A(B \circ B) + (B \circ B)A + A(B \circ B)A .$$

Da  $A$  und  $B$  endlich und  $R$  finit ist, ist  $R'$  endlich.

BEWEIS ZU (III). Nach [1; Theorem 5.6, p. 350] ist  $R'$  nilpotent. Nach Lemma 3 ist  $R$  endlich erzeugt. Mit (II) folgt die Behauptung.

LEMMA 6. Sei  $R$  schwach hyperzentral und  $A \neq 0$  Ideal von  $R$ .  
Aus

$$(a) \quad R^n A = 0,$$

$$(b) \quad (J|J \text{ Ideal von } R, 0 \subset J \subset A) = \emptyset$$

folgt  $R \circ A = 0$ .

BEWEIS. Da  $R$  schwach hyperzentral ist, gilt  $\circ(0 \cup \mathfrak{C}A) \not\subseteq 0 \cup \mathfrak{C}A$ . Also gibt es  $0 \neq a \in A$  mit  $R \circ a \subseteq (0 \cup \mathfrak{C}A) \cap A = 0$ .

Wir zeigen zunächst  $(R \circ R)a = 0$ , indem wir die Annahme, daß es  $b \in R \circ R$  gibt, so daß  $ba \neq 0$ , zum Widerspruch führen:

Aus  $ba \neq 0$  folgt  $A = \{ba\}$  wegen (b). Mit  $R \circ a = 0$  und (a) ergibt sich  $bas = -b(s \circ a) - (s \circ b)a + sba = sba$  für alle  $s \in R$ , also  $A = \{ba\} = \{ba\}$ , folglich  $a = (rb + nb)a$  mit einer ganzen Zahl  $n$  und  $r \in R$ , schließlich  $a = (rb + nb)^i a$  für alle natürlichen Zahlen  $i$ . Nach [2; Satz 10, S. 409] ist  $rb + nb$  als Element von  $R'$  nilpotent, also  $a = 0$  im Widerspruch zu  $a \neq 0$ .

Aus  $R \circ a = 0$  und  $(R \circ R)a = 0$  folgt  $R \circ \{a\} = 0$ . Nach (b) gilt  $A = \{a\}$  wegen  $a \neq 0$ . Also ist  $R \circ A = 0$ .

LEMMA 7. Jeder schwach hyperzentrale Ring  $R$ , der die schwache Minimalbedingung für Ideale erfüllt, ist hyperzentral.

BEWEIS. Sei  $S \neq 0$  epimorphes Bild von  $R$ . Wir zeigen, daß es ein Ideal  $A \neq 0$  von  $S$  gibt, so daß  $S \circ A = 0$ :

Da mit  $R$  auch  $S$  schwach hyperzentral ist, gibt es nach [2; Satz 2, S. 403] ein Ideal  $B \neq 0$  von  $S$  mit  $S''B = 0$ . Für  $S$  und ein beliebig gewähltes minimales Element  $A$  der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } S, 0 \subset J \subseteq B)$$

sind die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt. Also gilt  $S \circ A = 0$ .

BEWEIS ZU (IV). Nach Lemma 7 ist  $R$  hyperzentral. Da  $R$  die Minimalbedingung für Ideale erfüllt, gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $A := (R')^n = (R')^{2n} = A^2$ .

Wir zeigen die Behauptung, indem wir die Annahme  $A \neq 0$  zum Widerspruch führen:

Wegen  $RA \supseteq A^2 \neq 0$  gilt

$$B := (x|x \in R, xA = 0) \subset R.$$

Sei  $C$  Ideal von  $R$  mit  $B \subset C$  und  $R \circ C \subseteq B$ ,  $D$  minimales Element der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } R, B \subset J \subseteq C)$$

und  $d \in D$  mit  $d \notin B$  beliebig aber fest gewählt. Mit der Minimaleigenschaft von  $D$  und  $R \circ D \subseteq R \circ C \subseteq B$  ergibt sich  $D = \{d\} + B = |d\} + B$ . Aus  $B \subset D$  und  $A^2 = A$  folgt  $0 \neq DA = D(A^2) = (DA)A$ , also  $DA \not\subseteq B$ , schließlich  $D = DA + B$  wegen der Minimaleigenschaft von  $D$ . Insgesamt gilt

$$D = DA + B = (|d\} + B)A + B = |d\}A + B = dA + B.$$

Folglich gibt es  $a \in A$ , so daß  $\bar{d} \equiv da$  modulo  $B$ , also  $\bar{d} \equiv da^i$  modulo  $B$  für alle natürlichen Zahlen  $i$ , schließlich  $\bar{d} \in B$ , da  $a$  Element des nach [2; Satz 10, S. 409] nilen Ringes  $R'$  ist, im Widerspruch zu  $\bar{d} \notin B$ .

BEWEIS ZU (V). (a) Nach [2; Satz 8, S. 408] ist  $R'$  hypernilpotent in  $R$ , also nilpotent. Nach [2; Satz 1, S. 402] ist  $R$  hyperzentral, folglich Ring endlicher Klasse.

LEMMA 8. Jeder schwach hyperzentrale Ring  $R$ , der die schwache Maximalbedingung für Ideale erfüllt, ist absteigend hyperzentral (d.h. für jedes Ideal  $A \neq 0$  von  $R$  gilt  $\{R \circ A\} \subset A$ ).

BEWEIS. Sei  $A \neq 0$  Ideal von  $R$ ,  $B$  maximales Element der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } R, J \subset A)$$

und  $C$  maximales Element der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } R, J \cap A = B).$$

Wegen  $R \cap A = A \supset B$  gilt  $C \subset R$ . Nach [2; Satz 2, S. 403] gibt es ein Ideal  $D$  von  $R$  mit  $C \subset D$  und  $R''D \subseteq C$ . Wegen der Maximaleigenschaften von  $B$  und  $C$  ist  $D \cap A \supset B$ , also  $D \cap A = A$ . Mit  $R''D \subseteq C$  folgt  $R''A = R''(D \cap A) \subseteq (C \cap A) = B$ . Demnach sind für  $R/B$  und  $A/B$  die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt, Folglich gilt  $\{R \circ A\} \subseteq B \subset A$ .

(V). (b) folgt unmittelbar mit Lemma 8.

LEMMA 9. Erfüllt  $R$  die Minimalbedingung für Ideale und die beschränkte Engelbedingung und ist  $R'$  nilpotent, so besitzt  $R$  endliche Klasse.

BEWEIS. Wir zeigen die Behauptung, indem wir die Annahme, daß es ein Ideal  $A$  von  $R$  gibt mit  $A \neq 0$  und  $\{A \circ R\} = A$  zum Widerspruch führen:

Da  $R'$  nilpotent ist, gilt  $B := R'A + AR' \subset A$ . Für  $S := R/B$  und  $C := A/B$  gilt

$$C \in (J|J \text{ Ideal von } S, 0 \subset J \subset C, \{J \circ S\} = J).$$

Sei  $D$  minimales Element dieser Menge und  $t \in S$  mit  $D \circ t \neq 0$  beliebig aber fest gewählt. Wegen  $S'D = DS' = 0$  gilt für  $d \in D$  und  $s, u, v, w \in S$

$$\begin{aligned} (a) \quad & (\bar{d} \circ s) u \circ w = (\bar{d} \circ s)(u \circ w) + ((\bar{d} \circ s) \circ w) u = ((\bar{d} \circ s) \circ w) u, \\ & v(\bar{d} \circ s) \circ w = (v \circ w)(\bar{d} \circ s) + v((\bar{d} \circ s) \circ w) = v((\bar{d} \circ s) \circ w), \\ & v(\bar{d} \circ s) u \circ w = (v \circ w)(\bar{d} \circ s) u + v(\bar{d} \circ s)(u \circ w) + v(\bar{d} \circ s) \circ w u = \\ & \hspace{15em} = v((\bar{d} \circ s) \circ w) u, \end{aligned}$$

$$(b) \quad (\bar{d} \circ s) \circ u = (\bar{d} \circ u) \circ s + \bar{d} \circ (s \circ u) = (\bar{d} \circ u) \circ s,$$

also

$$\{\{D \circ t\} \circ S\} = \{(D \circ t) \circ S\} = \{(D \circ S) \circ t\} = \{\{D \circ S\} \circ t\} = \{D \circ t\},$$

demnach  $\{D \circ t\} = D$  wegen der Minimaleigenschaft von  $D$ , folglich  $\{\{D \circ t\} \circ t\} = \{\{D \circ t\} \circ t\} = \{D \circ t\} = D, \dots$ , schließlich  $D = 0$  im Widerspruch zu  $D \neq 0$ .

(V). (c) folgt unmittelbar mit (IV) und Lemma 9.

#### LITERATUR

- [1] S. A. JENNINGS, *Central chains of ideals in an associative ring*, Duke Mathematical Journal, **9** (1942), 341-355.
- [2] W. STREB, *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), 399-409.
- [3] W. STREB, *Über die Endlichkeit niler Ringe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **48** (1972), 349-357.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1974.