

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO ROMANO

Una termodinamica relativistica per materiali di tipo termoelastico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 52 (1974), p. 141-165

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__141_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Una termodinamica relativistica per materiali di tipo termoelastico.

ANTONIO ROMANO (*)

Introduzione.

Nell'ultimo decennio la termodinamica classica dei sistemi continui è pervenuta ad un'organica sistemazione essenzialmente fondata, com'è ben noto, ⁽¹⁾ sui *principi generali del bilancio* e sugli *assiomi per le equazioni costitutive*.

Nel primo gruppo di postulati si richiede che, durante l'evoluzione di un qualunque sistema continuo S siano soddisfatti i *principi del bilancio dell'impulso, dell'energia e del momento angolare*.

Nel secondo gruppo di assiomi si impone che le equazioni costitutive, le quali traducono la « risposta » di una particolare classe di materiali nel generico processo termocinetico ⁽²⁾, verifichino i *principi del determinismo, dell'azione locale, dell'equipresenza, dell'oggettività* (o *dell'indifferenza materiale*) nonchè il *principio di dissipazione*.

Altresì ben note sono le conseguenze di questi assiomi per una vasta classe di materiali (differenziali, con memoria, polari, ecc.).

Recentemente, molti Autori hanno preso in considerazione la possibilità di riformulare i suddetti principi in Relatività (ristretta o generale) per ottenere un'assiomatica da porre a fondamento della termodinamica relativistica dei sistemi continui. Tale assiomatica, ovviamente, deve ridursi a quella classica nei limiti non relativistici.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università di Napoli.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

⁽¹⁾ Cfr., ad es., da [1] a [4].

⁽²⁾ Per processo termocinetico si intende l'insieme delle equazioni finite del moto e del campo di temperatura.

Ora, detti $T^{\alpha\beta}$ il *tensore impulso-energia* del sistema S ed f^α la *densità di quadri forza* (assegnata) agente su S , entrambi definiti sulla regione dello spazio-tempo V_4 , individuata dalle traiettorie d'universo delle ∞^3 particelle del sistema, la formulazione relativistica (locale) del bilancio dell'impulso, dell'energia e del momento angolare è notoriamente:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha \text{ (}^3\text{)},$$

con $T^{\alpha\beta}$ simmetrico.

Inoltre, una precisa versione relativistica dei principi del determinismo e dell'azione locale è stata fornita da G. Maugin [5] tenendo conto diversamente che nel caso classico, della velocità finita di propagazione di ogni azione fisica.

Di evidente estensione è il postulato dell'equipresenza.

Per quanto concerne il principio d'indifferenza materiale (PIM), la sua prima versione relativistica, per materiali ereditari di ordine p ⁽⁴⁾, è dovuta ad A. Bressan [6], v. anche [7] (*). Questo Autore, utilizzando una terna di Fermi mobile lungo la traiettoria d'universo W di una particella $X \in S$ e la famiglia di ipersuperficie totalmente geodetiche Σ_{i_g} uscenti dai punti di W ortogonalmente a W , introduce le nozioni di storia termo-magneto-cinematica intrinseca e di equivalenza tra due siffatte storie. Il PIM viene poi enunciato richiedendo che i funzionali costitutivi $\mathcal{F}^{(r)}$ siano invarianti rispetto a storie termo-magneto-cinematiche equivalenti il che sostanzialmente equivale a richiedere che il PIM classico valga limitatamente ad intorni infinitesimi di X di ordine p . Infine, l'Autore deduce dalla suddetta versione del PIM che gli $\mathcal{F}^{(r)}$ possono porsi in forma ridotta, usando opportune variabili lagrangiane.

Successivamente, Bragg in [8] propone una relativizzazione del PIM classico diversa in quanto in [8]: 1) ci si limita alla Relatività ristretta ed a materiali semplici; 2) i processi sono ridotti a moti; 3) l'equivalenza tra due moti, più simile a quella classica perchè fa intervenire intorni finiti di W , è definita a partire da tempi e distanze *apparenti* . Per questo motivo l'Autore denomina *principle of non-sentient response* (PNSR) la sua versione del PIM e ne prova la equivalenza con quella

(3) Gli indici latini variano da 1 a 3, quelli greci da 1 a 4.

(*) Le osservazioni contenute nella successiva discussione sul principio di oggettività sono sostanzialmente tratte da [9] e [29].

(4) Per la definizione di materiale di ordine o complessità p , cfr., ad es., [3], pag. 93.

proposta in [6], almeno per il caso trattato in [8], attraverso le versioni lagrangiane corrispondenti.

Söderholm, in [9], generalizza [8] al caso in cui i funzionali $\mathcal{F}^{(\nu)}$ sono funzioni del moto locale di \mathcal{S} in \mathbf{X} . Tuttavia, limitandosi a spazi piatti, postula una versione locale del PIM scartando il PNSR. Dal suo teorema di equivalenza risulta che, nei casi comuni alle teorie [6], [8] e [9], queste sono equivalenti.

Recentemente Maugin [10], [11] e Lianis [12] e [13] hanno presentato in uno spazio-tempo arbitrario una versione parziale del PIM. Si tratta della parte rotazionale del PIM nel senso considerato in Bressan [28] ove si estende il PIM in Fisica classica ed ove si discute l'opportunità di postulare, in certi casi, solo parti di esso. A differenza di [6], [8] e [9], in [13], ad es., si richiede una certa covarianza delle equazioni costitutive in \mathbf{X} per trasformazioni di coordinate che fanno passare da un sistema arbitrario di coordinate (x^α) di V_4 a quello individuato dai successivi riferimenti propri per \mathbf{X} che si trasportano secondo Fermi lungo W . Escludendo a priori la dipendenza degli $\mathcal{F}^{(\nu)}$ dalla storia $a^{(\nu)}$ dell'accelerazione intrinseca, nei casi trattati in comune, questa teoria equivale alle precedenti.

Poichè in questo articolo si considerano soltanto materiali differenziali, è sufficiente considerare la versione del PIM data in [13].

Nel presente lavoro, dopo alcuni richiami e qualche considerazione preliminare di cinematica relativistica (n. 1), si deducono (n. 2) in Relatività ristretta l'espressione locale del bilancio di energia interna ed una forma equivalente della naturale generalizzazione relativistica, proposta da Pham Mau Quan [14], della disegualianza di Clausius-Duhem.

Queste due relazioni consentono di stabilire il n. 3 la disegualianza relativistica di dissipazione ridotta e quindi di enunciare il principio di dissipazione in Relatività ristretta.

Sempre al n. 3, utilizzando il principio di oggettività enunciato nei citati lavori [10], ..., [13], si introduce una classe di equazioni costitutive in cui le variabili fondamentali sono il gradiente intrinseco di deformazione \tilde{F}_L^α (n. 1), la temperatura propria θ nonchè le sue derivate $\partial\theta/\partial\tau$, $\partial\theta/\partial y^L$ ⁽⁵⁾ ed infine l'accelerazione di universo A^α .

(5) Qui τ è il tempo proprio per la generica particella $X \in \mathcal{S}$ ed (y^L) è un sistema di coordinate materiali atte ad individuare, in una configurazione di riferimento C^* , le particelle di \mathcal{S} .

Per giustificare la dipendenza delle equazioni costitutive da $\partial\theta/\partial\tau$, si ricordi che, già nel caso classico, D. Bogy e P. Naghdy [15] hanno mostrato che occorre postulare tale dipendenza per ottenere onde termiche con velocità finita di propagazione. A maggior ragione quindi ciò va supposto in Relatività, dove la velocità di ogni agente fisico è inferiore a quella c della luce nel vuoto ⁽⁶⁾. Per quanto riguarda la dipendenza da A^α si mostrerà (n. 4) che essa può eliminarsi soltanto quando possa ritenersi nullo l'impulso termico \mathbf{h}^0/c , dove \mathbf{h}^0 è il vettore corrente di calore nel riferimento proprio \mathring{I} per la particella $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$.

L'analisi delle conseguenze derivanti dall'imporre il principio di dissipazione alle equazioni costitutive, è condotta al n. 4. In proposito, le conclusioni più interessanti sono:

- a) l'energia libera (specificata) propria ψ° è funzione soltanto di \mathring{F}^i : e θ^0 ;
- b) ψ° è potenziale termodinamico per l'entropia (specificata) propria $\eta_{(e)}^0$ all'equilibrio;
- c) ψ° è potenziale termodinamico per il tensore spazio-temporale degli sforzi $\pi^{\alpha\beta}$ che, nel riferimento proprio \mathring{I} per $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$, è definito dalla matrice

$$\overset{\circ}{\pi}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{i}^{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

dove $\overset{\circ}{i}^{ij}$ è il tensore (spaziale) degli sforzi in \mathring{I} ;

- d) non essendo nullo in Relatività l'impulso termico \mathbf{h}^0/c^2 , il quadrivettore corrente di calore q^α , definito dalla condizione

$$\overset{\circ}{q}^\alpha = (\mathbf{h}^0/c^2, 0),$$

dipende *necessariamente* da A^α .

- e) Se U^α è la quadrirelocità di $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$, $U^\alpha(\partial\psi^\circ/\partial\mathring{F}_L^\alpha) = 0$.

⁽⁶⁾ Per le relativizzazioni dell'ipotesi di Fourier e dell'equazione di conduzione del calore e del loro collegamento con il primo principio della termodinamica, cfr. A. Bressan [6], pagg. 12 e 18. Per il caso classico, cfr. anche [26], pag. 111.

Risulta così che, mentre i risultati classici *a*), *b*) e *c*) continuano a valere anche in Relatività ristretta, almeno nel riferimento proprio \hat{I} , il risultato *d*) è di natura essenzialmente relativistica essendo connesso al non annullarsi dell'impulso termico h^0/c^2 . Inoltre, esso comporta anche che la relativizzazione di C. Cattaneo [27] dell'ipotesi di Fourier, escludendo tale dipendenza, risulta incompleta. Per quanto riguarda la condizione *e*) si prova che essa deriva anche dal principio di oggettività proposto in [10], ..., [13] (e qui adottato) secondo il quale ψ^0 dipende da \hat{F}_L^α attraverso il tensore relativistico di Cauchy-Green $\hat{C}_{LM} = g_{\alpha\beta} \hat{F}_L^\alpha \hat{F}_M^\beta$ cosicchè non vi è contrasto tra la diseuguaglianza dell'entropia di Pham Mau Quan ed il principio di oggettività relativistico.

Infine, al n. 5 si analizzano le conseguenze derivanti dal non annullarsi dell'impulso termico sulla termodinamica relativa al generico osservatore inerziale *I* approssimata al 1° ordine in v/c . Precisamente, dopo aver dedotto le espressioni relative del bilancio di energia interna e della diseuguaglianza di Clausius-Duhem, si prova, tra l'altro, che i risultati *a*), *b*) e *c*) continuano a valere rispetto al generico osservatore inerziale *I* a meno di termini del 2° ordine in v/c .

1. Alcuni richiami di cinematica relativistica e considerazioni preliminari.

Siano V_4 lo spazio-tempo della Relatività ristretta di segnatura $(+, +, +, -)$ e Γ la congruenza del genere tempo delle ∞^3 traiettorie d'universo delle particelle di un sistema continuo \mathcal{S} riguardato come varietà differenziabile tridimensionale (euclidea).

Ad un sistema di coordinate locali (y^L) di \mathcal{S} si dà il nome di *coordinate materiali* sicchè, se (x^α) sono le coordinate rettilinee rappresentative in V_4 di un riferimento inerziale *I*, il moto di \mathcal{S} rispetto ad *I* è rappresentato in V_4 dal sistema:

$$(1) \quad x^\alpha = \varphi^\alpha(y^L, u),$$

dove *u* è un parametro variabile sulle curve di Γ . In particolare, se τ è il *tempo proprio* per la generica particella di \mathcal{S} e $t = x^4/c$ è il *tempo relativo* al riferimento *I* o *tempo coordinato*, può porsi:

$$u = \tau,$$

oppure,

$$u = x^4/c,$$

e conseguentemente le equazioni del moto di S assumeranno le seguenti altre forme:

$$(2) \quad \begin{cases} x^\alpha = \psi^\alpha(y^L, \tau), \\ x^\alpha = x^\alpha(y^L, x^4), \end{cases}$$

a seconda che si utilizzi il tempo proprio τ od il tempo coordinato t .

È ben noto che ⁽⁷⁾, detto Υ il campo dei vettori unitari tangenti alle curve di Γ , ogni vettore (p, v) di V_4 può decomporre in un *componente spaziale* (p, \tilde{v}) nel sottospazio tridimensionale Σ_Γ ortogonale a Υ in p , ed in un *componente temporale* $(p, \lambda\Upsilon \equiv v')$ lungo Υ dove

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{v}^\alpha = P_\beta^\alpha v^\beta, \\ \lambda = -\gamma_\beta v^\beta, \quad v' = -\gamma_\beta v^\beta \Upsilon, \end{cases}$$

essendo

$$(4) \quad P_\beta^\alpha \equiv g_\beta^\alpha + \gamma^\alpha \gamma_\beta = g_\beta^\alpha + \frac{U^\alpha U_\beta}{c^2}$$

l'operatore di proiezione spaziale su Σ_Γ ed

$$(5) \quad U^\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \tau} = c\gamma^\alpha$$

la *quadrivelocità* della generica particella $X \in S$.

Accanto alla congruenza Γ si consideri un'altra congruenza \mathcal{A} del genere tempo costituita dalle ∞^3 traiettorie d'universo delle particelle di un riferimento (fluidico) R .

Al diffeomorfismo $\psi_\tau: C_* \rightarrow C_\tau$ tra C_* e la sezione $\tau = \text{cost}$ delle curve di Γ , ottenuto fissando τ nelle (2)₁, si darà il nome di *deformazione* (finita) *intrinseca* od *assoluta* di Γ rispetto a C_* . Analogamente, se

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(y^L, y^0)$$

sono le equazioni del moto di S rispetto ad R , con dy^0 *intervallo di tempo standard* di R lungo le curve di \mathcal{A} , al diffeomorfismo $\varphi_{y^0}: C_* \rightarrow C_{y^0}$ tra C_* e la sezione $y^0 = \text{cost}$. delle curve di Γ , ottenuto fissando y^0

(⁷) Cfr. [6], pag. 152.

in queste ultime equazioni, si darà il nome di *deformazione relativa ad R di S rispetto a C**.

Appare così che, nello studio del moto di S ed in particolare delle deformazioni finite, ci si può porre da due punti di vista, l'uno *intrinseco* ($R \equiv S$) e l'altro *relativo*.

Il primo punto di vista costituisce l'oggetto dei lavori di Ehlers [17], Synge [18], Bressan [19], Bragg [8], Söderholm [9]; il secondo è discusso da Castagnino [20], Romano [21], [22], Grassini [23] ed. a differenza del primo, che è di significato puramente geometrico, consente di formulare la cinematica di S in termini di grandezze *relative* all'osservatore R.

In questo numero, tra l'altro, mi propongo di richiamare le nozioni di *gradiente assoluto di deformazione* ⁽⁸⁾ e di *gradiente relativo di deformazione* ⁽⁹⁾, che utilizzerò nei successivi numeri e di esplicitarne il legame.

Siano (y^L) ed (x^α) un punto di C_* e la sua immagine in C nel diffeomorfismo ψ_τ sopra definito. Si chiama *vettore immagine* (intrinseco) del vettore (dy^L) in (y^L) quel vettore $(\tilde{d}x^\alpha)$ in (x^α) i cui estremi coincidono con i punti d'intersezione della piattaforma spaziale Σ_T , associata a Γ in (x^α) , con le traiettorie d'universo delle particelle (y^L) ed $(y^L + dy^L)$ di S.

Il vettore $(\tilde{d}x^\alpha)$ si ottiene differenziando la (2)₁

$$(6) \quad \tilde{d}x^\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y^L} dy^L + U^\alpha d\tau$$

ed imponendo la condizione

$$(7) \quad \tilde{d}x^\alpha U_\alpha = 0 ;$$

da (6) e (7) si ottiene poi:

$$(8) \quad \tilde{d}x^\alpha = \tilde{F}_L^\alpha dy^L ,$$

dove

$$(9) \quad \tilde{F}_L^\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y^L} + \frac{U^\alpha U_\beta}{c^2} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial y^L} = P_\beta^\alpha \frac{\partial \psi^\beta}{\partial y^L}$$

⁽⁸⁾ Cfr. [17], [18], [19], [8], [9].

⁽⁹⁾ Cfr. [21].

è il *gradiente assoluto di deformazione*. È immediato verificare che

$$(10) \quad \tilde{F}_L^\alpha U_\alpha = 0.$$

In [3], si prova che \tilde{F}_L^α è un doppio tensore, cioè si trasforma come un vettore rispetto ai cambiamenti di coordinate in V_4 ed ancora come un vettore rispetto ai cambiamenti di coordinate in C_* ; inoltre, sempre in [3], si prova che \tilde{F}_L^α dipende soltanto dalla congruenza I e non dalla sua particolare rappresentazione (2)₁.

Si vogliono qui ricordare le seguenti relazioni che saranno utili nel seguito posto

$$(11) \quad (\tilde{F}^{-1})_\alpha^L \equiv \frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha},$$

si ha:

$$(12) \quad \begin{cases} (\tilde{F}^{-1})_\alpha^L \tilde{F}_M^\alpha = \delta_M^L, \\ (\tilde{F}^{-1})_\beta^L \tilde{F}_L^\alpha = P_\beta^\alpha. \end{cases}$$

Si cominci con l'osservare che, essendo y^L e τ variabili indipendenti,

$$\frac{\partial y^L}{\partial \tau} = 0$$

ossia

$$(13) \quad \frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha} U^\alpha = 0.$$

Questo risultato consente di affermare che

$$dy^L = \frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha} d\tilde{x}^\alpha,$$

da cui risulta che la (11) è il gradiente inverso di deformazione. Inoltre, da

$$dy^L = \frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha} d\tilde{x}^\alpha = \frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha} \tilde{F}_L^\alpha dy^M$$

segue appunto la (12)₁ e da

$$d\tilde{x}^\alpha = \tilde{F}_L^\alpha dy^L = \tilde{F}_L^\alpha \frac{\partial y^L}{\partial x^\beta} d\tilde{x}^\beta$$

consegue

$$\left(\tilde{F}_L^\alpha \frac{\partial y^L}{\partial x^\beta} - \delta_\beta^\alpha \right) d\tilde{x}^\beta = 0, \quad \forall d\tilde{x}^\beta \in \Sigma_\Gamma.$$

Quest'ultima relazione comporta poi:

$$\tilde{F}_L^\alpha \frac{\partial y^L}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \sigma^\alpha U_\beta$$

da cui saturando con U^β e tenendo conto di (13), si ottiene appunto la (12)₂.

Si ricordi infine che al tensore

$$(14) \quad \tilde{C}_{LM} = g_{\alpha\beta} \tilde{F}_L^\alpha \tilde{F}_M^\beta$$

si dà il nome di *tensore di Cauchy-Green* (relativistico).

Si consideri ora la congruenza \mathcal{A} che definisce il riferimento R che, in particolare, può essere inerziale. Si definisce *vettore immagine* (relativo) di (dy^L) in (y_L) quel vettore $(d\hat{x}^\alpha)$ nel punto (x^α) , corrispondente di (y^L) nel diffeomorfismo $\varphi_{\nu^0}: C_* \rightarrow C_{\nu^0}$ i cui estremi coincidono con i punti d'intersezione della piattaforma spaziale $\Sigma_{\mathcal{A}}$ associata a \mathcal{A} in (x^α) , con le traiettorie delle particelle (y^L) ed $(y^L + dy^L)$ di Γ .

Il vettore $(d\hat{x}^\alpha)$ si ottiene differenziando le equazioni relative del moto di S

$$(15) \quad d\hat{x}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^L} dy^L + \lambda^\alpha dy^0 \quad \left(\lambda^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^0} \right)$$

ed imponendo la condizione

$$(16) \quad d\hat{x}^\alpha u_\alpha = 0,$$

dove \mathbf{u} è il vettore (unitario) tangente alle curve di \mathcal{A} .

Da queste due ultime relazioni facilmente si deduce che

$$d\hat{x}^\alpha = \hat{F}_L^\alpha dy^L,$$

dove

$$(17) \quad \hat{F}_L^\alpha = (\delta_\beta^\alpha + \lambda^\alpha \gamma_\beta) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^L}$$

è il *gradiente relativo di deformazione* soddisfacente la condizione

$$(18) \quad \hat{F}_L^\alpha u_\alpha = 0.$$

Per la indipendenza di \hat{F}_L^α dalla rappresentazione (2)₁, si può sempre pensare di assegnare il moto nella forma (2)₂; in tal caso, essendo R inerziale, si ricava facilmente

$$(19) \quad \tilde{F}_L^\alpha = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^L} + \gamma^2 \frac{v^i v_j}{c^2} \frac{\partial x^j}{\partial y^L}, 0 \right)$$

ed

$$(20) \quad \hat{F}_L^\alpha = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^L}, 0 \right).$$

In conclusione, assegnato il moto nella forma (2)₂, restano determinati, da (19) e (20), \tilde{F}_L^α ed \hat{F}_L^α ; risultando poi:

$$\begin{cases} \tilde{F}_L^i = \left(\delta_j^i + \gamma^2 \frac{v^i v_j}{c^2} \right) \hat{F}_L^j, \\ \tilde{F}_L^4 = \hat{F}_L^4 = 0, \end{cases}$$

la coppia $(\tilde{F}_L^\alpha, U^\alpha)$ determina la coppia (\hat{F}_L^i, v^i) e viceversa: inoltre,

$$(21) \quad \hat{F}_L^i = \tilde{F}_L^i + O(v^2/c^2).$$

Alla (21) può darsi anche la seguente altra forma:

$$(22) \quad \hat{F}_L^\alpha = P_\beta^\alpha \tilde{F}_L^\beta$$

da cui risulta che: *il gradiente assoluto di deformazione si ottiene proiettando il gradiente relativo di deformazione sulla piattaforma spaziale.*

Infine, si osservi che, se il sistema S è in quiete in un riferimento inerziale \hat{I} , allora il campo $U^\alpha(y^\alpha, \tau)$ è uniforme e le equazioni del moto

risultano

$$x^\alpha = x_0^\alpha + U^\alpha \tau .$$

Pertanto, posto

$$(23) \quad \tau_\alpha = \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} ,$$

è subito visto che

$$(23)' \quad \tilde{\tau}_\alpha = 0 .$$

2. Formulazione assoluta dei principi generali della termomeccanica di un sistema continuo non polare.

È ben noto che, nello spazio-tempo V_4 della Relatività ristretta le equazioni del bilancio della quantità di moto e dell'energia, per un sistema continuo S non polare si scrivono nella seguente forma tensoriale ⁽¹⁰⁾:

$$(24) \quad \partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha ,$$

dove $T^{\alpha\beta}$ è il tensore (simmetrico) *impluso-energia totale* del sistema materiale S ed f^α è la *quadriforza* (esterna) agente sulla unità di volume (proprio) di S .

Nel caso in esame risulta poi ⁽¹¹⁾

$$(25) \quad T^{\alpha\beta} = \varrho^0 U^\alpha U^\beta - \pi^{\alpha\beta} + (U^\alpha q^\beta + U^\beta q^\alpha)$$

ed

$$(26) \quad f^\alpha = (\mathbf{f}, (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r)/c) .$$

Qui, detti $(\overset{\circ}{t}^{ij})$, $(\overset{\circ}{h}^i)$ rispettivamente il tensore degli sforzi (spaziali) ed il vettore corrente di calore, valutati dall'osservatore proprio $\overset{\circ}{I}$, il *tensore spazio-temporale degli sforzi* $\pi^{\alpha\beta}$ ed il *quadrivettore corrente di*

⁽¹⁰⁾ Cfr., ad es., [24], pag. 202.

⁽¹¹⁾ Cfr., ad es., [14], pag. 154; [25], pag. 1010.

calore q^α sono definiti dalle posizioni:

$$(27) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{t}^{ij}, 0), \\ \overset{\circ}{q}^\alpha = (\overset{\circ}{h}^i/c^2, 0). \end{cases}$$

È altresì ben noto che si può sempre porre

$$(28) \quad \varrho_0 = \mu_* \left(1 + \frac{\varepsilon^0}{c^2} \right) \equiv \mu_* \chi$$

ed in tal modo μ_* rappresenta la densità propria di materia ed ε^0 l'energia specifica interna. Inoltre, se non si hanno variazioni di materia, sussiste l'equazione di conservazione della massa propria μ_* :

$$(29) \quad \partial_\alpha (\mu_* U^\alpha) = 0.$$

Per quanto riguarda il secondo principio della termodinamica, come già avvertito nell'introduzione, si adotta la seguente generalizzazione del principio proposto in [14] da Pham Mau Quan

$$(30) \quad \partial_\alpha (s_0 U^\alpha) \geq -c^2 \partial_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta_0} \right) + r_0.$$

Posto poi

$$(31) \quad s^0 \equiv \mu_* \eta^0,$$

con η^0 entropia specifica propria, alla (30), stante (29), può darsi la seguente altra forma

$$(32) \quad \mu_* \dot{\eta}^0 \geq -c^2 \partial_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta^0} \right) + r^0, \quad \left(\dot{\eta}^0 \equiv \frac{d\eta^0}{d\tau} \right).$$

Si vuole ora determinare una importante relazione scalare conseguenza delle (24). Intanto, da (28) e (29) segue

$$\partial_\beta (\varrho^0 U^\alpha U^\beta) = \mu_* \frac{U^\alpha}{c^2} \dot{\varepsilon}_0 + \mu_* \chi A^\alpha, \quad \left(A^\alpha \equiv \frac{dU^\alpha}{d\tau} \right)$$

per cui la (24) si scrive anche

$$(33) \quad \mu_* \frac{U^\alpha}{c^2} \dot{\varepsilon}^0 + \mu_* \chi A^\alpha - \partial_\beta \pi^{\alpha\beta} + \partial_\beta (q^\alpha U^\beta + q^\beta U^\alpha) = f^\alpha .$$

D'altra parte, dalle (27) risulta il carattere spaziale di $\pi^{\alpha\beta}$ e q^α sicchè

$$(34) \quad \begin{cases} \pi^{\alpha\beta} U_\beta = \pi^{\beta\alpha} U_\beta = 0 , \\ q^\alpha U_\alpha = 0 \end{cases}$$

e ancora, da

$$(35) \quad U_\alpha U^\alpha = -c^2 ,$$

si ottengono, per derivazione, le relazioni:

$$(36) \quad \begin{cases} U_\alpha A^\alpha = 0 , \\ U_\alpha \partial_\beta U^\alpha = 0 . \end{cases}$$

Moltiplicando quindi la (33) per U^α e saturando, stante (34)₂, (35), (36)₁ e (26), si ricava:

$$-\mu_* \dot{\varepsilon}^0 - U_\alpha \partial_\beta \pi^{\alpha\beta} + U_\alpha U^\beta \partial_\beta q^\alpha - c^2 \partial_\alpha q^\alpha = r^0$$

e quindi anche, tenuto conto di (34)₁ (carattere spaziale di $\pi^{\alpha\beta}$) e di (36)₂

$$(37) \quad \mu_* \dot{\varepsilon}^0 = \pi^{\alpha\beta} \widetilde{\partial_\beta U_\alpha} - q^\alpha A_\alpha - c^2 \partial_\alpha q^\alpha + r^0 .$$

È immediato verificare che la (37), scritta nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$, coincide con il bilancio locale di energia interna, a meno del termine $-q^\alpha A_\alpha$ che essendo proporzionale all'impulso termico h^0/c^2 , è di natura essenzialmente relativistica. Tale termine, inoltre, rappresenta una produzione locale di potenza determinata dall'impulso h^0/c^2 posseduto dalla particella $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ in $\overset{\circ}{I}$.

3. Diseguaglianze di dissipazione ridotta e processi termodinamici. Equazioni costitutive.

Scritta la (32) nella forma

$$(38) \quad \mu_* \theta^0 \dot{\eta}^0 \geq -c^2 \partial_\alpha q^\alpha + c^2 \frac{q^\alpha g_\alpha}{\theta_0} + r_0 \quad (g_\alpha \equiv \partial_\alpha \theta_0) ,$$

ed eliminando r^0 tra la (37) e la (38), si perviene alla *diseguaglianza (relativistica) di dissipazione ridotta*:

$$(39) \quad -\mu_*[\psi^0 + \eta^0 \dot{\theta}^0] + \pi^{\alpha\beta} \widehat{\partial_\beta U_\alpha} - q^\alpha A_\alpha - c^2 \frac{q^\alpha g_\alpha}{\theta^0} > 0$$

dove

$$(40) \quad \psi^0 = \varepsilon^0 - \theta^0 \eta^0$$

è il *potenziale termodinamico relativistico*.

Per i motivi già chiariti nell'introduzione, si definisce *processo termodinamico* l'insieme di funzioni:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^\alpha = x^\alpha(y^L, \tau), \\ \theta^0 = \theta^0(y^L, \tau) > 0, \\ \psi^0 = \psi^0(y^L, \tau), \\ \pi^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta}(y^L, \tau), \quad (\pi^{\alpha\beta} = \pi^{\beta\alpha}), \\ \eta^0 = \eta^0(y^L, \tau), \\ q^\alpha = q^\alpha(y^L, \tau), \\ f^\alpha = f^\alpha(y^L, \tau), \end{array} \right.$$

dove $x^\alpha(y^L, \tau)$ è del genere tempo per ogni $(y^L) \in C_*$, definiti su $C_* \times R$ e soddisfacenti le equazioni (23) del bilancio (in particolare, la (37)) nonché le condizioni (34) e (35).

Il comportamento del materiale, che qui si suppone differenziale e di complessità 1, è poi fissato con le *equazioni costitutive* (cfr. introduzione)

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^0 = \psi^0(\tilde{F}_L^\alpha, A^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L), \quad (G_L = \partial\theta^0/\partial y^L), \\ \eta^0 = \eta^0(\tilde{F}_L^\alpha, A^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L), \\ \pi^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta}(\tilde{F}_L^\alpha, A^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L), \\ q^\alpha = q^\alpha(\tilde{F}_L^\alpha, A^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L) \end{array} \right.$$

che rappresentano l'estensione relativistica delle equazioni costitutive proposte, per corpi rigidi, da Bogy e Naghdi in [15] per consentire, già in meccanica classica, velocità finita di propagazione del calore in un solido. Tale velocità deve risultare necessariamente finita in Relatività e ciò giustifica la presenza di $\dot{\theta}^0$ nelle (42).

È poi evidente che un processo termodinamico, nel senso prima chiarito, è assegnato quando si conosca il processo termocinetico $x^\alpha = x^\alpha(y^L, \tau)$ e $\theta^0 = \theta^0(y^L, \tau) \equiv \bar{\theta}^0(x^\alpha) > 0$ ⁽¹²⁾.

Infatti, in corrispondenza del processo termocinetico, in ogni istante risultano determinati, per le (6) e (10), \hat{F}_L^α , U^α , θ^0 , $\dot{\theta}^0$ e g_α e quindi, stante (42), ψ^0 , η^0 , $\pi^{\alpha\beta}$ e q^α : infine, dalle equazioni del moto (24) si ricava f^α . Inoltre, poichè la (37) è conseguenza delle (24), (34) e (35), un processo termodinamico verifica anche la (37).

Più complessa, nel caso relativistico, è la verifica del seguente

TEOREMA. *Per ogni particella $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ è possibile trovare un moto locale di un intorno $\mathcal{J}(\mathbf{X})$*

$$(43) \quad x^\alpha = x^\alpha(y^L, \tau), \quad (y^L) \in \mathcal{J}(\mathbf{X}), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

tale che, all'istante τ ed in \mathbf{X} , le grandezze

$$\hat{F}_L^\alpha, U^\alpha, \theta^0, G_L$$

abbiano, nel moto (43), determinazioni verificanti le condizioni

$$U^\alpha U_\alpha = -c^2, \quad (\hat{F}_L^\alpha, U^\alpha) \text{ non singolare, } \hat{F}_L^\alpha U_\alpha = 0,$$

ma per il resto arbitrarie.

DIM. Sia I un riferimento inerziale e si consideri l'insieme delle funzioni

$$(44) \quad x^i(y^L, t) = a^i(t) + \hat{F}_L^i(t)(y^L - \bar{y}^L), \quad \mathbf{X} = (\bar{y}^L).$$

Affinchè le (44) possano interpretarsi come un moto di \mathcal{S} rispetto ad I , occorre e basta che $\hat{F}_L^i(t)$ sia un singolare e che $v^2 < c^2$. Quest'ultima condizione è poi equivalente alla seguente diseuguaglianza:

$$u^2 + 2u_i \hat{F}_L^i \xi^L + \sum_i^3 \hat{F}_L^i \hat{F}_L^i \xi^L \xi^M < c^2 \quad (\xi^L = y^L - \bar{y}^L)$$

⁽¹²⁾ Per il caso classico, cfr., ad es., [2], pag. 8.

dove si è posto $\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{a}}(t)$ che è certamente verificata, per ogni $u^2 < c^2$ e per ogni \hat{F}_L^i , almeno in un intorno $\mathfrak{J}(\mathbf{X})$ di $\xi^L = 0$.

In definitiva, $\nabla(u^i)$ con $u^2 < c^2$, come velocità della particella \mathbf{X} e $\nabla\hat{F}_L^i$ non singolare, le (44), almeno localmente, rappresentano un moto per l'osservatore iniziale I .

Si può così affermare che è sempre possibile assegnare ad arbitrio un moto $x^\alpha = x^\alpha(y^L, \tau)$ di $\mathfrak{J}(\mathbf{X})$ tale che all'istante τ ed in \mathbf{X} sia arbitraria la velocità d'universo $U^\alpha(\tau) = (u^i \gamma, c\gamma)$ ed il gradiente relativo di deformazione $\hat{F}_L^\alpha(\tau)$; ciò, stante (23), consente di assegnare in Σ_I arbitrariamente \hat{F}_I^α .

Per provare l'arbitrarietà delle restanti grandezze, basta considerare la seguente distribuzione di temperatura in I

$$\bar{\theta}(y^L, t) = \alpha(t) + \mathbf{b}(t)[\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}]$$

con \mathbf{x} ed $\bar{\mathbf{x}}$ corrispondenti in C di \mathbf{Y} ed \mathbf{X} rispettivamente, ed imporre la condizione $\bar{\theta} > 0$ per ogni (y^L) .

È ora immediato verificare, stante (23), che

è possibile determinare un moto locale di $\mathfrak{J}(\mathbf{X})$ in modo che, in \mathbf{X} ed all'istante τ , siano arbitrarie le determinazioni

$$\hat{F}_L^\alpha, \hat{F}_L^\alpha, U^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L, \dot{G}_L$$

purchè $U^\alpha U_\alpha = -c^2$, $A^\alpha U_\alpha = 0$, $\theta^0 > 0$ ed (F_L^α, U^α) non singolare.

4. Conseguenze della disequaglianza di dissipazione ridotta.

In questo numero si troveranno le restrizioni sull'equazione costituenti dall'imporre che esse soddisfino la disequaglianza di dissipazione ridotta in ogni processo termodinamico ⁽¹³⁾.

A tal fine si cominci con l'osservare che la (40), può anche scriversi

$$(44) \quad -\mu_*[\dot{\psi}^0 + \eta^0 \dot{\theta}^0] + \pi^{\alpha\beta} \widetilde{(\partial_\beta U_\alpha)} - q_\alpha A^\alpha - c^2 \frac{q^\alpha \tilde{g}_\alpha}{\theta^0} \geq 0,$$

⁽¹³⁾ Cfr. [2], pag. 15; [4], pag. 186.

dove \sim esprime, come già in precedenza, l'operazione di proiezione su $\Sigma_T \otimes \Sigma_T$ rappresentata da $P_\alpha^\lambda P_\beta^\mu$ (14).

Ora, è ben noto che (15)

$$(\widetilde{\dot{F}}_L^\alpha) = \dot{F}_L^\beta (\widetilde{\partial_\beta U_\alpha})$$

da cui ovviamente, stante (12)₂ ed il carattere spaziale di $(\widetilde{\partial_\beta U_\alpha})$,

$$(45) \quad (\widetilde{\partial_\beta U^\alpha}) = (\dot{F}^{-1})_\beta^L (\widetilde{\dot{F}}_L^\alpha).$$

D'altra parte (cfr. (23)),

$$\frac{\partial y^L}{\partial x^\alpha} G_L = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} C_\mu - \tau_\alpha \dot{\theta}^0 = g_\alpha - \tau_\alpha \dot{\theta}^0, \quad (y^4 = \tau)$$

e quindi, per (12)₂ e (3)₁,

$$(46) \quad \tilde{g}_\alpha = (\dot{F}^{-1})_\alpha^L G_L + \tau_\alpha \dot{\theta}^0.$$

Le (45) e (46) consentono poi di scrivere la (44) nella seguente altra forma:

$$(47) \quad -\mu_* \left[\dot{\psi}^0 + \left(\eta^0 + c^2 \frac{q^\alpha \tau_\alpha}{\theta^0} \right) \dot{\theta}^0 \right] + S_\alpha^L (\widetilde{\dot{F}}_L^\alpha) - q^\alpha A_\alpha - \frac{c^2 q^\alpha (\dot{F}^{-1})_\alpha^L G_L}{\theta^0} \geq 0$$

dove si è posto

$$(48) \quad S_\alpha^L = \pi_\alpha^\beta (\dot{F}^{-1})_\beta^L.$$

Derivando quindi la (42)₂ si ottiene:

$$\dot{\psi}^0 = \frac{\partial \psi^0}{\partial \dot{F}_L^\alpha} \dot{F}_L^\alpha + \frac{\partial \psi^0}{\partial \theta^0} \dot{\theta}^0 + \frac{\partial \psi^0}{\partial C_L} \dot{C}_L + \frac{\partial \psi^0}{\partial A^\alpha} \dot{A}^\alpha + \frac{\partial \psi^0}{\partial \dot{\theta}^0} \dot{\dot{\theta}}^0$$

(14) Cfr. [16], pag. 159.

(15) Cfr. [23], pag. 248.

e sostituendo nella (49), si perviene alla seguente diseuguaglianza

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu^* \left[\left(\eta^0 + c^2 \frac{q^\alpha \tau_\alpha}{\theta^0} \right) + \frac{\partial \psi^0}{\partial \theta^0} \right] \dot{\theta}^0 + \left[S_\alpha^L - \mu^* \left(\widetilde{\frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha}} \right) \right] (\tilde{F}_L^\alpha) \\ -\mu^* \left(\frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha} \right)^\parallel (\tilde{F}_L^\alpha)^\parallel - \mu^* \frac{\partial \psi_0}{\partial G_L} \dot{G}_L - \mu^* \frac{\partial \psi^0}{\partial \theta^0} \dot{\theta}^0 - \mu^* \frac{\partial \psi^0}{\partial A^\alpha} \dot{A}^\alpha \\ -q_\alpha A^\alpha - c^2 \frac{q^\alpha (\tilde{F}^{-1})_\alpha^L}{\theta^0} G_L \geq 0 \end{array} \right.$$

che deve risultare verificata per ogni scelta delle quantità indipendenti (cfr. il teorema del n. 3) $\tilde{F}_L^\alpha, \dot{\tilde{F}}_L^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L, \dot{G}_L, A^\alpha, \dot{A}^\alpha$.

Dalla (49) stante (23)' consegue così, con una procedura ormai tradizionale (cfr., ad es., [2] e [3]), che:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = \psi_0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0), \\ \eta_{(e)}^0 = -\frac{\partial \psi^0}{\partial \theta^0} = \eta_{(e)}^0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0), \\ S_\alpha^L = \mu^* \left(\widetilde{\frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha}} \right) = S_\alpha^L(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0), \\ \left(\frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha} \right)^\parallel = 0, \\ \mu^* \eta_{(a)}^0 \dot{\theta}^0 - q^\alpha A_\alpha - c^2 \frac{q^\alpha \tilde{g}_\alpha}{\theta^0} \geq 0, \end{array} \right.$$

dove si è posto

$$\eta^0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L, A^\alpha) = \eta_{(e)}^0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0) + \eta_{(a)}^0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L, A^\alpha)$$

sicchè $\eta_{(e)}^0$ rappresenta l'entropia per processi di equilibrio in cui, cioè, $\dot{\theta}^0 = \dot{G}_L = \dot{A}^\alpha = 0$.

È così possibile concludere che le (50), comportando la (49) in ogni processo termodinamico, sono equivalenti la richiesta che la diseuguaglianza di dissipazione ridotta (47) sia verificata in ogni processo termodinamico per un sistema con equazioni costitutive (42).

Se si eliminasse nelle equazioni costitutive (42) la dipendenza da A^α , la (50)_e comporterebbe allora $q^\alpha = 0$. Riconosciuta così la necessità di

tale dipendenza, si osservi che dalla (50)₅ seguono in particolare le seguenti disequaglianze:

$$\begin{cases} \eta_{(a)}^0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0, \dot{\theta}^0, G_L, 0)\dot{\theta}^0 - c^2 \frac{q^\alpha \tilde{g}_\alpha}{\theta^0} \geq 0, \\ q^\alpha(\tilde{F}_L^\beta, \theta^0, 0, 0, A^\beta)A_\alpha \leq 0 \end{cases}$$

la prima delle quali è la relativizzazione di un risultato di Bogy e Naghdi in [15], form. 3.10, laddove la seconda mostra che *si può avere passaggio di calore, anche in assenza di variazioni spaziali e temporali di temperatura, per la sola presenza di accelerazione.*

Si vuole ancora osservare che la condizione (50)₄ è già contenuta nella richiesta di validità del principio dell'indifferenza dal riferimento proposto in [13] e qui accettato. Infatti, da detto principio, in particolare, consegue

$$(51) \quad \psi^0 = \psi^0(\tilde{F}_L^\alpha, \theta^0) = \bar{\psi}^0(\tilde{C}_{LM}, \theta^0),$$

dove \tilde{C}_{LM} è il tensore di deformazione di Cauchy-Green definito dalla (14). Pertanto.

$$(52) \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha} = \frac{\partial \bar{\psi}^0}{\partial \tilde{C}_{NM}} \frac{\partial \tilde{C}_{NM}}{\partial \tilde{F}_L^\alpha} = 2g_{\alpha\nu} \tilde{F}_N^\nu \frac{\partial \bar{\psi}^0}{\partial \tilde{C}_{LN}},$$

sicché

$$U^\alpha \frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha} = 2 U_\nu \tilde{F}_N^\nu \frac{\partial \bar{\psi}^0}{\partial \tilde{C}_{LN}} = 0$$

ed è provato il carattere spaziale di $\partial \psi^0 / \partial \tilde{F}_L^\alpha$ come conseguenza della (51).

Infine, è subito visto che per le (50)_{3,4} sussiste la relazione

$$S_L^\alpha = \mu_* \frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\alpha},$$

che, stante (48) e (12)₁ può anche scriversi:

$$(53) \quad \pi_{\beta}^\alpha = \mu_* \tilde{F}_L^\alpha \frac{\partial \psi^0}{\partial \tilde{F}_L^\beta}.$$

La (53) costituisce la generalizzazione relativistica della relazione clas-

sica sforzo-deformazione ed anzi ad essa si riduce nel riferimento proprio della particella considerata.

Quando si tenga conto anche del principio di indifferenza dal riferimento proposto in [13], da (52) e (53) si ha

$$\pi_{\beta}^{\alpha} = 2\mu_{*} \tilde{F}_{L}^{\alpha} \frac{\partial \bar{\psi}^0}{\partial \tilde{C}_{LM}} g_{\beta\nu} \tilde{F}_{M}^{\nu}$$

e quindi anche

$$(54) \quad \pi^{\alpha\beta} = 2\mu_{*} \tilde{F}_{L}^{\alpha} \frac{\partial \bar{\psi}^0}{\partial \tilde{C}_{LM}} \tilde{F}_{M}^{\beta}.$$

5. Considerazioni sulla termodinamica relativa approssimata a meno di termini del 2° ordine in v/c .

Nei precedenti numeri si è discussa una formulazione della termodinamica relativistica in cui intervengono grandezze che, pur essendo definite in ogni sistema di coordinate rettilinee di V_4 , hanno contenuto fisico soltanto nel riferimento proprio \check{I} per la generica particella $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$. Si è poi mostrato che, in tale riferimento, le conclusioni della termodinamica relativistica qui sviluppata differiscono dalle corrispondenti conclusioni classiche per la presenza dell'impulso relativistico \mathbf{h}^0/c^2 associato al vettore corrente di calore. Quando si possa ritenere nullo questo impulso, i risultati classici e quelli relativistici coincidono in \check{I} .

Nulla ancora si è detto sul significato fisico delle grandezze via via introdotte e dei principi enunciati, nel generico riferimento inerziale I . A tal fine in questo numero si considererà un'approssimazione al 1° ordine in v/c della termodinamica relativistica rispetto al generico riferimento inerziale mostrando in che modo i risultati classici differiscono da quelli relativistici per la presenza dell'impulso termico \mathbf{h}^0/c^2 .

Si cominci col ricordare che, al 1° ordine in v/c , i coefficienti della trasformazione $\check{I} \rightarrow I$ si scrivono ⁽¹⁶⁾.

$$(55) \quad \overset{\circ}{A}_j^i \simeq \delta_j^i, \quad \overset{\circ}{A}_4^{\alpha} \simeq \frac{U^{\alpha}}{c}, \quad \overset{\circ}{A}_i^4 \simeq \frac{U_i}{c};$$

⁽¹⁶⁾ Cfr. formula (2.27) di [24], pag. 41.

pertanto

$$q^i = \overset{\circ}{A}_j^i \overset{\circ}{q}^j \simeq \delta_j^i \frac{\overset{\circ}{h}^j}{c^2} = \frac{\overset{\circ}{h}^i}{c^2},$$

$$q^4 = \overset{\circ}{A}_i^4 \overset{\circ}{q}^i \simeq \frac{\overset{\circ}{h}^i v_i}{c^3}$$

e quindi, posto $q^i = h^i/c^2$, si ha

$$(56) \quad \begin{cases} q^i \equiv \frac{h^i}{c^2} \simeq \frac{\overset{\circ}{h}^i}{c^2}, \\ q^4 \simeq \frac{h^i v_i}{c^3}. \end{cases}$$

Analogamente si prova che

$$(57) \quad \pi^{ij} \simeq \overset{\circ}{\pi}^{ij} \equiv \overset{\circ}{i}^i.$$

Inoltre, da

$$(58) \quad \widetilde{\partial_\beta U_\alpha} = P_\beta^\lambda P_\alpha^\mu \partial_\lambda U_\mu$$

ed osservando che, per la (4) in $\overset{\circ}{I}$ risulta

$$(P_\beta^\lambda)^\circ \simeq \left\| \begin{array}{c|c} \delta_j^i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

sempre in $\overset{\circ}{I}$ ed al prim'ordine in v/c , si ha anche

$$(\widetilde{\partial_\beta U_\alpha})^\circ \simeq \left\| \begin{array}{c|c} (\partial_j U_i) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

D'altra parte è

$$U_\alpha \simeq (v_i, -c)$$

sicchè

$$(59) \quad (\partial_j U_i)^\circ \simeq (\partial_j v_i)^\circ.$$

Indicando poi con $\overset{\circ}{A}_\beta^\alpha$ i coefficienti della trasformazione $I \rightarrow \overset{\circ}{I}$, dalle (5)

si ha ovviamente:

$$(60) \quad A_j^i \simeq \delta_j^i, \quad A_\alpha^4 \simeq -\frac{U_\alpha}{c}, \quad A_4^i \simeq -\frac{U^i}{c}$$

e quindi

$$(\partial_j)^0 \simeq \delta_j^i \partial_i + \frac{A_j^4}{c} \partial_t \simeq \partial_j - \frac{v_j}{c^2} \partial_t$$

da cui, stante (58) e (59), consegue:

$$(61) \quad (\widetilde{\partial_j U_i})^0 \simeq \partial_j v_i - \frac{v_j}{c^2} \partial_t v_i$$

Si osservi infine che per (56)

$$(62) \quad -c^2 \partial_\alpha q^\alpha \simeq -\partial_i h^i - \frac{v_i}{c^2} \frac{\partial h^i}{\partial t} - \frac{h^i a_i}{c^2} + \frac{h^i v^j}{c^2} \partial_j v_i$$

e

$$(63) \quad A_\alpha \simeq \left(a_i, -\frac{a_j v^j}{c} \right)$$

Scritta quindi la (37) nella forma

$$\mu_* \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\tau} \simeq \hat{\pi}^{ij} (\widetilde{\partial_j v_i})^0 - c^2 \partial_\alpha q^\alpha - q^\alpha A_\alpha + \hat{r},$$

è subito visto che per (61), (62) e (63) essa può scriversi anche nella seguente altra forma relativa al generico osservatore inerziale I :

$$(64) \quad \mu \frac{d\varepsilon^0}{dt} \simeq \boldsymbol{\pi} : \text{grad } \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{h} - 2 \frac{\mathbf{h}}{c^2} \cdot \mathbf{a} + \sigma(\mathbf{v}) + \hat{r}$$

dove $\mu = \mu_* \gamma \simeq \mu_*$ è la densità di massa relativa e

$$(65) \quad \sigma(\mathbf{v}) = -\frac{1}{c^2} [\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{h} \otimes \mathbf{v} : \text{grad } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \partial_i \mathbf{h}]$$

è uno scalare nullo in \hat{I} .

Si può così affermare che *le differenze tra la (65) ed il bilancio clas-*

sico di energia (interna) per il generico osservatore inerziale sono dovute ai due impulsi relativistici $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}/c^2$ ed \mathbf{h}/c^2 .

In modo analogo, introdotte le quantità relative

$$\eta = \eta^0, \quad \theta = \theta^0$$

la (32) si scrive

$$(66) \quad \mu \frac{d\eta}{dt} \geq - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{h}}{\theta} \right) - \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{a}}{c^2 \theta} + \varrho(\mathbf{v}) + \frac{\dot{r}}{\theta}$$

dove

$$\varrho(\mathbf{v}) = \frac{1}{c^2 \theta} [\mathbf{v} \otimes \mathbf{h} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \partial_i \mathbf{h}]$$

è uno scalare nullo in \hat{I} .

Pertanto, la diseuguaglianza relativistica di Clausius-Duhem (66), al 1° ordine in v/c differisce da quella classica per la presenza dell'impulso termico \mathbf{h}/c^2 .

Le (65) e (66) mostrano altresì che è molto più agevole dedurre le conseguenze della diseuguaglianza di dissipazione ridotta in V_4 invece che nel generico riferimento inerziale e successivamente interpretare i risultati ottenuti in V_4 in termini di grandezze relative.

Così, osservando che per la (22), al prim'ordine in v/c , è

$$\hat{F}_L^i \simeq \hat{F}_L^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^L} \right),$$

dalle (50) e (54), si ottiene:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi^0 = \hat{\psi}^0(\hat{F}_L^i, \theta), \\ \eta_{(e)} = \hat{\eta}_{(e)}(\hat{F}_L^i, \theta) = - \partial_\theta \hat{\psi}^0, \\ \pi^{ij} \simeq 2\mu \hat{F}_L^i \frac{\partial \hat{\psi}^0}{\partial \hat{C}_{LM}} \hat{F}_M^j, \\ \left(\mu \eta_{(a)} + \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{a}}{c^2} - \frac{\mathbf{h} \cdot \operatorname{grad} \theta}{\theta} \geq 0, \end{array} \right.$$

le quali mostrano che quando si possa trascurare l'impulso termico, le relazioni (62) coincidono con le corrispondenti classiche in ogni sistema di riferimento a meno di termini del 2° ordine in v/c .

Allo scopo di determinare in quali condizioni i termini $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{v}/c^2 \theta) \dot{\theta}$ ed $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{a})/c^2$ sono trascurabili rispetto al termine classico $(\mathbf{h} \cdot \text{grad } \theta)/\theta$, basta introdurre le quantità di confronto θ , L , U , T di temperatura, lunghezza, velocità e tempo. In tal modo, indicando con un asterisco le corrispondenti quantità adimensionali, si ottiene

$$\frac{v\dot{\theta}}{c^2\theta} - \frac{\mathbf{a}}{c^2} - \frac{\text{grad } \theta}{\theta} = \frac{v^*\dot{\theta}^*}{\theta^*} - \frac{LU}{c^2 T} - \mathbf{a}^* \frac{LU}{c^2 T} - \frac{\text{grad}^* \theta^*}{\theta^* L}.$$

Questa relazione mostra che se le frequenze in gioco non sono molto elevate ($T \simeq L/U$), i primi due termini sono del 2° ordine in v/c e pertanto trascurabili rispetto al termine $\text{grad } \theta/\theta$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **2** (1958), 197-226.
- [2] B. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 1-46.
- [3] C. TRUESDELL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, Band III/3, Springer, 1965.
- [4] C. TRUESDELL, *The non-linear field theories in mechanics*, in *Topics in Non-Linear Physics*, Springer, 1966.
- [5] G. MAUGIN, *Sur l'axiome du voisinage et la dépendance fonctionnelle des lois de comportement en mécanique relativiste des milieux continus*, C. R. Acad. Sc. Paris, **275**, série A (1972), 405.
- [6] A. BRESSAN, *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **34** (1964), 1-73.
- [7] A. BRESSAN, *On relativistic thermodynamics*, Nuovo Cimento, **48 B** (1967), 201-222.
- [8] L. BRAGG, *On relativistic worldlines and motions and on non-sentient response*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 127-166.
- [9] L. SÖDERHOLM, *A principle of objectivity for relativistic continuum Mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **39** (1971), 89-107.
- [10] G. MAUGIN, *Sur una possibile definizione du principe d'indifférence matérielle en relativité général*, C. R. Acad. Sc. Paris, **275**, série A (1972), 319-322.
- [11] G. MAUGIN, *Sur quelques applications du principe d'indifférence matérielle in relativité*, C. R. Acad. Sc. Paris, **275**, série A (1972), 349-352.

- [12] G. LIANIS, *The formulation of constitutive equations in continuum Relativistic Physics*, Nuovo Cimento, **66 B** (1970), 239-259.
- [13] G. LIANIS, *The general form of constitutive equations in Relativistic Physics*, Nuovo Cimento, **14 B** (1973), 57-105.
- [14] P. M. QUAN, *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques*, Ann. di Mat. pura e appl., (IV), **38** (1955), 121.
- [15] D. BOGY - D. NAGHDI, *On heat conduction and wave propagation in rigid solids*, Journ. Math. Phys., **11**, no. 3 (1970), 917-923.
- [16] C. CATTANEO, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione* V. Veschi, Roma, 1961.
- [17] J. EHLERS, *Relativistic thermodynamics and its relations to interior solutions of the gravitational field equations*, in *Recent Developments in General Relativity*, Pergamon Press, 1962.
- [18] J. SYNGE, *Relativity: the general theory*, Amsterdam, 1960.
- [19] A. BRESSAN, *Cinematica dei sistemi continui in Relatività generale*, Ann. di Mat. pura e appl., (IV), **62** (1963), 99-148.
- [20] M. CASTAGNINO, *Sulle congruenze di curve nulle in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Rend. di Mat. Roma, **22** (1959).
- [21] A. ROMANO, *Sul gradiente relativo di deformazione in Relatività generale*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, serie IV, **36** (1969), 336-347.
- [22] A. ROMANO, *Sulla cinematica di un sistema continuo in Relatività generale*, Ric. di Mat. Napoli, **19** (1970), 208-224.
- [23] R. GRASSINI, *Sull'equazione di evoluzione nella cinematica relativa dei sistemi continui in Relatività generale*, Ric. di Mat. Napoli, **19** (1971), 241-252.
- [24] C. MÖLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford, 1972.
- [25] G. MAUGIN, *L'inégalité de Clausius-Duhem pour des milieux continus relativistes*, C. R. Acad. Sc. Paris, **273**, série A (1971), 1010-1012.
- [26] C. TRUESDELL, *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, 1969.
- [27] C. CATTANEO, *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **3**, no. 1 (1948), 83.
- [28] A. BRESSAN, *On the principle of material indifference and local equivalence*, Meccanica, **7**, no. 1 (1972).
- [29] A. BRESSAN, *MDNCA*. "On the principle of material indifference in relativity", Lettere al Nuovo Cimento, **11** (1974) 134

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1974.