RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALESSANDRO TANCREDI

Sur les espaces annelés avec groupe d'opérateurs

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 97-104

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__97_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Echange Annales

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Sur les espaces annelés avec groupe d'opérateurs.

ALESSANDRO TANCREDI (*)

SUMMARY - Let Λ be a finite discrete group of automorphisms of a ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ and let $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$ be the quotient ringed space, where X/Λ is the quotient topological space of X by Λ and $\mathcal{O}_X^\Lambda$ the sheaf of Λ-invariant sections of $\mathcal{O}_X$. Then it is proved that, if X is a Hausdorff space, the quotient ringed space is characterized locally only by the action of the stabilizers of the points of X. Some applications are also given.

Introduction.

Soit Λ un groupe fini discret d'automorphismes d'un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$; on définit un espace annelé quotient $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$, où X/Λ est l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence induite par le groupe Λ et $\mathcal{O}_X^\Lambda$ est le faisceau des sections invariantes. On montre que, si X est séparé, du point de vue local l'espace quotient peut être caractérisé seulement par l'action des stabilisateurs des points de l'espace topologique sous-jacent à l'espace annelé considéré. Dans le cas d'un espace topologique ce résultat est bien connu [1]. Comme application on montre que, si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace analytique (resp. une variété analytique, resp. une variété différentiable), on peut obtenir toujours l'espace quotient par recollement de quotients de modèles locaux d'espace analytique (resp. de variété analytique, resp. de variété différentiable).

Je remercie ici les professeurs I. Bucur et F. Succi pour les conversations très utiles et l'intérêt soutenu qu'ils on montré pour ce travail.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università di Perugia, Italia.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

1. Espaces quotient.

Tous les groupes considérés seront supposés finis discrets.

DÉFINITION 1. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé et Λ un groupe d'automorphismes de $(X, \mathcal{O}_X)$. Un élément $\lambda \in \Lambda$ est un couple $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ où $\lambda_0 \colon X \to X$ est un homéomorphisme et $\lambda_1 \colon \mathcal{O}_X \to \lambda_{0*}(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme de faisceaux.

On dira que $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ est un *espace annelé avec un groupe d'opérateurs*, ou que *le groupe Λ opère sur l'espace annelé* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Soient $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y, \Omega)$ deux espaces annelés avec groupe d'opérateurs; on appelle morphisme d'espaces annelés avec groupe d'opérateurs, et on le note $\hat{\varphi} \colon (X, \mathcal{O}_X, \Lambda) \to (Y, \mathcal{O}_Y, \Omega)$, un couple $(\varphi, \tilde{\varphi})$ où $\varphi \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces annelés et $\tilde{\varphi} \colon \Lambda \to \Omega$ un morphisme de groupes qui vérifient la condition suivante: $\varphi\lambda = \tilde{\varphi}(\lambda)\varphi$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Cette condition équivaut à chacune des deux conditions suivantes:

i) pour tout $\lambda \in \Lambda$, si l'on pose $\omega = \tilde{\varphi}(\lambda)$, on a $\varphi_0\lambda_0 = \omega_0\varphi_0$ et pour tout ouvert V de Y le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD}
\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) @>{\varphi_{1V}}>> \Gamma(\varphi_0^{-1}(V), \mathcal{O}_X)\\
@V{\omega_{1V}}VV @VV{\lambda_{1\varphi_0^{-1}(V)}}V\\
\Gamma(\omega_0^{-1}(V), \mathcal{O}_Y) @>>{\varphi_{1\omega_0^{-1}(V)}}> \Gamma((\omega_0\varphi_0)^{-1}(V), \mathcal{O}_X)
\end{CD}\ ;$$

ii) pour tout $\lambda \in \Lambda$, si l'on pose $\omega = \tilde{\varphi}(\lambda)$, on a $\varphi_0\lambda_0 = \omega_0\varphi_0$ et pour tout $x \in X$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{CD}
\mathcal{O}_{Y,\omega_0\varphi_0(x)} @>{\varphi^*_{\lambda_0(x)}}>> \mathcal{O}_{X,\lambda_0(x)}\\
@V{\omega^*_{\varphi_0(x)}}VV @VV{\lambda^*_x}V\\
\mathcal{O}_{Y,\varphi_0(x)} @>>{\varphi^*_x}> \mathcal{O}_{X,x}
\end{CD}\ .$$

Soient $\hat{\varphi} \colon (X, \mathcal{O}_X, \Lambda) \to (Y, \mathcal{O}_Y, \Omega)$ et $\hat{\psi} \colon (Y, \mathcal{O}_Y, \Omega) \to (Z, \mathcal{O}_Z, \Theta)$ deux morphismes d'espaces annelés avec groupe d'opérateurs; il est clair que le couple $(\psi\varphi, \tilde{\psi}\tilde{\varphi})$ définit un morphisme, qui sera par définition le morphisme composé $\hat{\psi}\hat{\varphi}$.

Les espaces annelés avec groupe d'opérateurs forment une catégorie par la loi de composition des morphismes qu'on a définie; si l'on note avec **Ann** la catégorie des espaces annelés, on notera avec $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$ cette nouvelle catégorie. Si l'on considère, au lieu de **Ann**, les catégories $\mathbf{Ann}_{/k}$ des espaces annelés en k-algèbres, et $\mathbf{Loc}_{/k}$ des espaces annelés en k-algèbres locales, dont le corps résiduel est k-isomorphe à k, on peut définir de la même façon les catégories $(\mathbf{Ann}_{/k})^{\mathcal{G}}$ et $(\mathbf{Loc}_{/k})^{\mathcal{G}}$, sous-catégories de $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$.

Définition 2. Soit $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ un objet de $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$; on définit sur l'espace topologique X la relation d'équivalence suivante: $x\mathcal{R}_\Lambda x'$ si et seulement s'il existe $\lambda\in\Lambda$ tel que $\lambda_0(x)=x'$; il est clair que cette relation est ouverte et fermée. On dira qu'un sous-ensemble de X est *Λ-saturé* s'il est saturé pour $\mathcal{R}_\Lambda$. Soit enfin X/Λ l'espace quotient de X par $\mathcal{R}_\Lambda$ et $\pi_X\colon X\to X/\Lambda$ l'application canonique.

Définition 3. Soit $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ un objet de $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$, V un ouvert de X/Λ et $U=\pi_X^{-1}(V)$; on définit un préfaisceau $\mathcal{O}_X^\Lambda$ sur X/Λ de la façon suivante:

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X^\Lambda)=\{s\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)\,|\,s=\lambda_{1U}(s) \text{ pour tout } \lambda\in\Lambda\}\,.$$

On vérifie que le préfaisceau $\mathcal{O}_X^\Lambda$ est un faisceau sur l'espace topologique X/Λ, sous-faisceau de $\pi_{X*}(\mathcal{O}_X)$. On appelera section *Λ-invariante* toute section du faisceau $\mathcal{O}_X^\Lambda$.

Lemme 1. *Soient $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ un objet de $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$, U un ouvert de X et V le saturé de U pour $\mathcal{R}_\Lambda$; si pour une section Λ-invariante $s\in\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ on a $s|_U=0$, alors il en résulte $s=0$.*

Démonstration. Pour tout $\lambda\in\Lambda$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\lambda_{1V}"] \arrow[d] & \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\lambda_{1U}"'] & \Gamma(\lambda_0^{-1}(U), \mathcal{O}_X)\,. \end{tikzcd}$$

Puisque $V=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\lambda_0^{-1}(U)$, on a $s=0$.

BLIOTHE

DÉFINITION 4. Soit $\hat{\varphi}$: $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda) \to (Y, \mathcal{O}_Y, \Omega)$ un morphisme dans $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$; l'application continue φ_0: $X \to Y$ induit une application continue $\bar{\varphi}_0$: $X/\Lambda \to Y/\Omega$, la seule qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_0} & Y \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X/\Lambda & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{} & Y/\Omega \, . \end{array}$$

On définit en outre un morphisme de faisceaux $\bar{\varphi}_1$: $\mathcal{O}_Y^\Omega \to \bar{\varphi}_{0*}(\mathcal{O}_X^\Lambda)$ de la façon suivante: si V est un ouvert de Y/Ω et $U = \pi_Y^{-1}(V)$, l'application $\bar{\varphi}_{1V}$: $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y^\Omega) \to \Gamma(\bar{\varphi}_0^{-1}(V), \mathcal{O}_X^\Lambda)$ est définie par $\bar{\varphi}_{1V}(t) = \varphi_{1U}(t)$ pour tout $t \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y^\Omega)$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, si l'on pose $\omega = \tilde{\varphi}(\lambda)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\varphi_{1U}} & \Gamma(\varphi_0^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \\ {\scriptstyle \omega_{1U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{1\varphi_0^{-1}(U)}} \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow[\varphi_{1U}]{} & \Gamma(\varphi_0^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

est commutatif; il en résulte $\lambda_{1\varphi_0^{-1}(U)}\varphi_{1U}(t) = \varphi_{1U}(t)$ si t est une section Ω-invariante de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus de U.

Le morphisme $\hat{\varphi}$: $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda) \to (Y, \mathcal{O}_Y, \Omega)$ induit donc un morphisme d'espaces annelés $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1)$: $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda) \to (Y/\Omega, \mathcal{O}_Y^\Omega)$; étant donné deux morphismes $\hat{\varphi}$: $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda) \to (Y, \mathcal{O}_Y, \Omega)$ et $\hat{\psi}$: $(Y, \mathcal{O}_Y, \Omega) \to$ $\to (Z, \mathcal{O}_Z, \Theta)$ dans $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$, si $\hat{\eta} = \hat{\psi}\hat{\varphi}$, pour le morphisme composé $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1)$ on a $\bar{\eta}_0 = \bar{\psi}_0\bar{\varphi}_0$ et $\bar{\eta}_1 = \bar{\psi}_{0*}(\bar{\varphi}_1)\bar{\psi}_1$. On a donc un foncteur F: $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}} \to \mathbf{Ann}$, $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda) \mapsto (X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$, dont les restrictions aux sous-catégories $(\mathbf{Ann}_{/k})^{\mathcal{G}}$ et $(\mathbf{Loc}_{/k})^{\mathcal{G}}$ factorisent à travers $\mathbf{Ann}_{/k}$.

2. Action des stabilisateurs.

LEMME 2. *Soit $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ un objet de $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$ et pour tout $x \in X$ soit $S_x = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_0(x) = x\}$ le stabilisateur de x; alors les voisinages ouverts S_x-saturés de x forment un système fondamental de voisinages de x.*

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de x; l'ouvert $V=\bigcap_{\lambda\in S_x}\lambda_0(U)$ est un voisinage ouvert S_x-saturé de x contenu dans U.

Lemme 3. *Soient* $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ *un objet de* $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$, $x\in X$ *et* S_x *le stabilisateur de* x. *Pour tous* λ, $\lambda'\in\Lambda-S_x$ *tels que* $\lambda_0(x)=\lambda'_0(x)$ *on a* $\lambda_0(U)=\lambda'_0(U)$ *et* $(\lambda_{1\lambda_0(U)})^{-1}(s)=(\lambda'_{1\lambda'_0(U)})^{-1}(s)$ *quels que soient l'ouvert* S_x*-saturé* U *et la section* S_x*-invariante* $s\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

Démonstration. Il est clair que $\lambda^{-1}\lambda'\in S_x$; donc $\lambda_0(U)=\lambda'_0(U)$ pour tout ouvert S_x-saturé U. Si $s\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est une section S_x-invariante, alors $s=(\lambda^{-1}\lambda')_{1U}(s)=\lambda'_{1\lambda_0(U)}(\lambda^{-1})_{1U}(s)=\lambda'_{1\lambda_0(U)}(\lambda_{1\lambda_0(U)})^{-1}(s)$, ce qui entraîne la conclusion.

Théorème 1. *Soit* $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ *un objet de* $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$ *tel que* X *soit un espace séparé. Pour tout* $x\in X$, *si* S_x *est le stabilisateur de* x, *il existe un sous-espace annelé ouvert* $(A, \mathcal{O}_A)$ *de* $(X, \mathcal{O}_X)$, *où* A *est* S_x*-saturé et* $x\in A$, *tel que les inclusions canoniques* $\varepsilon\colon (A, \mathcal{O}_A)\to(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $\tilde{\varepsilon}\colon S_x\to\Lambda$ *définissent un morphisme* $\hat{\varepsilon}\colon (A, \mathcal{O}_A, S_x)\to(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ *dans* $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$ *pour lequel* $\bar{\varepsilon}=(\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_1)$ *est une immersion ouverte.*

Démonstration. Soient $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ les éléments de $\Lambda-S_x$. Comme X est séparé, il existe un voisinage W de x et, pour tout $i\in\{1, \ldots, n\}$, un voisinage W_i de $\lambda^i_0(x)$ tels que $W\cap W_i=\emptyset$, $W_i\cap W_j=\emptyset$ si $\lambda^i_0(x)\neq\lambda^j_0(x)$ pour tous $i, j\in\{1, \ldots, n\}$. D'après le lemme 2 il existe un ouvert S_x-saturé A tel que $x\in A\subset\bigcap_{i=1}^{n}[W\cap(\lambda^i_0)^{-1}(W_i)]$; on a $\lambda^i_0(A)\cap A=\emptyset$, $\lambda^i_0(A)\cap\lambda^j_0(A)=\emptyset$ si $\lambda^i_0(x)\neq\lambda^j_0(x)$ pour tous $i, j\in\{1, \ldots, n\}$.

Soit maintenant $\mathcal{O}_A$ le faisceau $\mathcal{O}_X|_A$ et $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)\colon (A, \mathcal{O}_A)\to(X, \mathcal{O}_X)$ l'immersion ouverte. Il est clair que, pour tout ouvert U de X et pour tout $\lambda\in S_x$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(U, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\varepsilon_{1U}} & \Gamma(U\cap A, \mathcal{O}_X)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\lambda_{1U}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda_{1U\cap A}}\\
\Gamma(\lambda_0^{-1}(U), \mathcal{O}_X) & \xrightarrow[\varepsilon_{1\lambda_0^{-1}(U)}]{} & \Gamma(\lambda_0^{-1}(U)\cap A, \mathcal{O}_X).
\end{array}$$

Il en résulte que $\hat{\varepsilon}=(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \tilde{\varepsilon})\colon (A, \mathcal{O}_A, S_x)\to(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$, où $\tilde{\varepsilon}$ est le morphisme d'inclusion $S_x\to\Lambda$, est un morphisme de la catégorie $(\mathbf{Ann})^{\mathcal{G}}$. Nous voulons montrer que $\bar{\varepsilon}\colon (A/S_x, \mathcal{O}_A^{S_x})\to(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^{\Lambda})$ est une lmmersion ouverte, c'est à dire un isomorphisme de $(A/S_x, \mathcal{O}_A^{S_x})$ sur ie sous-espace ouvert $(\pi_X(A), \mathcal{O}_X^A|\pi_{X(A)})$ de $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$. Il est évident que $\bar{\varepsilon}_0$ est un homéomorphisme de A/S_x sur $\pi_X(A)$. En outre d'après le lemme 1 l'application $\bar{\varepsilon}^*_{\pi_A(a)}\colon \mathcal{O}^\Lambda_{X,\pi_X(a)} \to \mathcal{O}^{S_x}_{A,\pi_A(a)}$ est injective pour tout $a \in A$; il nous reste à montrer qu'elle est surjective. Soit en effet $g \in \mathcal{O}^{S_x}_{A,\pi_A(a)}$; il existe un voisinage ouvert U' de $\pi_A(a)$ dans A/S_x et une section $s \in \Gamma(U', \mathcal{O}_A^{S_x})$ tels que $s_{\pi_A(a)} = g$. Soient maintenant $U = \pi_A^{-1}(U')$ et $U_i = \lambda_0^i(U)$; on a $U \cap U_i = \emptyset$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $\lambda_0^i(x) \neq \lambda_0^j(x)$ et $U_i = U_j$ si $\lambda_0^i(x) = \lambda_0^j(x)$ (cf. le lemme 3), $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Soient $V = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ et $V' = \pi_X(V)$; alors V' est un voisinage ouvert de $\pi_X(a)$ dans X/Λ pour lequel on a $\bar{\varepsilon}_0^{-1}(V') = U'$. Pour prouver la surjectivité de $\bar{\varepsilon}^*_{\pi_A(a)}$ il suffit de montrer, d'après la définition 4, qu'il existe une section $t \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ telle que $\lambda_{1V}(t) = t$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et telle que $\varepsilon_{1V}(t) = s$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose $t_i = (\lambda^i_{1U_i})^{-1}(s) \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$; d'après le lemme 3 il résulte $t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}$ quels que soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Il existe donc une section et une seule $t \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ telle que $t|_U = s$ et $t|_{U_i} = t_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; il résulte évidemment $\varepsilon_{1V}(t) = s$. Il nous reste à montrer que t est Λ-invariante. Soit en effet $\lambda \in \Lambda$; on a deux cas:

1) $\lambda \in S_x$,

2) $\lambda \in \Lambda - S_x$, c'est à dire $\lambda = \lambda^i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$.

Le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\lambda_{1V}"] \arrow[d] & \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\
\Gamma(\lambda_0(U), \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\lambda_{1\lambda_0(U)}"'] & \Gamma(U, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

on a respectivement

1) $\lambda_{1V}(t)|_U = \lambda_{1\lambda_0(U)}(t|_{\lambda_0(U)}) = \lambda_{1U}(t|_U) = \lambda_{1U}(s) = s$;

2) $\lambda^i_{1V}(t)|_U = \lambda^i_{1U_i}(t|_{U_i}) = \lambda^i_{1U_i}(t_i) = s$.

Pour déterminer $\lambda_{1V}(t)|_{U_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ nous allons considérer le diagramme commutatif pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\lambda_{1V}} & \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\lambda_0(U_j), \mathcal{O}_X) & \xrightarrow[\lambda_{1\lambda_0(U_j)}]{} & \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) . \end{array}$$

Dans le cas 1) pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a toujours $\lambda\lambda^j \in \Lambda - S_x$, donc il existe $h \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda = \lambda^h(\lambda^j)^{-1}$. Dans le cas 2) on a $\lambda\lambda^j \in \in \Lambda - S_x$ ou bien il existe $\lambda' \in S_x$ tel que $\lambda = \lambda'(\lambda^j)^{-1}$. Si l'on a $\lambda = \lambda^h(\lambda^j)^{-1}$, d'après (*) on a

$$\lambda_{1V}(t)|_{U_j} = (\lambda^j_{1U_j})^{-1}\lambda^h_{1U_h}(t|_{U_h}) = (\lambda^j_{1U_j})^{-1}(s) = t_j .$$

Si l'on a $\lambda = \lambda'(\lambda^j)^{-1}$, tojours d'après (*) on a

$$\lambda_{1V}(t)|_{U_j} = (\lambda^j_{1U_j})^{-1}\lambda'_{1U}(t|_U) = (\lambda^j_{1U_j})^{-1}\lambda'_{1U}(s) = t_j .$$

Il en résulte que la section t est Λ-invariante.

3. Quelques applications.

Corollaire 1. *Si $S_x = \{1_\Lambda\}$, alors on a l'immersion ouverte $\bar{\varepsilon}$: $(\Lambda, \mathcal{O}_\Lambda) \to (X/\Lambda, \mathcal{O}^\Lambda_X)$.*

Corollaire 2. *Pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}^\Lambda_{X,\pi_X(x)}$ s'identifie avec un sous-anneau de $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Démonstration. Il suffit de supposer $S_x = \Lambda$; on a alors $\mathcal{O}^\Lambda_{X,\pi_X(x)} = \{g \in \mathcal{O}_{X,x} | \lambda^*_x(g) = g$ pour tout $\lambda \in \Lambda\}$.

Corollaire 3. *Si $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ est un objet de $(\mathbf{Loc}_{/k})^{\mathcal{G}}$, alors $(X/\Lambda, \mathcal{O}^\Lambda_X)$ est un objet de $\mathbf{Loc}_{/k}$.*

Démonstration. Comme un élement de $\mathcal{O}^\Lambda_{X,\pi_X(x)}$ est inversible dans $\mathcal{O}^\Lambda_{X,\pi_X(x)}$ si et seulement s'il est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$, $\mathcal{O}^\Lambda_{X,\pi_X(x)}$ est un anneau local pour tout $x \in X$.

Proposition 1. *Soit $(X, \mathcal{O}_X, \Lambda)$ un objet de $(\mathbf{Ann}_{/k})^{\mathcal{G}}$, avec X séparé, tel que $(X, \mathcal{O}_X)$ soit un espace analytique (resp. une variété analytique,* *resp. une variété différentiable). Pour tout $x \in X$ il existe un objet $(V, \mathcal{O}_V, \Omega)$ de $(\mathbf{Ann}_{/k})^{\mathcal{G}}$ tel que $(V, \mathcal{O}_V)$ soit un modèle d'espace analytique (resp. de variété analytique, resp. de variété différentiable) et un sous-espace annelé ouvert de $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$, qui contient $\pi_X(x)$, isomorphe à $(V/\Omega, \mathcal{O}_V^\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in X$ est tel que $S_x = \{1_\Lambda\}$, alors d'après le corollaire 1 on a la conclusion. On peut supposer donc $S_x \neq \{1_\Lambda\}$. Il existe alors d'après le théorème 1 un sous-espace annelé ouvert $(A, \mathcal{O}_A)$ de $(X, \mathcal{O}_X)$, avec $x \in A$, tel que $(A/S_x, \mathcal{O}_A^{S_x})$ soit isomorphe à un sous-espace annelé ouvert de $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$ qui contient $\pi_X(x)$; il existe un sous-espace annelé ouvert $(U, \mathcal{O}_U)$, avec $x \in U$, de $(A, \mathcal{O}_A)$ isomorphe à un modèle d'espace analytique (resp. de variété analytique, resp. de variété différentiable). Il existe en outre un ouvert S_x-saturé, W, tel que $x \in W \subset U$; $(W, \mathcal{O}_W, S_x)$ est isomorphe à un objet $(V, \mathcal{O}_V, \Omega)$ de $(\mathbf{Ann}_{/k})^{\mathcal{G}}$ où $(V, \mathcal{O}_V)$ est un modèle d'espace analytique (resp. de variété analytique, resp, de variété différentiable). Enfin $(W/S_x, \mathcal{O}_W^{S_x})$. est isomorphe à un sous-espace annelé ouvert de $(X/\Lambda, \mathcal{O}_X^\Lambda)$ qui contient $\pi_X(x)$, et il est isomorphe à $(V/\Omega, \mathcal{O}_V^\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Elements of Mathematics, General Topology, Part* 1, Hermann, Paris, 1966.

[2] A. GROTHENDIECK, *Exposés, Séminaire Cartan.*, Paris, 1960/61.

[3] M. JURCHESCU, *Introduzione agli spazi analitici, Appunti redatti da A. Tancredi*, Quaderno dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R., Perugia, 1971.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 maggio 1973.