

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUISA ZANGHIRATI

**Una generalizzazione di certe disuguaglianze
di E. Gagliardo e L. Nirenberg**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 51 (1974), p. 49-66

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__49_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Una generalizzazione di certe disuguaglianze di E. Gagliardo e L. Nirenberg (*)

LUISA ZANGHIRATI (**)

SUMMARY - Let \mathbf{P} be a convex polyhedron in the n -dimensional euclidean spaces S^n , having as vertices the points \mathbf{s}^l , $l = 1, \dots, N$, where $\mathbf{s}^l = \mathbf{0}$. In this paper the functions $f \in L_s(E^n)$ with $D^{\mathbf{s}^l} f \in L_p$, $l = 2, \dots, N$, $1 < p$, $s < \infty$, are considered. For these functions interpolative inequalities for suitable L_r norms of $D^{\mathbf{r}} f$, $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$, are proved. The result may be considered as an extension of the well-known Gagliardo-Nirenberg inequalities.

Introduzione.

In questa nota studiamo alcune proprietà differenziali di certe classi di funzioni. Proprietà di questo tipo furono prese in considerazione da L. Nirenberg in un suo articolo [12] del 1959. Qui egli considerò funzioni f appartenenti ad $L_s(E^n)$ le cui derivate d'ordine m appartengono ad $L_p(E^n)$, $1 < p$, $s < \infty$ e dimostrò delle disuguaglianze di tipo interpolatorio per le norme hölderiane e per le norme in L_r delle derivate di f di ordine j , $0 \leq j < m$, con r opportuno. Tali disuguaglianze, includenti quelle usualmente dette di tipo Sobolev, furono dimostrate per via del tutto indipendente anche da E. Gagliardo [4]. Risultati parziali in questa direzione ottenne pure V. P. Il'in in [9].

Ci poniamo qui un problema analogo a quello sopra esposto ma per classi più ampie di funzioni: considereremo funzioni f che appar-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA.

(**) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via Savonarola 9 - Ferrara.

tengono ad $L_s(E^n)$, $1 < s < \infty$ e che hanno in $L_p(E^n)$, $1 < p < \infty$ « certe derivate » $D^s f$, $l = 2, \dots, N$. Sugli indici di derivazione \mathbf{s}^l faremo unicamente le seguenti due ipotesi:

- i) $\{\mathbf{s}^l, \dots, \mathbf{s}^N\} \cup \{\mathbf{0}\}$ sono vertici di un poliedro convesso \mathbf{P} di S^n ;
- ii) per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ esiste un \mathbf{s}^l che ha nulle tutte le componenti, eccetto la j -esima che è positiva.

Proveremo per una funzione f siffatta che, qualunque sia $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$, $D^{\mathbf{r}} f$ appartiene ad $L_r(E^n)$ per valori di r che si determinano con precisione, e che la norma in L_r di $D^{\mathbf{r}} f$ soddisfa ad una disegualianza analoga a quella provata da L. Nirenberg in [12].

Il risultato di Nirenberg sarà contenuto nel nostro come caso particolare, quando sia $N = n$; $\mathbf{s}^j = m\mathbf{e}_j$, $m > 0$, $j = 1, \dots, n$, \mathbf{e}_j vettori della base canonica di E^n .

Gli spazi di funzioni generalizzate f che hanno in $L_p(E^n)$ le derivate $D^{\mathbf{s}^l} f$, $l = 2, \dots, N$, con \mathbf{s}^l soddisfacenti ad i) e ii) e le loro proprietà sono stati studiati da L. Cattabriga in [1], [2], [3]; alcune di esse si possono dedurre come caso particolare del teorema di questa nota (si veda l'osservazione seguente tale teorema). La dimostrazione del nostro risultato si basa essenzialmente su un teorema di P. I. Lizorkin [11] riguardante i moltiplicatori di Fourier e su un teorema di interpolazione complessa di E. Stein [13].

Con E^n indichiamo lo spazio euclideo n -dimensionale di elementi $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Sia $|\xi|^2 = \sum_1^n \xi_j^2$, $\delta = \min\{\min|\xi_j|, 1\}$ ed $A = \left\{ \xi \in E^n; \prod_1^n \xi_j = 0 \right\}$. Per ogni $\xi \in E^n \setminus A$ ed ogni intero non negativo k poniamo

$$M_k(\xi) = \max\{(1 + |\xi|^2)^{k/2}, \delta^{-k}\}$$

Tutte le funzioni $M_k(\xi)$ sono continue su $E^n \setminus A$ ed ivi è: $1 = M_0(\xi) < M_1(\xi) < \dots < M_k(\xi) < M_{k+1}(\xi) < \dots$.

Sia \mathcal{S} lo spazio vettoriale di tutte le funzioni a valori complessi indefinitamente differenziabili in E^n ed ivi a decrescenza rapida e \mathcal{P} il sottospazio di \mathcal{S} costituito da tutte le funzioni $\psi \in \mathcal{S}$ nulle con tutte le loro derivate su A e tali che risultino limitate in $E^n \setminus A$ tutte le funzioni $M_k(\xi) D^{\mathbf{l}} \psi(\xi)$, $k = 0, 1, \dots$, con $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$; $l_j = 0, 1, \dots$, per $j = 1, \dots, n$, $D^{\mathbf{l}} = \partial^{|\mathbf{l}|} / \partial \xi_1^{l_1} \dots \partial \xi_n^{l_n}$, $|\mathbf{l}| = l_1 + \dots + l_n$ (1). Lo spazio \mathcal{P} con

(1) Diremo anche che \mathbf{l} è un multi-indice di interi non negativi.

la topologia generata dalla successione di norme:

$$\|\psi\|_k = \sup_{|l| \leq k} \sup_{\xi \in E^n \setminus \mathcal{A}} M_k(\xi) |D^l \psi(\xi)|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

è uno spazio numerabilmente normato e completo ed è uno spazio fondamentale nel senso di I. M. Gel'fand e G. E. Silov [5]. Per $\psi \in \mathcal{P}$ poniamo:

$$\widehat{\psi}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E^n} \exp[i\langle x, \xi \rangle] \psi(\xi) d\xi$$

ove $x \in E^n$, $\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$.

Indichiamo con Φ il sottospazio di \mathcal{S} costituito dalle $\varphi \in \mathcal{S}$ tali che $\varphi = \widehat{\psi}$, $\psi \in \mathcal{P}$; è allora:

$$\psi(\xi) = \int_{E^n} \exp[-i\langle x, \xi \rangle] \varphi(x) dx = \tilde{\varphi}(\xi), \quad \xi \in E^n$$

Scriveremo $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ e $\widehat{\psi} = \mathcal{F}^{-1}\psi$, indicando con \mathcal{F} ed \mathcal{F}^{-1} la trasformata di Fourier e la sua inversa.

Per ogni $\varphi \in \Phi$ porremo:

$$\|\varphi\|_k = \|\tilde{\varphi}\|_k \quad k = 0, 1, \dots$$

Anche Φ con la successione di seminorme $\|\varphi\|_k$ è uno spazio numerabilmente normato completo e perfetto ed uno spazio fondamentale. Le topologie introdotte in Φ e \mathcal{P} sono più fini di quelle in essi indotte da \mathcal{S} . Pertanto le restrizioni a Φ ed a \mathcal{P} di ogni funzionale lineare continuo su \mathcal{S} è un funzionale lineare continuo su Φ o rispettivamente, su \mathcal{P} .

Con \mathcal{S}' , Φ' e \mathcal{P}' indichiamo i duali di \mathcal{S} , Φ e \mathcal{P} rispettivamente. Se $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$; $g \in \mathcal{P}'$, $\psi \in \mathcal{P}$, denoteremo con $\langle f, \varphi \rangle$, $\langle g, \psi \rangle$ i valori di f e g in φ e ψ rispettivamente. Converremo che i prodotti λf , λg , con λ complesso siano definiti dalle:

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle f, \bar{\lambda} \varphi \rangle = \bar{\lambda} \langle f, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda g, \psi \rangle = \langle g, \bar{\lambda} \psi \rangle = \bar{\lambda} \langle g, \psi \rangle$$

ove $\bar{\lambda}$ indica il complesso coniugato di λ .

La trasformata di Fourier di $f \in \Phi'$ si definisce come l'elemento

$\tilde{f} \in \Psi'$ tale che:

$$\langle \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

Analogamente se $g \in \Psi'$, $\hat{g} = \mathcal{F}^{-1}g$ è l'elemento di Φ' definito da

$$\langle g, \psi \rangle = (2\pi)^n \langle \hat{g}, \hat{\psi} \rangle, \quad \forall \psi \in \Psi.$$

Per ulteriori proprietà degli spazi Φ e Ψ e dei loro duali Φ' e Ψ' si veda P. I. Lizorkin [10] ed L. Cattabriga [1].

Denoteremo con L_p^q lo spazio delle distribuzioni f in S' , tali che:

$$\|f * \varphi\|_{L_q} \leq C \|\varphi\|_{L_p}, \quad \forall \varphi \in S$$

dove $f * \varphi$ è la convoluzione di f e φ , e C una costante indipendente da φ ; la più piccola costante C che può essere usata nella maggiorazione precedente sarà denotata $L_p^q(f)$. Per le proprietà degli spazi L_p^q si veda [8].

Una funzione $\mu(\xi)$, $\xi \in E^n$ è un moltiplicatore in Ψ se l'applicazione $\psi \rightarrow \mu\psi$ è un'applicazione continua di Ψ in sè.

Se $T \in S'$ è tale che per ogni $\varphi \in S$ risulta:

$$\|\mathcal{F}^{-1}(T\tilde{\varphi})\|_{L_q} \leq C \|\varphi\|_{L_p}, \quad I \leq p \leq q \leq \infty$$

con C indipendente da φ , si dice che T è un moltiplicatore di tipo (p, q) . La più piccola costante C per la quale vale la maggiorazione precedente per ogni $\varphi \in S$, si dice norma del moltiplicatore T e si indica con $M_p^q(T)$.

LEMMA 1. Se $0 < \eta < 1$ e $1 < p < \infty$, la funzione $\prod_1^n |\xi_j|^{-\eta}$ è un moltiplicatore in Ψ e un moltiplicatore di tipo (p, q) , $1/q = 1/p - \eta$. Inoltre $M_p^q\left(\prod_1^n |\xi_j|^{-\eta}\right) \leq C^n(p, q)$, ove:

$$C(p, q) = \frac{2(q'^{a'p'} + p'^{a'q'})}{\text{sen}(1/p' + 1/q)(\pi/2)\Gamma(1/p - 1/q + 1)},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

DIM. È immediato verificare che la funzione $\prod_1^n |\xi_j|^{-n}$ è un moltiplicatore in \mathcal{P} ; mentre l'affermazione che tale funzione è anche un moltiplicatore di tipo (p, q) si prova con alcuni semplici varianti alla dimostrazione del teorema 1 di [11]. Il valore della costante $C(p, q)$ si ottiene poi seguendo i ragionamenti utilizzati da Hardy, Littlewood, Polja per dimostrare i teoremi 383, 382, 327 di [6].

DEFINIZIONE. Sia \mathcal{F}_0^n l'insieme dei poliedri convessi \mathbf{P} di S^n (spazio euclideo ad n dimensioni), tali che:

- a) $\mathbf{P} \subset S_+^n = \{\mathbf{s} \in S^n; s_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$;
- b) l'origine \mathbf{o} di S^n appartiene a \mathbf{P} ;
- c) per ogni $j = 1, \dots, n$ è $m_j = \max\{\varrho \geq 0; \varrho \mathbf{e}^j \in \mathbf{P}\} > 0$.

Si vede facilmente che se $\mathbf{P} \in \mathcal{F}_0^n$ l'origine \mathbf{o} di S^n ed i punti $m_j \mathbf{e}^j$ sono fra i vertici \mathbf{s}^l , $l = 1, \dots, N(\mathbf{P})$ di \mathbf{P} . Porremo sempre $\mathbf{s}^1 = \mathbf{o}$. \mathcal{F}_0^n contiene l'insieme dei poliedri convessi di S^n indicato con \mathcal{F}^n in [1].

Porremo:

$$\mathbf{P}^+ = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbf{P}; \sum_1^n m_j s_j \geq 1 \right\}$$

Si vede facilmente che \mathbf{P}^+ coincide con l'involuppo convesso dei vertici di \mathbf{P} diversi dall'origine. È inoltre immediato verificare che se $\mathbf{P} \in \mathcal{F}_0^n$ anche $\delta \mathbf{P} = \{\mathbf{s} \in S^n; \delta^{-1} \mathbf{s} \in \mathbf{P}\}$ appartiene a \mathcal{F}_0^n , per ogni $\delta > 0$.

Da a), b), c), segue che se $\mathbf{P} \in \mathcal{F}_0^n$, si può scrivere:

$$\mathbf{P} = \bigcap_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{s} \in S_+^n; \sum_1^n a_j s_j \leq 1 \right\}$$

ove $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ è un insieme finito e non vuoto di S^n , tale che ogni suo elemento ha almeno una coordinata positiva.

Ad ogni $\mathbf{P} \in \mathcal{F}_0^n$ associamo la funzione:

$$\mathbf{P}^+(\xi) = \sum_2^{N(\mathbf{P})} |\xi^{\mathbf{s}^l}| = \sum_2^{N(\mathbf{P})} \prod_1^n |\xi_j|^{s_j^l}, \quad \xi \in \mathcal{E}^n$$

ove \mathbf{s}^l , $l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$ sono i vertici di \mathbf{P} diversi dall'origine. Per ulteriori proprietà dei poliedri $\mathbf{P} \in \mathcal{F}_0^n$ si veda L. Cattabriga [1], [2]

e [3]. Ricordiamo qui soltanto che se $\mathbf{s} \in \mathbf{P}^+$ risulta, come conseguenza della convessità di \mathbf{P} e di \mathbf{P}^+ :

$$(1) \quad |\xi^{\mathbf{s}}| \leq \mathbf{P}^+(\xi), \quad \xi \in E^n$$

Per ogni $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$ porremo, conformemente a [1],

$$h(\mathbf{P}^+) = \sum_1^n m_j^{-1}; \quad k(\mathbf{P}) = \max_{a \in \mathcal{A}(\mathbf{P})} \sum_1^n a_j$$

e se $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_+^n$

$$h_{\mathbf{r}} = \sum_1^n m_j^{-1} r_j; \quad k_{\mathbf{r}} = \max_{a \in \mathcal{A}(\mathbf{P})} \sum_1^n a_j r_j.$$

LEMMA 2. Se è $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$; $1 < p < h(\mathbf{P}^+)$, z un numero complesso e $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$, allora la funzione $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} = \exp[-z \lg \mathbf{P}^+(\xi)]$ è un moltiplicatore in Ψ e un moltiplicatore di tipo (p, q) con $q = p/(1 - \eta p)$ ed $\eta \in [\operatorname{Re} z h^{-1}(\mathbf{P}^+), \operatorname{Re} z k^{-1}(\mathbf{P})] \cap [0, p^{-1}]$. Inoltre se $\operatorname{Re} z = 0$

$$M_z^p([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}) \leq C(n, p, \mathbf{P})(1 + |z|)^n.$$

DIM. Una qualunque derivata di $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}$ è combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti del tipo:

$$[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-i \operatorname{Im} z} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\operatorname{Re} z - h} [D^{\mathbf{k}} \mathbf{P}^+(\xi)]^l$$

ove h ed l sono interi positivi e $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, k_j interi non negativi, $j = 1, \dots, n$. Per ogni $\xi \in E^n$ si ha $|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-i \operatorname{Im} z}| = 1$; inoltre con semplici considerazioni, si prova che, per ogni $\xi \in E^n \setminus \mathcal{A}$, sia $|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\operatorname{Re} z - h}|$ che $|[D^{\mathbf{k}} \mathbf{P}^+(\xi)]^l|$ si possono maggiorare con combinazioni lineari a coefficienti costanti di funzioni del tipo $\prod_1^n |\xi_j|^{r_j}$, r_j reali; ciò, tenuto conto del lemma 2.1 di [1] prova che $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}$ è un moltiplicatore in Ψ .

La dimostrazione che questa stessa funzione è un moltiplicatore di tipo (p, q) si fonda su un noto teorema di P. I. Lizorkin [11].

Sia ν l'insieme dei multi-indici $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ con h_j uguale a 1 o 0, $j = 1, \dots, n$. Se $\mathbf{c} \in \nu \setminus \{\mathbf{o}\}$, $\xi \in E^n \setminus \mathcal{A}$ è:

$$D^{\mathbf{c}}[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} = \sum_1^{|\mathbf{c}|} \prod_0^{v-1} (z - k) [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z-v} \sum_{\substack{\mathbf{h}^i \in \nu \setminus \{\mathbf{o}\} \\ \mathbf{h}^1 + \mathbf{h}^2 + \dots + \mathbf{h}^v = \mathbf{c}}} \prod_1^v D^{\mathbf{h}^i} \mathbf{P}^+(\xi)$$

Se $\mathbf{h} \in \nu \setminus \{\mathbf{o}\}$ si ha poi:

$$D^{\mathbf{h}} \mathbf{P}^+(\xi) = \sum_2^{N(\mathbf{P})} \prod_1^n (s_j^i \xi_j^{-1})^{h_j} |\xi_j| s_j^i$$

e quindi:

$$|\xi^{\mathbf{h}}| |D^{\mathbf{h}} \mathbf{P}^+(\xi)| \leq C(\mathbf{P}) \mathbf{P}^+(\xi) \quad (2)$$

Ne segue:

$$|\xi^{\mathbf{c}}| \cdot \left| \sum_{\mathbf{h}^1 + \mathbf{h}^2 + \dots + \mathbf{h}^{\nu} = \mathbf{c}} \prod_1^{\nu} D^{\mathbf{h}^i} \mathbf{P}^+(\xi) \right| \leq C(n, \mathbf{P}) [\mathbf{P}^+(\xi)]^{\nu}$$

e:

$$|\xi^{\mathbf{c}}| \cdot |D^{\mathbf{c}}[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}| \leq C(n, \mathbf{P}) \sum_1^{|c|} \prod_{k=0}^{\nu-1} (|z| + k) [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\text{Re } z}$$

Se $\eta \in [\text{Re } z \bar{h}^{-1}(\mathbf{P}^+), \text{Re } z k^{-1}(\mathbf{P})]$, allora, posto $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$ è $\eta \mathbf{e} \in \text{Re } z \mathbf{P}^+$; onde per la (1):

$$\prod_1^h |\xi_j|^{\eta} \leq (\text{Re } z \mathbf{P}^+)(\xi), \quad \xi \in E^n$$

D'altro canto, essendo $0 \leq \text{Re } z \leq 1$, per una nota disuguaglianza di convessità risulta:

$$(\text{Re } z \mathbf{P}^+)(\xi) = \sum_2^{N(\mathbf{P})} \left(\prod_1^n |\xi_j| s_j^i \right)^{\text{Re } z} \leq 2^{N(\mathbf{P})} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{\text{Re } z}$$

Pertanto per gli η sopra indicati è:

$$\prod_1^n |\xi_j|^{\eta} \leq 2^{N(\mathbf{P})} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{\text{Re } z}$$

e quindi:

$$(2) \quad |\xi^{\mathbf{c} + \eta \mathbf{l}}| \cdot |D^{\mathbf{c}}[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}| \leq C(n, \mathbf{P}) \sum_1^{|c|} \prod_0^{\nu-1} (|z| + k) \leq C(n, \mathbf{P}) (|z| + 1)^{|c|}.$$

Per il teorema di P. I. Lizorkin sopra menzionato, la funzione $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}$ è un moltiplicatore di tipo (p, q) per i p ed q indicati nell'enunciato.

In particolare, se $\text{Re } z = 0$, $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}$ è un moltiplicatore di tipo (p, p)

(2) Qui, come sempre in seguito, denoteremo con C delle costanti, di valore di volta in volta diverso, che dipendono dai parametri posti tra parentesi.

e, tenuto conto della (2), per la sua norma si ha la maggiorazione:

$$M_2^n([\mathbf{P}^+(\xi)]) \leq C(n, p, \mathbf{P})(|z| + 1)^n$$

dove la costante $C(n, p, \mathbf{P})$ non dipende da z .

COROLLARIO 1. *Se $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$, $1 < p < h(\mathbf{P}^+)$ e z è un numero complesso con $\operatorname{Re} z = 0$, l'applicazione definita in Φ da:*

$$\Phi \ni \varphi \rightarrow \psi = \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} \tilde{\varphi})$$

e definita poi per chiusura in L_p , definisce un operatore U_z da L_p in L_p con norma minore o uguale a $C(n, p, P)(1 + |z|)^n$, ove $C(n, p, P)$ non dipende da z .

LEMMA 3. *Se $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$, $1 < p < k(\mathbf{P})$, $0 < \delta \leq 1$, allora, posto $\mathbf{r} = k^{-1}(\mathbf{P})$ e la funzione $|\xi^{\mathbf{r}}|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta}$ è un moltiplicatore in ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) , con norma minore o uguale a $C(n, p, \mathbf{P}) \cdot (1 + \delta)^n$ dove $C(n, p, \mathbf{P})$ non dipende da δ .*

DIM. L'affermazione che $|\xi^{\mathbf{r}}|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta}$ è un moltiplicatore in ψ si prova con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel lemma precedente. Le altre affermazioni dell'enunciato si dimostrano utilizzando ancora una volta il teorema di P. I. Lizorkin [11]. Basterà a tale scopo far vedere che la funzione $|\xi^{\mathbf{k}}| \cdot |D^{\mathbf{k}}(|\xi^{\mathbf{r}}|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta})|$ è maggiorata in modulo per ogni $\mathbf{k} \in \nu$ da $(1 + \delta)^n$ moltiplicata per una costante non dipendente da δ e ciò per ogni $\xi \in E^n \setminus A$.

Se $\mathbf{k} \in \nu$, $\xi \in E^n \setminus A$, $D^{\mathbf{k}}(|\xi^{\mathbf{k}}|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta})$ si esprime come combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti:

$$D^{\mathbf{b}}\left(\prod_j |\xi_j|^{\delta k^{-1}(\mathbf{P})}\right) \cdot D^{\mathbf{c}}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta}) \quad \text{con } \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \nu \text{ e } \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{k}$$

È:

$$|\xi^{\mathbf{b}}| D^{\mathbf{b}} |\xi^{\mathbf{r}}| = (\delta k^{-1}(\mathbf{P}))^{|\mathbf{b}|} \prod_1^n |\xi_j|^{\delta k^{-1}(\mathbf{P})} \leq \delta^{|\mathbf{b}|} \prod_1^n |\xi_j|^{\delta k^{-1}(\mathbf{P})}$$

e dalla (2) del lemma precedente con $z = \delta$; $\eta = \delta k^{-1}(\mathbf{P})$:

$$|\xi^{\mathbf{c}}| \cdot |D^{\mathbf{c}}[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta}| \leq C(n, \mathbf{P})(\delta + 1)^{|\mathbf{c}|} \prod_1^n |\xi_j|^{-\delta k^{-1}(\mathbf{P})}$$

Quindi $|\xi^k|D^k(|\xi^r|[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\delta})$ è combinazione lineare a coefficienti costanti di prodotti maggiorati da:

$$C(n, \mathbf{P}) \delta^{|\mathbf{b}|} (\delta + 1)^{|\mathbf{c}|} \leq C(n, \mathbf{P}) (\delta + 1)^n$$

Con ciò il lemma resta provato.

LEMMA 4. Se $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$, $1 < p < k(\mathbf{P})$, z è un numero complesso tale che $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ allora $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}$ è un moltiplicatore in Ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, q) , $q = p/(1 - p \operatorname{Re} z k^{-1}(\mathbf{P}))$, di norma:

$$(3) \quad M_p^q([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z}) \leq C(n, p, \mathbf{P})(1 + |z|)^{2n}$$

ove $C(n, p, \mathbf{P})$ è una costante che dipende unicamente da n, p, \mathbf{P} ma non da z .

DIM. Tenuto conto del lemma 2, l'unica cosa da provare è la maggiorazione per la norma del moltiplicatore.

Scriveremo:

$$(4) \quad [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} = |\xi^{-\eta e}| |\xi^{\eta e}| [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\operatorname{Re} z} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-i \operatorname{Im} z}$$

con $\eta = \operatorname{Re} z k^{-1}(\mathbf{P})$.

Le funzioni $[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-i \operatorname{Im} z}$ e $|\xi^{\eta e}| [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-\operatorname{Re} z}$ sono (lemma 2 e lemma 3), moltiplicatori di tipo (p, p) e le loro norme sono entrambe maggiorate da $C(n, p, \mathbf{P})(1 + |z|)^n$, $C(n, p, \mathbf{P})$ essendo una costante indipendente da z . Il lemma 1, ci assicura poi che $|\xi^{-\eta e}|$, $\eta = \operatorname{Re} z k^{-1}(\mathbf{P})$ è un moltiplicatore di tipo (p, q) , $q^{-1} = p^{-1} - \operatorname{Re} z k^{-1}(\mathbf{P})$ e di norma minore o uguale a:

$$C(n, p, q) = \frac{2^n (q^{1/p'} + p^{1/q'})^n}{[\operatorname{sen}(1/p' + 1/q)(\pi/2) \Gamma(1/p + 1/q')]^n}$$

Al variare di $\operatorname{Re} z$ nell'intervallo $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $C(n, p, q)$ si mantiene limitata e può quindi essere maggiorata da una costante dipendente unicamente da n, p, \mathbf{P} .

Da (4), applicando il teorema 2.3 di [1], segue la (3).

COROLLARIO 2. Se $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$, $1 < p < k(\mathbf{P})$, e z è un numero complesso tale che $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, l'applicazione definita in Φ da:

$$\Phi \ni \varphi \rightarrow \psi = \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} \tilde{\varphi})$$

e definita poi per chiusura in L_a , genera un operatore limitato U_z da L_p in L_a , $q = p/(1 - p \operatorname{Re} z k^{-1}(\mathbf{P}))$ con norma:

$$\|U_z\|_{p,q} \leq C(n, p, \mathbf{P})(1 + |z|)^{2n}$$

dove $C(n, p, \mathbf{P})$ non dipende da z .

LEMMA 5. Siano \mathbf{P} , p , q , come nel corollario precedente. Allora per ogni $\varphi \in L_p$ e per ogni $\psi \in L_{q'}$, $q^{-1} + q'^{-1} = 1$, la funzione

$$H(z) = \int_{E^n} U_z(\varphi) \psi$$

è analitica in $0 < \operatorname{Re} z < 1$ e continua in $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

DIM. Siano $\varphi, \psi \in \Phi$. È allora:

$$(5) \quad H(z) = \int_{E^n} \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} \tilde{\varphi}(\xi)) \psi(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{E^n} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi \quad (3)$$

Se $\xi \in E^n \setminus A$ risulta:

$$D_z([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi)) = -[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-z} \lg \mathbf{P}^+(\xi) \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi).$$

Il secondo membro di questa uguaglianza si può maggiorare in modulo, uniformemente rispetto a z , $0 < \operatorname{Re} z < 1$ con una funzione sommabile in E^n , è pertanto lecito derivare sotto il segno di integrale nel secondo membro di (5). Ciò prova l'analiticità di $H(z)$. La continuità nella striscia $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ si prova in modo analogo osservando che la funzione integranda in (5) è dominata uniformemente rispetto a z da una funzione sommabile in E^n .

Il lemma è dunque provato se $\varphi, \psi \in \Phi$.

Siano ora $\varphi \in L_p$, $\psi \in L_{q'}$. Esistono in Φ (corollario 1.3 di [1]) due successioni: $\{\varphi_k\}$; $\{\psi_k\}$ convergenti la prima a φ in L_p e la seconda a ψ in $L_{q'}$. Poniamo:

$$H(z) = \int_{E^n} U_z(\varphi) \psi \quad \text{e} \quad H_k(z) = \int_{E^n} U_z(\varphi_k) \psi_k$$

(3) Indichiamo con $\tilde{\psi}$ la funzione $\xi \rightarrow \psi(-\xi)$.

Per ogni z in $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, si ha, tenendo conto del corollario 2 e della disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} |H_k(z) - H(z)| &= \left| \int U_z(\varphi_k)(\psi_k - \psi) - \int U_z(\varphi - \varphi_k)\psi \right| \leq \\ &\leq \|U_z(\varphi_k)\|_{L_q} \cdot \|\psi_k - \psi\|_{L_{q'}} + \|U_z(\varphi - \varphi_k)\|_{L_q} \cdot \|\psi\|_{L_{q'}} \leq \\ &\leq C(n, p, \mathbf{P})(1 + |z|)^{2n} (\|\varphi_k\|_{L_p} \cdot \|\psi_k - \psi\|_{L_{q'}} + \|\varphi - \varphi_k\|_{L_p} \|\psi\|_{L_{q'}}) \end{aligned}$$

Da tale maggiorazione si deduce che la successione $\{H_k(z)\}$ converge ad $H(z)$ uniformemente su ogni compatto contenuto nella striscia $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Essendo le $\Phi_k(z)$ analitiche in $0 < \operatorname{Re} z < 1$ continue e in $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, tale è anche $\Phi(z)$.

Sia $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$, p ed s due numeri reali soddisfacenti alle limitazioni $1 < p < k(\mathbf{P})$, $1 < s < \infty$ e g una funzione assegnata appartenente ad L_p , tale inoltre che $\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1} \tilde{g})$ appartenga ad L_s .

Denotiamo con T_z , $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ la famiglia di operatori definita in L_1 nel modo seguente:

$$(6) \quad T_z: L_1 \ni \varphi \rightarrow \varphi * \mathcal{U}_{1-z}(g)$$

Per il corollario 2 ed una nota proprietà della convoluzione di funzioni, T_z applica con continuità L_1 in L_q , $q = p/(1 - p \operatorname{Re}(1 - z)k^{-1}(\mathbf{P}))$ e per ogni $\varphi \in L_1$ si ha:

$$(7) \quad \|T_z(\varphi)\|_{L_q} \leq C(n, p, \mathbf{P})(1 + |1 - z|)^{2n} \|g\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_1}$$

LEMMA 6. Se φ e ψ sono due funzioni semplici ⁽⁴⁾, la funzione:

$$\chi(z) = \int_{E^n} T_z(\varphi) \psi$$

è analitica in $0 < \operatorname{Re} z < 1$ e continua in $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Inoltre, posto $z = x + iy$ risulta:

$$\sup_{|y| \leq r} \sup_{0 \leq x \leq 1} \lg |\chi(x + iy)| \leq A(2 + r)$$

dove A è una costante positiva.

⁽⁴⁾ Per funzione semplice si intende una funzione definita in E^n che assuma soltanto un numero finito di valori non nulli su insiemi di misura finita.

DM. Siano $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\psi \in \mathcal{F}$. Per un noto teorema sulla convoluzione delle funzioni generalizzate ([5], Cap. III) è:

$$\mathcal{F}[\varphi * U_{1-z}(g)] = \tilde{\varphi}[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-(1-z)} \tilde{g}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \langle T_z(\varphi), \psi \rangle = (2\pi)^n \langle \tilde{\varphi}[\mathbf{P}^+(\xi)]^{-(1-z)} \tilde{g}, \tilde{\psi} \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-(1-z)} \tilde{g}, \tilde{\varphi} \tilde{\psi} \rangle = \langle U_{1-z}(g), \bar{\varphi} * \bar{\psi} \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} U_{1-z}(g)(\psi * \bar{\varphi}). \end{aligned}$$

Per il lemma 5 la funzione $\chi(z)$ è analitica in $0 < \operatorname{Re} z < 1$ e continua in $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Procedendo come nella dimostrazione di tale lemma, sfruttando la densità di \mathcal{S} in L_1 e di \mathcal{F} in $L_{q'}$, il risultato si estende al caso di $\varphi \in L_1$ e $\psi \in L_{q'}$. Poichè le funzioni semplici appartengono ad L_p per ogni $p \geq 1$, la prima parte del lemma resta provato.

Quanto alla seconda, se $z = x + iy$, $0 \leq x \leq 1$, si ha, tenendo conto della (7):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} T_z(\varphi) \psi \right| \leq C(n, p, \mathbf{P})(2 + |y|)^{2n} \|g\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_1} \|\psi\|_{L_{q'}}$$

Quindi, posto $A/2 = \max(2n, \lg [C(n, p, \mathbf{P}) \|g\|_{L_p} \|\varphi\|_{L_1} \|\psi\|_{L_{q'}}])$, risulta:

$$\sup_{|y| \leq r} \sup_{0 \leq x \leq 1} \lg \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_z(\varphi) \psi \right| \leq A/2(1 + \lg(2 + r)) \leq A(2 + r).$$

NOTA. Il lemma 6 ci assicura che la famiglia di operatori T_z , $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, è analitica e di ammissibile crescita, secondo la definizione di E. Stein [13].

LEMMA 7. Sia T_z , $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, l'operatore definito in (6). Allora:

- i) T_0 applica L_1 in L_s con norma $\|T_0\|_{1,s} \leq \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1} \tilde{g})\|_{L_q}$;
- ii) T_1 applica L_1 in L_p con norma $\|T_1\|_{1,p} \leq \|g\|_{L_p}$;
- iii) Per ogni numero reale y :

$$\|T_{iy}(\varphi)\|_{L_s} \leq A_0(y) \|\varphi\|_{L_1}; \quad \|T_{1+iy}(\varphi)\|_{L_p} \leq A_1(y) \|\varphi\|$$

ovv

$$A_0(y) = C(n, p, \mathbf{P})(1 + |y|)^n \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g})\|_{L_s}$$

$$A_1(y) = C(n, p, \mathbf{P})(1 + |y|)^n \|g\|_{L_p}$$

DIM. i) e ii) sono conseguenze immediate della definizione di T_α . Quanto a iii) basta applicare note disuguaglianze ed il corollario 1 dopo aver osservato che essendo:

$$U_{1-i\nu}(g) = U_{-i\nu}(\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g}))$$

si può scrivere:

$$T_{i\nu}(\varphi) = U_{-i\nu}(\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g})) * \varphi; \quad T_{1+i\nu}(\varphi) = U_{-i\nu}(g) * \varphi$$

TEOREMA 1. Sia $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_0^n$, $1 < p < k(\mathbf{P})$ e g una funzione appartenente ad L_p e tale che $\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g}) \in L_s$, $1 < s < \infty$. Allora per ogni $\alpha \in [0, 1]$ è:

$$\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{\alpha-1}\tilde{g}) \in L_r; \quad 1/r = (1 - \alpha/s + \alpha/p)$$

e

$$\|\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{\alpha-1}\tilde{g})\|_{L_r} \leq C \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g})\|_{L_s}^{1-\alpha} \|g\|_{L_p}^\alpha$$

dove C è una costante dipendente unicamente da n, p, \mathbf{P} .

DIM. La dimostrazione si fonda su un teorema di interpolazione complessa di E. Stein [13], che è qui lecito applicare in base ai lemmi 6 e 7. Tale teorema assicura che per ogni $\alpha \in [0, 1]$. L'operatore T_α definito in L_1 da:

$$T_\alpha(\varphi) = U_{1-\alpha}(g) * \varphi = \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{\alpha-1}\tilde{g}) * \varphi$$

applica con continuità L_1 in L_r , $1/r = (1 - \alpha)/s + \alpha/p$, e che:

$$\|T_\alpha(\varphi)\|_{L_r} \leq A_\alpha \|\varphi\|_{L_1}$$

dove:

$$(8) \quad \lg A_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(1 - \alpha, y) \lg A_0(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\alpha, y) \lg A_1(y) dy,$$

essendo $A_0(y)$ ed $A_1(y)$ le funzioni che entrano nelle maggiorazioni iii) del lemma 7 ed

$$\omega(x, y) = \frac{\frac{1}{2} \tan(\pi x/2)}{[\tan^2(\pi x/2) + \tanh^2(\pi y/2)] \cosh^2(\pi y/2)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dunque $\mathcal{F}^{-1}([\mathbb{P}^+(\xi)]^{\alpha-1} \tilde{g})$ appartiene ad L_1^r , per gli r e gli α sopra indicati, e quindi ad L_r e

$$(9) \quad \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbb{P}^+(\xi)]^{\alpha-1} \tilde{g})\|_{L_r} = L_1^r(\mathcal{F}^{-1}([\mathbb{P}^+(\xi)]^{\alpha-1} \tilde{g})) \leq A_\alpha$$

Semplici calcoli provano che $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t, y) dt = t$ e quindi, sostituendo nella (8) ad $A_0(y)$ ed $A_1(y)$ le loro rispettive espressioni, si ottiene:

$$(10) \quad \lg A_\alpha = (1 - \alpha) \lg \|F^{-1}([\mathbb{P}^+(\xi)]^{-1} \tilde{g})\|_{L_s} + \alpha \lg \|g\|_{L_p} + C(\alpha) = \\ = \lg \left(\exp [C(\alpha)] \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbb{P}^+(\xi)]^{-1} \tilde{g})\|_{L_s}^{1-\alpha} \cdot \|g\|_{L_p}^\alpha \right)$$

dove

$$c(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(1 - \alpha, y) \lg [c(1 + |y|)^n] dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\alpha, y) \lg [c(1 + |y|)^n] dy$$

Posto:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x, y - \tau) \lg [c(1 + |\tau|)^n] d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(1 - \alpha, y - \tau) \lg [c(1 + |\tau|)^n] d\tau$$

risulta:

$$c(\alpha) = u(1 - \alpha, 0)$$

Essendo (si veda (7)) $u(x, y)$ funzione armonica nella striscia $0 < x < 1$ $-\infty < y < +\infty$ e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \lg [c(1 + |y_0|)^n]; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \lg [c(1 + |y_0|)^n],$$

$c(\alpha)$ risulta limitata in $0 \leq x \leq 1$.

Dalla (10) segue dunque:

$$A_\alpha \leq K \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g})\|_{L_s}^{1-\alpha} \|g\|_{L_p}^\alpha$$

ove $K = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} c(\alpha)$. Ciò unito alla (9) prova completamente il teorema.

TEOREMA 2. Sia $\mathbf{P} \in \mathfrak{F}_0^n$, $1 < p < k(\mathbf{P})$ e $1 < s < +\infty$. Se f è una funzione appartenente ad L_s ed avente in L_p le derivate generalizzate secondo Liouville ⁽⁵⁾ $D^{s^l}f$, dove s^l , $l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$ sono i vertici di \mathbf{P} diversi dall'origine, allora, qualunque sia $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$ è $D^{\mathbf{r}}f \in L_r$, per ogni r espressa da:

$$1/r = \frac{k_r}{1-k_r} \eta + \frac{1-a}{s} + a \left(\frac{1}{p} - \frac{\eta}{1-k_r} \right)$$

con

$$a \in [k_r, 1] \quad \text{ed} \quad \eta \in \left[\frac{1-h_r}{h(\mathbf{P}^+)}, \frac{1-k_r}{k(\mathbf{P})} \right] \cap \left[0, \frac{1-k_r}{k(\mathbf{P})} \right].$$

Inoltre per tali r è:

$$\|D^{\mathbf{r}}f\|_{L_r} \leq C \|f\|_{L_s}^{1-a} \left(\sum_2^{N(\mathbf{P})} \|D^{s^l}f\|_{L_p} \right)^a$$

con C costante indipendente da f .

DIM. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti da L. Cattabriga per la dimostrazione del teorema 4.5 di [1] si vede che l'ipotesi $D^{s^l}f \in L_p$, $l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$ implica:

$$g = \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]\tilde{f}) \in L_p \quad \text{e} \quad \|g\|_{L_p} \leq C \sum_2^{N(\mathbf{P})} \|D^{s^l}f\|_{L_p}$$

Per ipotesi è $f = \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{-1}\tilde{g}) \in L_s$. La funzione g soddisfa dunque alle ipotesi del teorema 1. Risultando per ogni $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$, $0 \leq k_r \leq 1$, si ha

⁽⁵⁾ Se $f \in \Phi'$ e $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, r_j reali, $j = 1, \dots, n$, chiamiamo derivata generalizzata secondo Liouville d'ordine \mathbf{r} e indichiamo con $D_{\mathbf{r}}^r f$, l'elemento di Φ' definito da: $\mathcal{F}^{-1}((i\xi)^r \tilde{f})$, dove $(i\xi)^r = \prod_1^n (i\xi_j)^{r_j}$ e

$$(i\xi_j)^{r_j} = \begin{cases} \exp[-i\pi r_j/2] |\xi_j|^{r_j} & \text{se } \xi_j < 0. \\ \exp[i\pi r_j/2] \xi_j^{r_j} & \text{se } \xi_j > 0, \end{cases}$$

quindi:

$$(11) \quad \mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{k_r-1} \tilde{g}) \in L_u, \quad \frac{1}{u} = \frac{1-k_r}{s} + \frac{k_r}{p}$$

e

$$(12) \quad \|\mathcal{F}^{-1}([\mathbf{P}^+(\xi)]^{k_r-1} \tilde{g})\|_{L_u} \leq \|f\|_{L_s}^{1-k_r} \|g\|_{L_p}^{k_r}$$

Scriviamo ora:

$$D^r f = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^r [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-k_r} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{k_r} \tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^r [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-k_r} [\mathbf{P}^+(\xi)]^{k_r-1} \tilde{g}).$$

Si prova con ragionamenti analoghi a quelli fatti per la dimostrazione del lemma 3, che la funzione $(i\xi)^r [\mathbf{P}^+(\xi)]^{-k_r}$ è un moltiplicatore di ψ ed un moltiplicatore di tipo (p, p) . Da (11) e (12) segue dunque:

$$(13) \quad D^r f \in L_u; \quad \frac{1}{u} = \frac{1-k_r}{s} + \frac{k_r}{p}; \quad \|D^r f\|_{L_u} \leq C \|f\|_{L_s}^{1-k_r} \|g\|_{L_p}^{k_r}.$$

Posto $P(D) = \sum_2^{N(\mathbf{P})} D^{s^i}$, alla funzione f e all'operatore $P(D)$ si può applicare il teorema 4.2 di [3] qualunque sia $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$, risultando:

$$\frac{1-h_r}{h(\mathbf{P}^+)} \leq \frac{1-k_r}{k(\mathbf{P})} < \frac{1}{p}.$$

Pertanto:

$$(14) \quad D^r f \in L_q; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \eta; \quad \eta \in \left[\frac{1-h_r}{h(\mathbf{P}^+)}, \frac{1-k_r}{k(\mathbf{P})} \right] \cap \left[0, \frac{1-k_r}{k(\mathbf{P})} \right]$$

e

$$(15) \quad \|D^r f\|_{L_q} \leq C \sum_1^{N(\mathbf{P})} \|D^{s^i} f\|_{L_p}$$

Da (13), (14), (15) segue:

$$(16) \quad D^r f \in L_r, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\alpha}{u} + \frac{\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

e

$$(17) \quad \|D^r f\|_{L_r} \leq \|D^r f\|_{L_u}^{1-\alpha} \|D^r f\|_{L_q}^{\alpha}$$

Sostituendo a u e q le loro espressioni, e ponendo $k_r + \alpha(1-k_r) = \alpha$ si vede come (16) e (17) coincidano con la tesi del teorema.

OSSERVAZIONE. La formula (16) dice che i valori consentiti ad $1/r$ sono quelli di ogni intervallo avente un estremo in $1/u$ e l'altro in un punto qualunque dell'intervallo

$$I = \left[\frac{1}{p} - \frac{1 - k_r}{k(\mathbf{P})}, \frac{1}{p} - \frac{1 - h_r}{h(\mathbf{P}^+)} \right] \cap \left[\frac{1}{p} - \frac{1 - k_r}{k(\mathbf{P})}, \frac{1}{p} \right].$$

Se

$$s \in \left[\frac{p}{1 - pk^{-1}(\mathbf{P})}, \frac{p}{1 - ph^{-1}(\mathbf{P}^+)} \right],$$

allora qualunque sia $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$ risulta

$$\frac{1}{u} = \frac{1 - k_r}{s} + \frac{k_r}{p} \in I$$

ed i valori consentiti ad $1/r$ sono tutti e soli quelli di I . In tal caso il teorema precedente non dice nulla di nuovo rispetto al teorema 4.2 di [3], d'accordo col fatto che lo stesso teorema assicura che se $D^{s^l} f \in L_p$, $l = 2, \dots, N(\mathbf{P})$, allora risulta $f \in L_s$. Ma per valori di s non appartenenti all'intervallo sopra indicato il teorema precedente dà risultati non deducibili da, teoremi di [1], [2] e [3]. Tale risultato concorda con quelli di L. Nierenberg ed E. Gagliardo [12] e [4], quando i vertici dall'origine del poliedro \mathbf{P} siano $s^j = m\mathbf{e}^j$, $j = 1, \dots, n$, $m > 0$. In tal caso è $k(\mathbf{P}) = h(\mathbf{P}^+) = n/m$, e per ogni $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$, $h_r = k_r = |\mathbf{r}|/m$ e quindi:

$$\frac{1}{r} = \frac{|\mathbf{r}|}{n} + \frac{1 - a}{s} + a \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n} \right), \quad a \in \left[\frac{|\mathbf{r}|}{m}, 1 \right].$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. CATTABRIGA, *Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **24**, fasc. I (1970).
- [2] L. CATTABRIGA, *Moltiplicatori di Fourier e teoremi di immersione per certi spazi funzionali II*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **25**, fasc. II (1971).
- [3] L. CATTABRIGA, *Sulle soluzioni in tutto lo spazio di certe equazioni a derivate parziali*, Atti Acc. Naz. Lincei, **50**, fasc. II (1971).
- [4] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ric. Mat., **8** (1959), p. 1.

- [5] I. M. GEL'FAND - G. E. SHILOV, *Function and Generalized Function Spaces*, Academic Press Inc., London, L.T.D. (1966).
- [6] HARDY - LITTLEWOOD - POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press (1959).
- [7] I. I. HIRSCHMAN JR., *A convexity theorem for certain groups of transformations*, Journal d'Analyse, vol. **2** (1952).
- [8] L. HÖRMANDER, *Estimates for traslation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math., **104** (1960).
- [9] V. P. IL'IN, *Some inequalities in function spaces and their application to the study of the convergence of variational process*, Trudy MIAM, SSSR, **53** (1959).
- [10] P. I. LIZORKIN, *Differenziazione generalizzata di Liouville e spazi funzionali $L'_p(E^h)$. Teoremi di immersione*, Mat. Sb., **60** (1963).
- [11] P. I. LIZORKIN, *On multipliers of Fourier integrals in the spaces $L_{p,0}$* , Trudy MIAM, **89** (1967).
- [12] L. NIRENBERG, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **13**, fasc. II (1959).
- [13] E. M. STEIN, *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **83** (1956).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 aprile 1973.