

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUY BOILLAT

TOMMASO RUGGERI

**Su alcune classi di potenziali termodinamici
come conseguenza dell'esistenza di particolari
onde di discontinuità nella meccanica dei
continui con deformazioni finite**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 51 (1974), p. 293-304

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__293_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**Su alcune classi di potenziali termodinamici
come conseguenza dell'esistenza
di particolari onde di discontinuità
nella meccanica dei continui con deformazioni finite (*).**

GUY BOILLAT e TOMMASO RUGGERI

SUNTO - Prendendo in esame un continuo isotropo sottoposto a deformazioni finite, gli AA. caratterizzano alcune classi generali di possibili potenziali termodinamici, imponendo l'esistenza di alcuni tipi di onde di discontinuità fisicamente interessanti. In particolare, dapprima si richiede l'esistenza di un'onda doppia come avviene nel caso linearizzato, determinando così due classi generali di potenziali termodinamici. Il primo potenziale coincide con quello proposto da Tolotti. Nella seconda classe, invece, rientra come caso particolare un tipo di potenziale proposto da Grioli. Si determinano infine altre due classi di potenziali che comprendono le prime due imponendo l'esistenza di un'onda eccezionale.

SUMMARY - Some general classes of thermodynamical potentials are determined, for an isotropic continuum with finite deformations, requiring the existence of some types of waves of physical interest. Especially, the existence of a double wave (which exists in the linearized case) correspond to classes that admit as particular cases potentials proposed by Tolotti and Grioli. A still more general form of potential is also given which yields exceptional waves.

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica - Università di Bologna.
Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

Introduzione.

Nella meccanica dei continui classici con deformazioni finite, si presenta, come è ben noto, una notevole difficoltà a dare una forma esplicita del potenziale termodinamico.

Alcuni Autori hanno proposto varie forme di potenziali, partendo sostanzialmente da ipotesi di semplicità analitica (vedi ad es. [1], [2], [3]).

Tolotti [4] nel 1942, ha proposto una forma di potenziale tale che le velocità di propagazione delle onde di discontinuità fossero tutte reali per ogni possibile deformazione del continuo e inoltre richiedendo l'esistenza di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale doppia. Queste richieste, pur partendo da un'ipotesi di semplicità fisica, sono come è noto, alquanto restrittive (vedi [5], [6]).

Manacorda [7] mettendosi nel caso di solidi incompressibili ha dato delle condizioni per l'esistenza di onde di discontinuità e di urto, prendendo come potenziale quello proposto da Signorini [1] ⁽¹⁾.

In questo lavoro, considerando un continuo isotropo, sottoposto a deformazioni finite, ci proponiamo di caratterizzare alcune classi generali di potenziale termodinamico, imponendo l'esistenza di alcuni tipi di onde di propagazione fisicamente interessanti.

Dapprima si richiede l'esistenza di un'onda doppia come avviene nel caso lineare determinando due classi di potenziali in una delle quali rientra un potenziale proposto da Grioli [3]. Si impone successivamente l'esistenza di un'onda eccezionale ricavando così altre due classi generali di possibili potenziali termodinamici.

Data la difficoltà analitica del problema, ci limiteremo, come si fa usualmente, a considerare un campo degli spostamenti dipendenti da una sola variabile spaziale.

1. Premesse generali.

Le equazioni lagrangiane che governano la meccanica dei continui classici con deformazioni finite sono in C_* :

$$(1) \quad (\phi_{lm} x_{r,l})_{,m} + \rho_* \ddot{s}_r = 0$$

⁽¹⁾ Per altri lavori riguardanti la propagazione di onde di discontinuità nei continui classici vedi ad es. [8], [9] (e bibliografia relativa), [10] e [11]. Per i continui polari [12].

dove C_* è lo stato naturale (esente da stress), $s_r = x_r - y_r$ è il vettore spostamento, ϕ_{lm} è la matrice lagrangiana dello sforzo, ρ_* la densità in C_* e $_{,l} \equiv \partial/\partial y_l$, $\dot{} \equiv \partial/\partial t$. Alle (1), per un sistema a trasformazioni reversibili, si associano le seguenti equazioni costitutive:

$$(2) \quad \dot{\phi}_{iL} = - \partial W / \partial \varepsilon_{ik}$$

con

$$(3) \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (s_{i,k} + s_{k,i} + s_{l,i} s_{l,k}).$$

Nel caso di un materiale isotropo a trasformazioni isoterme si può pensare il potenziale termodinamico W come funzione degli invarianti principali della matrice di deformazione ε :

$$(4) \quad I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} - I_1^2, \quad I_3 = \det |\varepsilon_{ik}|.$$

Supponiamo che la deformazione sia tale che il vettore \mathbf{s} sia funzione solo di y_1 e di t : $\mathbf{s} \equiv \mathbf{s}(y_1, t)$.

In questo caso le uniche componenti diverse da zero della matrice ε sono:

$$(5) \quad \varepsilon_{11} = s'_1 + \frac{1}{2} s'_k s'_k, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} s'_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} s'_3,$$

dove l'apice indica la derivata rispetto ad y_1 . Si ha pertanto:

$$(6) \quad I_1 = \varepsilon_{11} = s'_1 + \frac{1}{2} s'_k s'_k, \quad I_2 = \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{31}^2 = \\ = \frac{1}{2} (s'^2_2 + s'^2_3), \quad I_3 = 0.$$

Le equazioni (1) diventano,

$$(7) \quad \rho_* \ddot{s}_r + \phi_{11} s''_r + \phi_{11,1} s'_r + \phi_{r1,1} = 0.$$

Supponiamo che \mathbf{s} sia una funzione continua insieme alle sue derivate prime, mentre attraverso una superficie (piana) d'onda abbiano delle discontinuità le sue derivate seconde.

2. Equazioni per le discontinuità.

Facendo uso delle classiche condizioni di Hadamard:

$$[\dot{\mathbf{s}}_i] = \lambda_*^2 \delta^2 s_i, \quad \delta s'_i = [s''_i] = \delta^2 s_i$$

essendo λ_* la velocità normale di propagazione, si ottengono da (7) le seguenti condizioni per le discontinuità:

$$(8) \quad \begin{cases} \nu \delta^2 s_1 + (1 + s'_1) \delta \phi_{11} = 0, \\ \nu \delta^2 s_2 + s'_2 \delta \phi_{11} + \delta \phi_{12} = 0, \\ \nu \delta^2 s_3 + s'_3 \delta \phi_{11} + \delta \phi_{13} = 0, \end{cases}$$

con $\nu = \varrho_* \lambda_*^2 + \phi_{11}$.

Osservando che nel caso in esame intervengono nelle equazioni di campo (7) soltanto le componenti ϕ_{1k} ed inoltre che $\partial I_3 / \partial \varepsilon_{1k} = 0$, può ritenersi $W(I_1, I_2, 0)$ funzione dei soli invarianti I_1 ed I_2 . Si ottiene così:

$$(9) \quad \phi_{11} = - \partial W / \partial I_1, \quad \phi_{12} = - s'_2 \partial W / \partial I_2, \quad \phi_{13} = - s'_3 \partial W / \partial I_2.$$

Per il seguito conviene pensare $W \equiv W(J, D)$, con

$$J = I_1, \quad D = \sqrt{1 + 2(I_1 - I_2)} = 1 + s'_1.$$

Con questo cambio di variabili le (9) assumono la forma:

$$(10) \quad \phi_{11} = - W_J - W_D / D, \quad \phi_{12} = s'_2 W_D / D, \quad \phi_{13} = s'_3 W_D / D,$$

dove si è indicato: $W_J = \partial W / \partial J$, $W_D = \partial W / \partial D$.

Sostituendo le (10) nelle (8) si ottiene:

$$(11) \quad \begin{cases} \nu \delta^2 s_1 - D[\delta W_J + \delta(W_D/D)] = 0 \\ (\nu + W_D/D) \delta^2 s_2 - s'_2 \delta W_J = 0 \\ (\nu + W_D/D) \delta^2 s_3 - s'_3 \delta W_J = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando la (11.2) per s'_2 e la (11.3) per s'_3 e tenendo presente che:

$$\delta J = D \delta D + s'_2 \delta^2 s_2 + s'_3 \delta^2 s_3, \quad \delta D = \delta^2 s_1,$$

si ottiene da (11):

$$(12) \quad \begin{cases} \nu \delta D - D[\delta W_J + \delta(W_D/D)] = 0, \\ (\nu + W_D/D)(\delta J - D \delta D) - 2I_2 \delta W_J = 0. \end{cases}$$

Le (12) esplicitate ci forniscono il seguente sistema omogeneo in δJ e δD :

$$(13) \quad \begin{cases} (DW_{JJ} + W_{JD}) \delta J + (DW_{JD} + W_{DD} - \Omega) \delta D = 0, \\ (\Omega - 2I_2 W_{JJ}) \delta J - (2I_2 W_{JD} + \Omega D) \delta D = 0 \end{cases}$$

con

$$(14) \quad \Omega - \varrho_* \lambda_*^2 - W_J.$$

3. Esistenza di un'onda trasversale eccezionale.

Se $\delta J = \delta D = 0$ il sistema (13) è soddisfatto e da (11) segue subito:

$$(15) \quad v = -W_D/D \Rightarrow \varrho_* \lambda_*^2 = W_J.$$

Notiamo che quest'onda esiste quale che sia il potenziale purchè $W_J \geq 0$. Inoltre $\delta \lambda_*$ è identicamente uguale a zero in quanto $\delta J = \delta D = 0$ e ciò comporta che l'onda è eccezionale [13].

In questo caso, ricordando l'espressione di δJ e δD si ricava subito:

$$\delta^2 s_1 = 0, \quad s'_2 \delta^2 s_2 + s'_3 \delta^2 s_3 = 0,$$

trattasi pertanto di un'onda trasversale.

4. Polinomio caratteristico.

Supposto ormai δJ e δD non nulli contemporaneamente segue l'annullarsi del determinante associato al sistema omogeneo (13):

$$(16) \quad \Omega^2 - \Omega[2DW_{JD} + (1 + 2J)W_{JJ} + W_{DD}] + \\ + 2I_2(W_{JJ}W_{DD} - W_{JD}^2) = 0.$$

La (16) fornisce le rimanenti velocità di propagazione.

Osserviamo che nel caso linearizzato W ha la seguente espressione:

$$2W = (\gamma + 2\mu)I_1^2 + 2\mu I_2 = (\gamma + 2\mu)J^2 + \mu(1 + 2J - D^2).$$

Al limite $J \rightarrow 0$, $D \rightarrow 1$, si trova da (15), la ben nota velocità dell'onda trasversale: $\lambda_*^2 = \mu/\varrho_*$ mentre le radici di (16) ci forniscono di nuovo $\lambda_*^2 = \mu/\varrho_*$ e $\lambda_*^2 = (\gamma + 2\mu)/\varrho_*$ (onda longitudinale). Pertanto l'onda trasversale è, nel caso lineare, un'onda doppia.

Questa osservazione ci porta a cercare la condizione affinché anche nel caso non lineare la velocità data dalla (15) sia doppia ovvero sia anche soluzione di (16).

5. Esistenza di un'onda doppia e caratterizzazione di due classi di potenziali.

L'esistenza di un'onda doppia (che risulterà eccezionale poichè il sistema delle equazioni di campo (1) è conservativo [14]) propagantesi con la velocità (15) impone [vedi (14)] che $\Omega = 0$ sia radice dell'equazione (16) e ciò comporta che il potenziale soddisfi alla seguente equazione differenziale:

$$(17) \quad W_{JJ} W_{DD} - W_{JD}^2 = 0.$$

i) Se $W_J = \mu = \text{cost} > 0$, la (17) è identicamente soddisfatta e si ricava:

$$(18) \quad W = F(D) + \mu J.$$

Questo potenziale è stato determinato da Tolotti [4].

Le velocità di propagazione sono:

$$(19) \quad \lambda_*^2 = \mu/\varrho_* \quad (\text{onda doppia trasversale}),$$

$$(20) \quad \lambda_*^2 = (F'' + \mu)/\varrho_* \quad (\text{onda longitudinale}).$$

Il legame sforzo-deformazione, tenendo presente che,

$$\phi_{1k} = - [W_J + (1 + 2J) W_D/D] \delta_{1k} + 2(W_D^2/D) \varepsilon_{1k},$$

è, in questo caso:

$$\phi_{1k} = - [\mu + (1 + 2J) F'/D] \delta_{1k} + 2(F''/D) \varepsilon_{1k}.$$

ii) La soluzione generale di (17) è invece:

$$(21) \quad W = \omega J + F(\omega)D + G(\omega),$$

dove $\omega(J, D)$ è definita implicitamente da:

$$(22) \quad J + F'(\omega)D + G'(\omega) = 0$$

(l'apice indica la derivata delle funzioni arbitrarie F e G rispetto ai loro argomenti).

Le velocità di propagazione sono allora:

$$(23) \quad \lambda_*^2 = \omega/\varrho_* \quad (\text{onda doppia}),$$

$$(24) \quad \varrho_* \lambda_*^2 = \omega - [(F' + D)^2 + 2I_2]/(DF'' + G'')$$

Innanzitutto osserviamo che la velocità data dalla (24) è sempre diversa dalla velocità (23).

Inoltre, affinché l'espressione (21) definisca un'effettivo potenziale termodinamico è necessario che W soddisfi alle condizioni analitiche usuali per i potenziali (vedi [5]). Dal punto di vista della teoria della propagazione è necessario che i secondi membri di (23) e (24) siano positivi in modo tale che le velocità siano reali.

Il legame sforzo-deformazione relativo al potenziale (21) è:

$$\phi_{1k} = -[\omega + (1 + 2J)F/D]\delta_{1k} + 2(F/D)\varepsilon_{1k}.$$

6. Potenziale di Grioli.

G. Grioli in [3] ha mostrato che il potenziale più generale che ammette un legame del tipo:

$$(25) \quad X_{rs} = D_{(Q)}^{p-1} P_2(\varepsilon_{rs}^{(Q)}),$$

essendo X_{rs} lo stress euleriano e P_2 un polinomio di secondo grado nelle $\varepsilon_{rs}^{(Q)}$:

$$(26) \quad \varepsilon_{ik}^{(Q)} = \frac{1}{2}(s_{i,k} + s_{k,i} + s_{i,j}s_{k,j})$$

(gli invarianti principali della matrice $\varepsilon^{(e)}$ coincidono con quelli della ε), è per $p \neq 0$:

$$(27) \quad W = D^p \left[\frac{\alpha}{2} I_1^2 + (\mu - \nu) I_2 + \nu \left(I_1 - \frac{1}{p} \right) \right] + \frac{\nu}{p}$$

con

$$(28) \quad \alpha = \gamma + 2\mu - (2 + p)\nu .$$

Da (27) si ricava

$$(29) \quad W_J = D^p(\alpha J + \mu) = \omega ,$$

$$(30) \quad W_D = D^{p-1} \left[\frac{\alpha p}{2} J^2 + (\nu - \mu) \left(1 + \frac{p}{2} \right) D^2 + p\mu J + \right. \\ \left. + \frac{p}{2} (\mu - \nu) - \nu = F(\omega) . \right.$$

Affinchè il potenziale (27) appartenga alla classe (21) è necessario e sufficiente che la (30) sia funzione della (29) e pertanto si vede che le costanti devono essere tali che:

$$(31) \quad p = -1 , \quad \alpha = \gamma + 2\mu - \nu = \mu^2/(\mu + \nu) .$$

Per questi valori delle costanti il potenziale (27) rientra in (21) con:

$$(32) \quad \omega = (\alpha J + \mu)/D , \quad F(\omega) = -\frac{1}{2}(\omega^2/\alpha + \mu - \nu) , \quad G(\omega) = \mu\omega/\alpha - \nu$$

ed assume la forma:

$$(33) \quad W = \frac{1}{D} \left[\frac{\mu^2}{2(\mu + \nu)} I_1^2 + (\mu - \nu) I_2 + \nu(I_1 + 1) \right] - \nu .$$

Le velocità (23), (24) si particolarizzano nelle:

$$(34) \quad \lambda_{*1}^2 = (\alpha J + \mu)/\varrho_* D ,$$

$$(35) \quad \lambda_{*2}^2 = \lambda_{*1}^2 + \frac{\alpha}{\varrho_* D} \left[\left(D - \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 + 2I_2 \right] .$$

Da (31.2) si può ricavare ν in termini delle costanti di Lamé γ e μ :

$$(36) \quad \nu^2 - (\nu + \mu)(\gamma + \mu) = 0 .$$

Ricordando che le costanti di Lamé soddisfano alle ben note diseuguaglianze $\mu > 0$, $3\gamma + 2\mu > 0$, si vede, essendo di conseguenza $\gamma + \mu > 0$ che le radici di (36) sono entrambi reali e di segno opposto. Inoltre, potendosi scrivere:

$$\alpha = (\mu^2/\nu^2)(\gamma + \mu)$$

risulta sempre $\alpha > 0$, ne segue che la velocità (35) è sempre maggiore della (34).

Affinchè le velocità di propagazione siano reali è condizione necessaria e sufficiente che la deformazione sia tale che:

$$(37) \quad I_1 > -\mu/\alpha.$$

Osservando che nel caso in esame $I_1 > -\frac{1}{2}$ (in quanto D ed I_2 sono positivi) si può provare facilmente che la (37) è sempre verificata (quale che sia la deformazione) per la radice positiva ν di (36).

In conclusione il potenziale (33) con ν dato dalla (36) rientra nella classe (21) e quindi si ha una velocità doppia ed eccezionale (34) ed un'altra (35).

Notiamo infine che facendo tendere $J \rightarrow 0$ e $D \rightarrow 1$ le velocità date dalle (34), (35) tendono rispettivamente alle velocità del caso lineare per entrambi i valori di ν .

Nel caso in cui $p = 0$ da (25) si ricava il seguente potenziale:

$$(38) \quad W = \left(\frac{g}{4} - \mu\right) (\ln D - J) + \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2}g\right) J^2 + \frac{g}{4} I_2.$$

È immediato verificare che in questo caso il potenziale (30) non rientra nella classe (21) ma per $g = -2\gamma$ ha la forma del potenziale di Tolotti (18) con

$$F(D) = -\frac{1}{2} (\gamma + 2\mu) \ln D + \frac{\gamma}{4} D^2.$$

Tenendo presenti (19) e (20) si ricavano le seguenti velocità:

$$\lambda_*^2 = \mu/\varrho_*, \quad \lambda_*^2 = \frac{1}{2\varrho_*} (\gamma + 2\mu) \left(1 + \frac{1}{D^2}\right).$$

Notiamo che le velocità sono sempre reali.

7. Su altre due classi generali di potenziali che danno due onde eccezionali.

Mostreremo adesso l'esistenza di due classi di potenziali che hanno come casi particolari le (18) e (21), supponendo che un'onda la cui velocità è radice del polinomio caratteristico (16) sia eccezionale senza essere necessariamente coincidente con l'onda (15).

Come è noto la condizione di eccezionalità si traduce nel richiedere che: $\delta\lambda_* = 0$.

Posto $\omega = \varrho_* \lambda_*^2$, si ha:

$$(39) \quad \delta\omega = 0.$$

Ricordando che $\nu = \omega - W_J - W_D/D$, le (12) diventano in questo caso:

$$(40) \quad \delta(\nu D) = 0,$$

$$(41) \quad \delta[(W_J - \omega)\sqrt{I_2}] = 0.$$

Siano $Y(J, D)$, $Z(J, D)$ due funzioni tali che $\delta Y = \delta Z = 0$, si ha allora:

$$(42) \quad \delta Y = Y_J \delta J + Y_D \delta D = 0, \quad \delta Z = Z_J \delta J + Z_D \delta D = 0,$$

essendo δJ e δD non nulli contemporaneamente segue da (42) che Z è una funzione di Y (Y diverso da costante).

i) Esaminiamo dapprima il caso che $\delta\omega = 0$ in quanto $\omega = \mu = \text{cost}$. Identificando Z con $(W_J - \omega)\sqrt{I_2}$ ed Y con νD segue per quanto detto prima:

$$(43) \quad (W_J - \mu)\sqrt{I_2} = H(\xi)$$

con

$$(44) \quad \xi = HD/\sqrt{I_2} + W_D.$$

Da (43) e (44) si ha:

$$(45) \quad W_J = H(\xi)/\sqrt{I_2} + \mu,$$

$$(46) \quad W_D = \xi - DH(\xi)/\sqrt{I_2}$$

e integrando si ricava il potenziale:

$$(47) \quad W = \mu J + \xi D + 2H \sqrt{I_2} + G(\xi),$$

con

$$(48) \quad 2H' \sqrt{I_2} + G' + D = 0.$$

Si osservi che la (47) è soluzione dell'equazione di Monge-Ampère che si ottiene sostituendo nel polinomio (16) $\Omega = \mu - W_J$.

Quando $H \equiv 0$ il potenziale (47) coincide con quello di Tolotti (18).

Le velocità di propagazione sono:

$$\begin{aligned} \varrho_* \lambda_*^2 &= W_J = \mu + H/\sqrt{I_2}, \\ \varrho_* \lambda_*^2 &= \mu, \\ \varrho_* \lambda_*^2 &= \mu - [1 - H'(2H' - D/\sqrt{I_2})]/(2H'' \sqrt{I_2} + G''). \end{aligned}$$

Il legame sforzo-deformazione è:

$$\phi_{1k} = -[\mu + (\xi/D)(1 + 2J) - 2JH \sqrt{I_2}] \delta_{1k} + 2(\xi/D - H/\sqrt{I_2}) \varepsilon_{1k}.$$

ii) Supposto ω diverso da costante, identificando Y con ω e Z una volta con νD ed una volta con $(W_J - \omega) \sqrt{I_2}$ e tenendo presente (39), (40) e (41) si ricava:

$$(49) \quad W_J = \omega + H(\omega)/\sqrt{I_2},$$

$$(50) \quad W_D = F(\omega) - DH(\omega)/\sqrt{I_2}.$$

Per integrazione si ha:

$$(51) \quad W = \omega J + DF(\omega) + 2H(\omega) \sqrt{I_2} + G(\omega),$$

con

$$(52) \quad J + F'(\omega)D + 2H'(\omega) \sqrt{I_2} + G'(\omega) = 0.$$

Il legame sforzo-deformazione è:

$$\phi_{1k} = -[\omega + (1 + 2J)F/D - 2HJ/\sqrt{I_2}] \delta_{1k} + 2(F/D - H/\sqrt{I_2}) \varepsilon_{1k}.$$

Per $H \equiv 0$ il potenziale (51) coincide con (21).

* * *

Uno degli Autori (G. B.) ringrazia i Proff. D. Graffi e L. Caprioli per la Loro gentile ospitalità presso l'Istituto di Matematica di Bologna.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria II, Ann. Mat. pura e appl., serie IV, **30** (1949), 1-72. *Trasformazioni termoelastiche finite*. Memoria III, Ann. Mat. pura e appl., serie IV, **39** (1955), 147-201.
- [2] P. G. BORDONI, *Sopra le trasformazioni termoelastiche finite di certi solidi omogenei ed isotropi*, Rend. Mat. e Appl., **12** (1953), 237-266.
- [3] G. GRIOLI, *On the thermodynamic potential for continuums with reversible transformations—some possible types*, Meccanica, **1** (1966), 15-20.
- [4] C. TOLOTTI, *Deformazioni elastiche finite: Onde ordinarie di discontinuità e casi tipici di solidi elastici isotropi*, Rend. Mat. Appl., serie V, **4** (1943) 34-59.
- [5] G. GRIOLI, *Mathematical theory of elastic equilibrium*, Ergebnisse der angewandten Mathematik, Springer-Verlag (1962).
- [6] A. BRESSAN, *Sulla propagazione delle onde ordinarie di discontinuità nei sistemi a trasformazioni reversibili*, Rend. Sem. Mat. di Padova, **33** (1963), 99-139.
- [7] T. MANACORDA, *Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità nella Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma, **10** (1959), 19-33; *On the waves propagation in Signorini's incompressible Materials* Boll. U.M.I. (4), **5** (1972), 234-240.
- [8] C. TRUESDELL, *Existence of Longitudinal waves*, Journal of the Acoustical Soc. of Amer. (3), **40** (1966), 729-730.
- [9] C. TRUESDELL - R. TOUPIN, *The classical field theories*, in Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag (1960).
- [10] C. CATTANEO, *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità*, Rend. Acc. dei Lincei, serie VIII, **1** (1946), 66-72, 728-734. *Waves and stability*, Journal of Elasticity, **2** (1972), 91-99.
- [11] G. A. NARIBOLI - B. L. JUNEJA, *Wave propagation in an initially stressed hypo-elastic medium*, Int. Journal Non-linear Mechanics, **6** (1971), 13-25.
- [12] T. RUGGERI, *Sulla propagazione delle onde di discontinuità per continui polari con deformazioni finite*, Atti dell'Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti. **81** (1973), 155-165.
- [13] G. BOILLAT, *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars (1965).
- [14] G. BOILLAT, *Chocs caractéristiques*, C.R. Acad. Sc. Paris, **274 A** (1972), 1018-1021; *Discontinuités de contact*, C.R. Acad. Sc. Paris, **275 A** (1972), 1255-1258.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 Agosto 1974.