RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über Ringe mit Kommutatorbeziehungen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 27-48

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__27_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Über Ringe mit Kommutatorbeziehungen.

WALTER STREB (*)

S. A. Jennings [3; Theorem 1, p. 595] hat gezeigt, daß jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring ein nilpotentes Ideal R'' besitzt. Hierbei sei

$a \circ b = ab - ba$ für $a, b \in R$,

$A \circ B = (a \circ b | a \in A, b \in B)$ für $A, B \subseteq R$,

R' das von $R \circ R$ erzeugte Ideal von R und

R'' das von $R \circ (R \circ R)$ erzeugte Ideal von R.

Mit Lemma 9 dieser Note folgt unmittelbar, daß jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring schwach auflösbar ist. Hierbei sei

$$\langle A \rangle \text{ der von } A \subseteq R \text{ erzeugte Ring},$$

$$^{0}R = R \qquad \text{und} \qquad ^{i+1}R = \langle {}^{i}R \circ {}^{i}R \rangle$$

und heiße ein Ring R *schwach auflösbar*, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $^{n}R = 0$. Wir beweisen:

Jeder schwach auflösbare Ring R besitzt ein nilpotentes Ideal R''.

Dieses Ergebnis kann nicht auf Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen verallgemeinert werden. Wir zeigen:

(*) Indirizzo dell'A.: Gesamthochschule, Henri-Dunant-Str. 65, Fachbereich 6, Mathematik, D-43 Essen, Rep. Fed. Tedesca.

(A) Es gibt eine Algebra C der Charakteristik 0 und zu jeder Primzahl p mit $p \neq 2$ eine Algebra C der Charakteristik p, so daß

$$\big((a \circ b) \circ (c \circ d)\big) \circ e = 0$$

für alle a, b, c, d, $e \in C$ und C kein von null verschiedenes Ideal J besitzt, welches das von $(R \circ R) \circ (R \circ R)$ erzeugte Ideal von R annulliert. Das Ideal C'' ist demnach nicht nilpotent.

Nach [2; Theorem 5.5, p. 349] besitzt jeder auflösbare Ring R [2; p. 348] einen nilpotenten Kommutatorring ${}^1R := \langle R \circ R \rangle$. Nach [7; S. 137] gilt dies nicht für jeden schwach auflösbaren Ring. Es erhebt sich jedoch die Frage, ob jeder schwach auflösbare Ring R die schwächere Eigenschaft hat, daß sein Kommutatorring ${}^1R$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt. Wir zeigen:

(B) Es gibt eine Algebra C der Charakteristik 0 und zu jeder Primzahl p mit $p \neq 2$ eine Algebra C der Charakteristik p, so daß $C'' C = 0$ und ${}^1C$ kein von 0 verschiedenes Zentrum, also auch keinen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt.

Nach [9; Satz 4] besitzt die Einheitengruppe G jedes auflösbaren Ringes R eine stark nilpotente Kommutatorgruppe G' [4; S. 76 und S. 364]. Dieses Ergebnis kann nicht auf schwach auflösbare Ringe verallgemeinert werden:

(C) Die Algebra C in (B) kann in kanonischer Weise zu einer Algebra D mit Einselement erweitert werden, so daß $(D'')^2 = 0$ und die Kommutatorgruppe G' der Einheitengruppe G von D nicht nilpotent [4; S. 358], also auch nicht stark nilpotent ist.

Nach [11; Theorem 1, p. 9] besitzt jeder Ring R der Charakteristik 0, der die beschränkte Engelbedingung erfüllt und einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring hat, einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Nach [8; S. 391-392] besitzen jedoch Engelringe der Charakteristik 0 und Ringe von Primzahlcharakteristik mit beschränkter Engelbedingung, deren Kommutatorideale R' nilpotent sind, nicht notwendig nilpotente assoziierte Lie-Ring. Da nach [9; Satz 3] für jeden Ring R mit Einselement die Eigenschaft, eine stark nilpotente Einheitengruppe zu haben, schwächer ist, als die Eigenschaft, einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring zu besitzen, erhebt sich die Frage, ob jeder Ring mit Einselement und nilpotentem Kommutatorideal R'

notwendig eine stark nilpotente Einheitengruppe besitzt, wenn man auf die Beschränktheit der Engelbedingung oder Einschränkungen über die Charakteristik verzichtet, aber sonst keine weiteren Zusatzbedingungen stellt. Wir zeigen:

(D) Es gibt eine Engelsche Algebra C der Charakteristik 0 und zu jederPrimzahl p eine Algebra C der Charakteristik p, welche die $p+1$. Engelbedingung (d.h. $(b \circ a)_{p+1} = 0$ für alle $a, b \in C$ [8; S. 391]) erfüllt, so daß $(C')^2 = 0$ und die Einheitengruppe von C nicht nilpotent, also auch nicht stark nilpotent ist.

Nach [10; Beispiel] gibt es einen Ring R der Charakteristik 0 und zu jeder Primzahl p einen Ring R der Charakteristik p mit lokalnilpotentem Kommutatorideal R', der nicht hyperkommutativ [6; S. 400-401] ist. Da für jeden Ring R mit Einselement die Eigenschaft, eine Einheitengruppe zu haben, die eine Normalteilerfolge [4; S. 327] mit kommutativen Faktoren besitzt, schwächer ist, als die Eingenschaft, hyperkommutativ zu sein, erhebt sich die Frage, ob Einschränkungen über die Charakteristik eines Ringes mit lokalnilpotentem Kommutatorideal alleine hinreichend dafür sind, daß seine Einheitengruppe eine Normalteilerfolge mit kommutativen Faktoren besitzt. Wir zeigen:

(E) Es gibt eine Algebra C der Charakteristik 0 und zu jeder Primzahl p eine Algebra C der Charakteristik p mit Einselement und lokalnilpotentem Kommutatorideal C', deren Einheitengruppe keine Normalteilerfolge mit kommutativen Faktoren besitzt.

Eine Ringeigenschaft E heiße *potenzinvariant*, wenn für jeden Ring R gilt:

Mit einer Potenz R^i von R besitzt auch R die Eigenschaft E.

Die Ringeigenschaften, einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring zu besitzen, auflösbar bzw. schwach auflösbar zu sein, sind bekanntlich potenzinvariant. Wir zeigen zusätzlich:

Die Ringeigenschaften, einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring zu besitzen und Ring endlicher Klasse [2; p. 343] zu sein, sind potenzinvariant.

Zu den Eigenschaften E, einen auflösbaren (nilpotenten) assoziierten Lie-Ring zu besitzen, auflösbar (schwach auflösbar) zu sein, läßt sich unmittelbar je eine Folge $f_i(x)$ mehrfach linearer Formen [5; S. 568] angeben, so daß für jeden Ring R gilt:

R besitzt die Eigenschaft E genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß in R das Gesetz $f_n(x)=0$ gilt [5; S. 562]. Wir zeigen zusätzlich:

Es gibt eine Folge $g_\iota(x)$ mehrfach linearer Formen, so daß für jeden Ring R gilt:

R ist Ring endlicher Klasse genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß in R das Gesetz $g_n(x)=0$ gilt.

Bezüglich der im folgenden Beweisteil nicht eigens erklärten Bezeichnungen verweise ich auf [6; S. 399-401 und 9; Einleitung].

In den Beweisen zu den Lemmata 1 und 2 verwende ich mehrmals, daß für Ideale A_i, $0 \leqslant_i \leqslant n$ eines Ringes R stets

$$R \circ \bigl(A_n \circ (A_{n-1} \circ \ldots \circ (A_2 \circ A_1))\bigr) \subseteq |A_n \circ \bigl(A_{n-1} \circ \ldots \circ (A_2 \circ A_1)\bigr)| \,.$$

Der Beweis dieser Beziehung stützt sich auf einen Induktionsschluß unter Verwendung der Gleichung

$$r \circ (b \circ a) = (r \circ b) \circ a + b \circ (r \circ a) \,.$$

Lemma 1. Seien S und T Unterringe und A Ideal von R.

(1) Aus $T \circ T \subseteq S$ folgt $T'' \subseteq S$.

(2) Aus $A \circ A \subseteq S$ folgt $\{_3A\} \subseteq S$.

(3) Aus ${}^nR = 0$ folgt ${}^{(n)}R = 0$.

Hierbei sei ${}^{(0)}R = R$ und ${}^{(i+1)}R = \{_3({}^{(i)}R)\}$.

Beweis. (1) gilt, da

$$\bigl(c \circ (b \circ a)\bigr) d = c \circ (b \circ a) d - (b \circ a)(c \circ d) \in S \,,$$

$$d\bigl(c \circ (b \circ a)\bigr) = c \circ d(b \circ a) - (c \circ d)(b \circ a) \in S \quad \text{und} \quad c \circ (b \circ a) \in S$$

für alle $a, b, c, d \in T$.

Ad (2): Seien $a, b, c, d \in A$ und $r \in R$: Indem man in

$$(d \circ x) r = d \circ xr - x(d \circ r) \quad \text{und} \quad r(d \circ x) = d \circ rx - (d \circ r) x$$

die Substitution $c \circ (b \circ a) \to x$ vornimmt, folgt unmittelbar die Behauptung, da nach (1) $A'' \subseteq S$.

Ad (3): Anwendung von (2) auf $A := {}^{(i)}R$ und $S := {}^{i+1}R$ liefert, daß aus ${}^{(i)}R \subseteq {}^{i}R$ stets ${}^{(i+1)}R \subseteq {}^{i+1}R$ folgt. Wegen ${}^{(0)}R \subseteq {}^{0}R$ und ${}^{n}R = 0$ ist alles bewiesen.

Lemma 2. Sei A Ideal von R.

(1) Aus $\quad {}_{n}A = 0 \quad$ folgt, daß $\{R \circ (R \circ A)\}$ nilpotent ist.

(2) Aus $\quad {}^{(n)}R = 0 \quad$ folgt, daß R'' nilpotent ist.

Beweis. Ad (1): Nach [3; Theorem 1, p. 595] ist A'' nilpotent. Wegen $R \circ {}_{2}A \subseteq |{}_{2}A|$ ist $\{{}_{2}A\}$ nilpotent.

O.B.d.A. sei deshalb ${}_{2}A = 0$. Seien $a, b, c, d \in A$ und $r, s \in R$: Ausführung der Substitution $d \circ (s \circ c) \to x$ in

$$x\big(b \circ (r \circ a)\big) = b \circ (xr \circ a) + (a \circ x)(b \circ r) - (b \circ x)(r \circ a) - \big(b \circ (x \circ a)\big)\, r$$

erbringt $\big(A \circ (R \circ A)\big)^2 = 0$, also wegen $R \circ \big((A \circ (R \circ A)\big) \subseteq |A \circ (R \circ A)|$

$$\{A \circ (R \circ A)\}^2 = 0\ .$$

O.B.d.A. sei deshalb $A \circ (R \circ A) = 0$. Seien $a, b \in A$ und $r, s \in R$: Wegen

$$\big(s \circ (r \circ a)\big)\, b = sb \circ (r \circ a) - s\big(b \circ (r \circ a)\big) = 0$$

und $\{R \circ (R \circ A)\} \subseteq A$ ist $\{R \circ (R \circ A)\}^2 = 0$. Somit ist alles bewiesen.

Ad (2): Wegen ${}^{(n)}R = 0$ und ${}^{(0)}R = R$ bleibt zu zeigen:

Mit $\{R \circ (R \circ {}^{(i+1)}R\}$ ist auch $\{R \circ (R \circ {}^{(i)}R)\}$ nilpotent.

Wegen ${}_{5}({}^{(i)}R) \subseteq R \circ (R \circ {}^{(i+1)}R)$ ist $\{{}_{5}({}^{(i)}R)\}$ nilpotent, also nach (1) $\{R \circ (R \circ {}^{(i)}R)\}$ nilpotent.

Satz 1. Es ist gleichwertig:

(1) $$ {}^{n}R = 0\ .$$

(2) R'' ist nilpotent.

Beweis. Aus (1) folgt (2) unmittelbar mit Lemma 1. (3) und Lemma 2. (2). Aus (2) folgt (1) mit der Beziehung

$$ {}^{2}R \subseteq ({}^{1}R)' \subseteq R''$$

aus dem Beweis von [6; Lemma 9, S. 406].

Beispiel 1. Wir zeigen (A):

In [7; S. 137] wird über einem beliebigen kommutativen Ring R mit Einselement eine Algebra B gebildet. Die Begriffe Unbestimmte x_i, Potenzprodukte p und Dimension $d(p)$ können in kanonischer Weise von B auf die in [7] aus B konstruierte Algebra A über R übertragen werden mit der Einschränkung, daß den auf das Nullelement von A abgebildeten Potenzprodukten von B die Dimension 0 zugeordnet werde.

$U = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$ sei die Menge der Unbestimmten von A, $X = (a, b, c, \ldots)$ die Menge der Potenzprodukte von A und $D(a)$ die Dimension von $a \in X$. Entsprechend [7; S. 138] gilt

$$ba = (-1)^{D(a)D(b)} ab$$

für alle $a, b \in X$.

Unter Verwendung einer weiteren Unbestimmten u bilden wir formale Produkte ua mit $a \in X$ und fordern für $a, b \in X$ die folgenden Multiplikationsregeln:

$$(ua)(ub) = (-1)^{D(a)} ab$$

$$(ua)\, b = u(ab)$$

$$a(ub) = (-1)^{D(a)} u(ab)$$

Die so erklärte Multiplikation ist assoziativ, wie man unmittelbar nachrechnet. Etwa gilt:

$$\big((ua)(ub)\big)(uc) = (-1)^{D(a)}(ab)(uc) = (-1)^{D(a)+D(a)+D(b)} u(abc) =$$
$$= (-1)^{D(b)}(ua)(bc) = (ua)\big((ub)(uc)\big) .$$

Die formalen endlichen Summen

$$\sum_i r_i(ua_i) + \sum_i s_i b_i$$

mit $r_i, s_i \in R$ und $a_i, b_i \in X$ bilden in kanonischer Weise eine Algebra

C über R, welche A umfaßt. Wir zeigen für $a, b, c, d, e \in X$:

(1) $$(a \circ b) \circ c = 0$$

(2) $$(ua \circ b) \circ c = 0$$

(3) $$(a \circ b) \circ (uc \circ ud) = 0$$

(4) $$(ua \circ b) \circ (uc \circ ud) = 0$$

(5) $$\big((ua \circ ub) \circ (uc \circ ud)\big) \circ e = 0$$

(6) $$\big((ua \circ ub) \circ (uc \circ ud)\big) \circ ue = 0$$

(7) $$\big((ua \circ b) \circ (uc \circ d)\big) \circ e = 0$$

(8) $$\big((ua \circ b) \circ (uc \circ d)\big) \circ ue = 0$$

Beweis. Entsprechend [7; S. 138] zeigt man (1) und (2). Wegen $ua \circ ub$, $uc \circ ud \in A$ folgt (3), (4) bzw. (5) unmittelbar aus (1), (2) bzw. (1). Wegen $f := ua \circ ub \in A$, $g := uc \circ ud \in A$ und

$$(f \circ g) \circ ue = -(ue \circ f) \circ g + (ue \circ g) \circ f$$

folgt (6) aus (2).

Ad (7) und (8): Es gilt:

(9) $$ua \circ b = \big(1 - (-1)^{(1+D(a))D(b)}\big)\, uab\,,$$

(10) $$uc \circ d = \big(1 - (-1)^{(1+D(c))D(d)}\big)\, ucd\,,$$

$uab \circ ucd = nabcd$ mit einer ganzen Zahl n,

(11) $$abcd \circ e = \big(1 - (-1)^{(D(a)+D(b)+D(c)+D(d))D(e)}\big)\, abcde\,,$$

(12) $$abcd \circ ue = \big((-1)^{D(a)+D(b)+D(c)+D(d)} - (-1)^{(D(a)+D(b)+D(c)+D(d))D(e)}\big)\, uabcde$$

Ist $D(a)$ oder $D(c)$ ungerade oder $D(b)$ oder $D(d)$ gerade, so ist (9) oder (10) gleich 0. Ist dagegen $D(a)$ und $D(c)$ gerade und $D(b)$ und $D(d)$ ungerade, so ist (11) und (12) gleich 0. Hiermit ist (7) und (8) bewiesen.

Insgesamt folgt wegen der Linearität der Kommutatoren, daß

$$\big((C \circ C) \circ (C \circ C)\big) \circ C = 0\,,$$

Sei nun R ein Ring der Charakteristik 0 oder von Primzahlcharakteristik $p \neq 2$. Wir zeigen:

Es gibt kein Ideal von C, welches $Z := \{(C \circ C) \circ (C \circ C)\}$ annulliert.

Beweis. Da

$$8u_i u_j u_k u_l u_m u_n = (-2) u_i u_j u_k \circ (-2) u_l u_m u_n = (uu_i \circ uu_j u_k) \circ \circ (uu_l \circ uu_m u_n) \in Z$$

für alle natürlichen Zahlen i, j, k, l, m und n, sieht man entsprechend [7; S. 139] ein, daß C kein von null verschiedenes Element besitzt, welches Z annulliert.

Die Schärfe von Beispiel 1 beleuchtet

Lemma 3. Gibt es natürliche Zahlen i, j und k, so daß

$$({}_jR \circ {}_iR)^k = 0 \; ,$$

so ist R'' nilpotent.

Beweis. Wegen $R \circ ({}_jR \circ {}_iR) \subseteq |{}_jR \circ {}_iR|$ gilt $\{{}_jR \circ {}_iR\}^k = 0$.

O.B.d.A. sei deshalb ${}_jR \circ {}_iR = 0$ und weiter $1 \leqslant j < i$. Wir zeigen, daß $\{{}_{j-1}R \circ {}_iR\}$ nilpotent ist:

Für $a, c \in {}_{j-1}R$ und $b, d \in {}_iR$ gilt

$$(a \circ b)(c \circ d) = (a \circ bc) \circ d - (b \circ d)(a \circ c) - \big((a \circ b) \circ d\big)\, c - b\big((a \circ c) \circ d\big) = 0 \; ,$$

also $({}_{j-1}R \circ {}_iR)^2 = 0$ und wegen $R \circ ({}_{j-1}R \circ {}_iR) \subseteq |{}_{j-1}R \circ {}_iR|$ auch

$$\{{}_{j-1}R \circ {}_iR\}^2 = 0 \; .$$

O.B.d.A. sei deshalb ${}_{j-1}R \circ {}_iR = 0$, also bei Weiterführung dieses Verfahrens schließlich ${}_{i+1}R = {}_CR \circ {}_iR = 0$. Nach [3; Theorem 1, p. 595] ist R'' nilpotent.

Beispiel 2. Wir zeigen (B):

Mit der Algebra A über einem beliebigen kommutativen Ring R mit Einselement aus [7; S. 137] bilden wir die Algebra C der Matrizen

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in A$, setzen allgemein voraus, daß $\boldsymbol{R}$ Ring der Charakteristik 0 oder von Primzahlcharakteristik $p \neq 2$ ist und verweisen auf die Betrachtungen zu Beginn von Beispiel 1.

Aus $A'' = 0$ folgt unmittelbar $C'' C = 0$.

Sei nun $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in A$ Element des Zentrums von ${}^1C$. Wegen

$$\begin{pmatrix} u_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_i u_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in {}^1C \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & u_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_i u_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in {}^1C$$

gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2u_i u_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2u_i u_j b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit geeignetem $c \in A$ und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & u_i u_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a u_i u_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle natürlichen Zahlen i und j. Also folgt entsprechend [7; S. 139] $a = b = 0$. Demnach besitzt ${}^1C$ kein von 0 verschiedenes Zentrum.

Lemma 4. Sei C eine Algebra ohne Einselement über einem kommutativen Ring R mit Einselement 1, die durch Bildung der formalen Summen $k + c$ mit $k \in 1_R := \langle 1 \rangle \subseteq R$ und $c \in C$ in kanonischer Weise zu einer Algebra $1_R + C$ mit Einselement erweitert werden kann. Wir zeigen:

(1) Ist C nil, so ist $1 + C$ Gruppe.

(2) Ist C lokal nilpotent und besitzt R die Primzahlcharakteristik p, so ist $1 + C$ lokalendliche p-Gruppe.

Beweis.

Ad (1): Die multiplikativ abgeschlossene Menge $1 + C$ ist Gruppe, da es zu $1 - c$ mit $c \in C$ stets eine natürliche Zahl n gibt, so daß $c^n = 0$, also $(1 - c)\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} c^i\right) = 1$.

Ad (2): $1+C$ ist p-Gruppe, da $(1+c)^{p^n}=1+c^{p^n}$ für alle $c\in C$ und natürlichen Zahlen n gilt und C nil ist. Da C lokalnilpotent ist und Primzahlcharakteristik p besitzt, ist C lokalendlich. Also ist $1+\langle M\rangle$ endliche Gruppe für jede endliche Teilmenge M von C, wobei die Gruppeneigenschaft wie bei (1) nachgewiesen wird. Hiermit folgt unmittelbar (2).

Beispiel 3. Wir zeigen (C):

Mit der Algebra C über R aus Beispiel 2 bilden wir nach Lemma 4 die Algebra $D:=1_R+C$ und setzen wiederum voraus, daß R ein Ring der Charakteristik 0 oder von Primzahlcharakteristik $p\neq 2$ ist. Aus $C''C=0$ folgt unmittelbar $(D'')^2=0$. Da mit der Algebra A aus [7; S. 137] auch die Algebra C aus Beispiel 2 nil ist, ist $1+C$ nach Lemma 4 Untergruppe der Einheitengruppe von D.

Es reicht deshalb zu zeigen:

Die Kommutatorgruppe $(1+C)'$ von $1+C$ besitzt kein von 1 verschiedenes Zentrum.

Beweis. Bei allen folgenden gruppentheoretischen Betrachtungen halte ich mich konsequent an die in [9; Einleitung] festgelegten Bezeichnungen.

Sei $1+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ Element des Zentrums von $(1+C)'$. Wegen

$$\left(1+\begin{pmatrix} u_k & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}=1-\begin{pmatrix} u_k & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(1+\begin{pmatrix} 0 & u_k \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}=1-\begin{pmatrix} 0 & u_k \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist

$$\left(1+\begin{pmatrix} u_i & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(1+\begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=1+\begin{pmatrix} 2u_iu_j & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in(1+C)'$$

und

$$\left(1+\begin{pmatrix} u_i & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(1+\begin{pmatrix} 0 & u_j \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=1+\begin{pmatrix} 0 & u_iu_j \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in(1+C)',$$

also

$$\left(1+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\circ\left(1+\begin{pmatrix} 2u_iu_j & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} c & -2u_iu_jb \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

mit geeignetem $c \in A$ und

$$\left(1+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \circ \left(1+\begin{pmatrix} 0 & u_i u_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a u_i u_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle natürlichen Zahlen i und j, also entsprechend [7; S. 139] $a = b = 0$.

BEMERKUNG 1. Zu jeder Primzahl $p \neq 2$ gibt es eine lokalendliche p-Gruppe G, die

$$(a) \qquad G'' \bullet G'' = 1$$

erfüllt, ohne eine nilpotente Kommutatorgruppe G' zu besitzen.

BEWEIS. Wir wählen für G die Gruppe $1 + C$ aus Beispiel 3. Anwendung von [9; Lemma 2. (3)] auf den G-Ring $1_R + C$ erbringt

$$G'' \subseteq \big((G'')_G\big)^G \subseteq \big((1_R + C)''\big)^G .$$

Wegen $\big((1_R + C)''\big)^2 = 0$ gilt für $g, h \in G''$

$$h \bullet g = 1 + h^{-1}g^{-1}\big((h-1)\circ(g-1)\big) = 1 .$$

Also ist (a) erfüllt. Sei nun R Ring von Primzahlcharakteristik $p \neq 2$. Nach Beispiel 3 ist G' nicht nilpotent. Nach Lemma 4. (2) ist G lokalendliche p-Gruppe, da die Algebra C über R lokalnilpotent ist.

BEISPIEL 4. Wir zeigen (D): Wir bilden über der in [8; S. 394] angegebenen kommutativen Algebra R über dem Körper K entsprechend [8; S. 392] die Algebra A über K und nach Lemma 4 die Algebra $C := 1_K + A$. Mit A erfüllt auch C die geforderten Bedingungen. Da A nil ist, ist nach Lemma 4. (1) die Menge $1 + A$ Untergruppe der Einheitengruppe von C. Deshalb reicht es zu zeigen, daß $1 + A$ kein von 1 verschiedenes Zentrum besitzt. Dies folgt unmittelbar daraus, daß A kein von 0 verschiedenes Zentrum besitzt.

BEISPIEL 5. Wir zeigen (E):

In [10] wird eine Algebra B über K angegeben. Nach Lemma 4 bilden wir die Algebra $C := (1_K + B)/|P|$ mit Einselement 1, welche die Algebra $A = B/|P|$ umfaßt. Da A lokalnilpotent ist, ist auch $C' \subseteq A$ lokalnilpotent und $(1 + B)/|P|$ nach Lemma 4. (1) Untergruppe der Einheitengruppe von C. Es reicht deshalb nachzuweisen, daß $(1+B)/|P|$ keinen von 1 verschiedenen kommutativen Normalteiler besitzt. Hierzu reicht es zu zeigen:

Zu jedem Element $1+c$ mit $c \in B$ und $c \not\equiv 0$ gibt es Elemente $1+d$ und $1+e$ mit $d, e \in B$, so daß

$$(a) \qquad (1+e)(1+d) \equiv 1 \, ,$$

$$(b) \qquad (1+e)(1+c)(1+d) \circ (1+c) \not\equiv 0 \, .$$

Hierbei verstehen sich alle Kongruenzen modulo $|P|$.

BEWEIS. Sei $c = \sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ mit von null verschiedenen $k_\iota \in K$, paarweise verschiedenen $q_\iota \in Q$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $c \not\equiv 0$. Dann gibt es einen Index z mit $1 \leqslant z \leqslant m$, so daß $q_z \notin P$. Sei weiter $n \geqslant \dim(q_z)$ und komme $2n+3$ nicht als Index einer c aufbauenden Unbestimmten vor. Wir setzen:

$$d := - x_{2n+3} \qquad \text{und} \qquad e := \sum_{i=1}^{2n+2} (x_{2n+3})^i \, .$$

Wegen $(x_{2n+3})^{2n+3} \equiv 0$ gilt (a). Man substituiert nun in (b)

$$\sum_{i=1}^{m} k_\iota q_\iota \to c \, , \qquad - x_{2n+3} \to d \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{2n+2} (x_{2n+3})^i \to e \, ,$$

rechnet (b) sodann nac den Distributivgesetzen aus und faßt gleiche Summanden zusammen. Zum Nachweis von (b) reicht es zu zeigen daß Zusammenfassung gleicher Summanden, etwa $-(k_z)^2 q_z (x_{2n+3})^2 q_z$, nicht kongruent 0 ist. Hierzu schließt man entsprechend dem letzten Abschnitt des Beweises des vorbemerkten Beispieles aus [10].

BEMERKUNG 2. Es gibt eine lokalendliche p-Gruppe G die keinen von 1 verschiedenen kommutativen Normalteiler besitzt.

BEWEIS. Wir wählen für G die Gruppe $(1+B)/|P|$ aus Beispiel 5 und setzen voraus, daß K Primkörper der Charakteristik p ist. Nach Lemma 4 ist G lokalendliche p-Gruppe, da $B/|P|$ lokalnilpotent ist. In Beispiel 5 wird der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Zwei Definitionen bereiten die folgenden Betrachtungen vor:

Für Teilmengen A und B eines Ringes R sei

$$_1(B \circ A) = B \circ A \qquad \text{und} \qquad _{\iota+1}(B \circ A) = B \circ {}_i(B \circ A) \, .$$

Weiterhin heiße A eine R^n-Menge, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so daß ${}_k(R^n \circ A) = 0$.

Lemma 5. Sei R ein Ring, $A \subseteq R''$ und $(R'')^2 = 0$. Mit A ist auch $\{A\}$ eine R^n-Menge.

Beweis. Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß ${}_k(R^n \circ A) = 0$. Wir zeigen, daß ${}_{k+2}(R^n \circ \{A\}) = 0$. Sei

$$(a) \qquad B := \big(ra,\ as,\ ras \,|\, a \in A,\ r,\ s \in R\big)\ .$$

Wegen der Linearität der Kommutatoren und ${}_{k+2}(R^n \circ A) = 0$ reicht es zu zeigen, daß

$$(b) \qquad r_{k+2} \circ \Big(\ldots \circ \big(r_2 \circ (r_1 \circ b)\big)\Big) = 0$$

für alle $r_\iota \in R^n$ und $b \in B$. Im Sinne von (a) ist b Produkt von zwei bzw. drei Faktoren, also $b = yx$ bzw. $b = zyx$. Wir wenden zunächst auf $b = yx$ bzw. $b = zyx$ und $u = r_1$ die Umformung

$$(c) \qquad u \circ yx = (u \circ y)\, x + y(u \circ x)$$

bzw.

$$(d) \qquad u \circ zyx = (u \circ z)\, yx + z(u \circ y)\, x + zy(u \circ x)$$

an und zerlegen anschließend den hierbei aus (b) entstandenen Ausdruck unter Ausnützung der Linearität der Kommutatoren in Summanden der Gestalt $r_{k+2} \circ \big(\ldots \circ (r_2 \circ c)\big)$. c ist jeweils Produkt aus zwei bzw. drei Faktoren, auf die man wiederum mit $u = r_2$ die Umformung (c) bzw. (d) anwenden und anschließend in Summanden zerlegen kann. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert schließlich eine Darstellung von (b) als Summe von Produkten mit zwei bzw. drei Faktoren. Wegen $A \subseteq R''$, $(R'')^2 = 0$ und ${}_k(R^n \circ A) = 0$ ist in jedem Produkt wenigstens einer der Faktoren gleich 0. Also gilt (b).

Lemma 6. Für jede Teilmenge A von R gilt:

$$ {}_4(R^{n-1} \circ A) \subseteq \{R^n \circ A\}\ .$$

Beweis, Da

$$(r \circ a)\, u = ru \circ a - r(u \circ a) \qquad \text{und} \qquad u(r \circ a) = ur \circ a - (u \circ a)\, r$$

für alle $r \in R$, $u \in R^n$ und $a \in A$ gilt, ist

$$B := \{(R \circ A) R^n\} + \{R^n (R \circ A)\} \subseteq \{R^n \circ A\} .$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß ${}_4(R^{n-1} \circ A) \subseteq B$.

LEMMA 7. Sei R ein Ring, $(R'')^2 = 0$ und $A \subseteq R \circ R$. Mit $R^n \circ A$ ist auch A eine R^{n-1}-Menge.

BEWEIS. Wegen $R^n \circ A \subseteq R''$ ist nach Lemma 5 das Ideal $\{R^n \circ A\}$ eine R^{n-1}-Menge. Nach Lemma 6 ist A eine R^{n-1}-Menge.

LEMMA 8. Ist R'' nilpotent, so besitzt mit R^n auch R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

BEWEIS. Nach [9: Lemma 5] reicht es zu zeigen, daß $R/(R'')^2$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt. O.B.d.A. sei deshalb $(R'')^2 = 0$.

Durch vollständige Induktion ist alles bewiesen, wenn wir für alle $n \geqslant 2$ zeigen:

Mit R^n besitzt auch R^{n-1} einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

Wegen $R^{n-1} \circ R^{n-1} \subseteq R^n$ ist $R^{n-1} \circ R^{n-1}$ eine R^n-Menge, also ${}_k\big(R^n \circ (R^{n-1} \circ R^{n-1})\big) = 0$ mit einer geeignet gewählten natürlichen Zahl k. Wendet man Lemma 7 der Reihe nach auf $A := {}_i\big(R^n \circ (R^{n-1} \circ R^{n-1})\big)$ für $i = k, k-1, \ldots, 1$ an, so erhält man, daß $R^{n-1} \circ R^{n-1}$ eine R^{n-1}-Menge ist. Also besitzt R^{n-1} einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

LEMMA 9. Besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring, so gibt es eine Folge R_i, $0 \leqslant i \leqslant m$ von Unterringen von R, so daß $R_0 = R$, $R_m = 0$, $R_{i+1} \subseteq R_i$ und

$$\langle r, b\rangle' \subseteq R_{i+1} \text{ für alle } b \in R_i \text{ und } r \in R$$

für $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

BEWEIS. Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß ${}_nR = 0$. Wendet man [9; Lemma 1. (1). (b)] auf $M := {}_{i-1}R$, $A := \{{}_{i+1}R\}$ und $B := \{{}_iR\}$ an, so erhält man

$$(a) \qquad R \circ \big(R \circ (\{{}_iR\})\big) \subseteq \{{}_{i+1}R\}$$

für $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Für die Ringe

$$S_i := \big(a \mid a \in \{{}_iR\},\ s \circ a \in \{{}_{i+1}R\} \text{ für alle } s \in R\big)$$

folgt unmittelbar

$$R \circ \{{}_iR\} \subseteq S_i \quad \text{und} \quad R \circ S_i \subseteq \{{}_{i+1}R\}$$

für $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Es bleibt zu zeigen:

(1) $\quad \langle r, b\rangle' \subseteq S_i \quad$ für alle $b \in \{{}_iR\}$ und $r \in R$

und

(2) $\quad \langle r, b\rangle' \subseteq \{{}_{i+1}R\}$ für alle $b \in S_i$ und $r \in R$.

Ad (1): Mehrmalige Anwendung der Umformung

$$(b) \qquad z \circ yx = -(yx \circ z) = (z \circ y)x + y(z \circ x)$$

erbringt, daß $\langle r, b\rangle'$ gleich dem von $r \circ b$ erzeugten Ideal von $\langle r, b\rangle$ ist. Wegen $r \circ b \in S_i$ reicht es deshalb zu zeigen, daß

$$(c) \qquad u(r \circ b)\,, \quad (r \circ b)v\,, \quad u(r \circ b)v \in S_i\,,$$

wobei u, v beliebige Elemente der Menge P aller Produkte sind, welche nur die Faktoren r und b besitzen. Nach Definition von S_i ist demnach zu beweisen, daß

$$(d) \qquad \begin{aligned} s \circ u(r \circ b) &= u\big(s \circ (r \circ b)\big) + (s \circ u)(r \circ b) \in \{{}_{i+1}R\}\,, \\ s \circ (r \circ b)v &= \big(s \circ (r \circ b)\big)v + (r \circ b)(s \circ v) \in \{{}_{i+1}R\} \qquad \text{und} \\ s \circ u(r \circ b)v &= u\big(s \circ (r \circ b)\big)v + (s \circ u)(r \circ b)v + \\ &\qquad + u(r \circ b)(s \circ v) \in \{{}_{i+1}R\} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in P$ und $s \in R$. Da wegen (a) in (d) jeweils der erste Summand auf der rechten Seite Element von $\{{}_{i+1}R\}$ ist, bleibt zu zeigen, daß

$$(e) \qquad (s \circ u)(r \circ b)\,, \quad (r \circ b)(s \circ u) \in \{{}_{i+1}R\}$$

für alle $u \in P$ und $s \in R$. Da die Differenz der Ausdrücke bei (e) nach (a) Element von $\{_{i+1}R\}$ ist, kann der Nachweis auf den ersten Ausdruck beschränkt werden. Mehrmalige Anwendung der Umformung (b) auf die Darstellung von u als Produkt von Faktoren b und r erbringt eine Darstellung von $(s \circ u)(r \circ b)$ als Summe mit Summanden der Gestalt

$$(f) \qquad t_3(s \circ r)\, t_2(r \circ b)\, t_1 \quad \text{und} \quad t_3(s \circ b)\, t_2(r \circ b)\, t_1$$

mit $t_i \in R \cup (1)$, wobei 1 ein formales Einselement bezüglich R sei. Nach Anwendung von [9; Lemma 1.(1).(c) und (d)] auf $B := \{_iR\}$ und $A := \{_{i+1}R\}$ bleibt noch

$$(s \circ r)(r \circ b) = s \circ (r \circ rb) - r(s \circ (r \circ b)) \in \{_{i+1}R\}$$

und

$$(s \circ b)(r \circ b) = s \circ (br \circ b) - b(s \circ (r \circ b)) \in \{_{i+1}R\}$$

zu zeigen. Somit ist alles bewiesen.

(2) ergibt sich bei sinngemäßer Anwendung der Beweisteile (b) und (c).

Lemma 10 beleuchtet die Schärfe von Lemma 9, da nach [7; S. 137] nicht jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring ein nilpotentes Kommutatorideal R' besitzt.

Lemma 10. Gibt es eine Folge R_i, $0 \leqslant i \leqslant m$ von Unterringen von R, so daß $R_0 = R$, $R_m = 0$, $R_{i+1} \subseteq R_i$ und

$$\langle a, b, c \rangle' \subseteq R_{i+1}$$

für alle $a, b, c \in R_i$ für $0 \leqslant i \leqslant m-1$, so ist R' nilpotent.

Beweis. Da für $a, b, c \in R_i$ stets $b \circ a$, $(b \circ a)c$, $c(b \circ a) \in R_{i+1}$, gilt $(R_i)' \subseteq R_{i+1}$ für $0 \leqslant i \leqslant m-1$. Also ist R auflösbar und nach [2; Theorem 5.6, p. 350] R' nilpotent.

Satz 2. Die Ringeigenschaft E, einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring zu besitzen, ist potenzinvariant.

Beweis. Sei R^n ein E-Ring. Nach Lemma 9 ist R^n schwach auflösbar, also R schwach auflösbar, also nach Satz 1 das Ideal R'' nilpotent. Nach Lemma 8 ist R ein E-Ring.

Satz 3. Die Ringeigenschaft E, ein Ring endlicher Klasse zu sein, ist potenzinvariant.

Beweis. Sei R^n ein E-Ring. R^n ist dann auflösbar und besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Nach Satz 2 besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Weiter ist R auflösbar. Nach [2; Theorem 6.5., p. 353] ist R ein E-Ring.

Lemma 11. Ist R schwach hyperzentral, so gibt es zu jedem Unterring S von R mit $R \circ S \subseteq S$ und $S \subset R''$ einen Unterring T von R, so daß $S \subset T \subseteq R''$, $R \circ T \subseteq S$ und S Ideal von T ist.

Beweis. Sei A maximales Element der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } R,\ J \subseteq S) .$$

Aus Symmetriegründen gibt es nach [6; Satz 2, S. 403] ein Ideal B von R, so daß $A \subset B \subseteq R''$ und $BR'' + R''B \subseteq A$. Wir setzen

$$T := (\circ(S \cup CB) \cap B) + S .$$

Wegen $T \subseteq B + S$ ist

$$ST + TS \subseteq T^2 \subseteq (B + S)^2 \subseteq B^2 + BS + SB + S^2 \subseteq BR'' + R''B + S^2 \subseteq$$
$$\subseteq A + S \subseteq S \subseteq T ,$$

also der Modul T ein Ring und S Ideal von T. Da B Ideal von R ist, gilt $R \circ T \subseteq S$. Aus $B \not\subseteq S$ folgt $S \subset T$.

Lemma 12. Sei $R'' = 0$ und $r, s \in R$. $M := (s \circ r)(R \circ R)$ ist Ideal von $S := \{s \circ r\}$ und es gilt $R \circ M = 0$ und $R \circ S \subseteq M$.

Beweis. Wegen $R \circ (R \circ R) = 0$ und

$$(s \circ r)^2 = s \circ (rs \circ r) - r(s \circ (s \circ r)) = 0$$

ist $MS = SM = 0$, also M Ideal von S.

Weiter gilt

$$R \circ M = R \circ (s \circ r)(R \circ R) \subseteq (R \circ (s \circ r))(R \circ R) + (s \circ r)(R \circ (R \circ R)) = 0 .$$

$R \circ S \subseteq M$ ergibt sich wegen $\{s \circ r\} = (s \circ r)R$ und

$$R \circ (s \circ r)R \subseteq (R \circ (s \circ r))R + (s \circ r)(R \circ R) = M .$$

SATZ 4. Ist R schwach hyperzentral, so gibt es eine (aufsteigend) wohlgeordnete Indexmenge I und eine Folge R_i, $i \in I$ von Unterringen von R, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $R_0 = 0$ und $R_k = R$ für $k \in I$.

(b) R_i ist Ideal von R_{i+1}, $R_i \subset R_{i+1}$ und $R \circ R_i \subseteq R_{i+1}$ für alle $i < k$.

(c) $R_j = \bigcup_{i<j} R_i$ für jeden Limesindex $j \leqslant k$.

BEWEIS. Nach Lemma 11 kann man R'', also nach Lemma 12 auch R', also R ausschöpfen.

Die folgenden Betrachtungen ergänzen gleichzeitig die Überlegungen von I. N. Herstein [1], wobei sich naturgemäß in den einfachsten formalen Dingen gewisse Berührungspunkte ergeben. Wir definieren für Ringe R verallgemeinerte Kommutatoren:

$$[a, b, c] := abc - cba \qquad \text{für } a, b, c \in R \text{ und}$$

$$[A, B, C] := \big([a, b, c] \,|\, a \in A,\, b \in B,\, c \in C\big) \qquad \text{für } A, B, C \subseteq R.$$

Für Ideale A von R heiße

A symmetrisches Ideal in R, wenn	$[A, A, A] = 0$,
A R-symmetrisches Ideal in R, wenn	$[R, A, R] = 0$,
A R-asymmetrisches Ideal in R, wenn	$[R, R, A] = 0$.

R heiße poly-E-Ring, wenn es eine Folge A_i, $0 \leqslant i \leqslant n$ von Idealen gibt, so daß $A_0 = R$, $A_n = 0$, $A_{i+1} \subseteq A_i$ und A_i / A_{i+1} E-Ideal von R/A_{i+1} ist für $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Hierbei bedeute E eine beliebige Idealeigenschaft.

LEMMA 13. Für Ideale A, B und C von R gilt:

(1) $\quad [A, B, C]$ ist Ideal von R.

(2) $\quad \{A \circ A\} BA \subseteq [A, B, A]$.

(3) $\quad \{A \circ A\} \circ \{A \circ A\} \subseteq [A, A, A]$.

(4) $\quad [A, B, A] \subseteq \{A \circ B\} \cap AB \cap BA$.

(5) $$[A, A, A] \subseteq \{A \circ A\}.$$

(6) $$A\{A \circ B\} A \subseteq [A, B, A].$$

(7) $$\{A^2 \circ B\} \subseteq [A, A, B] + \{A \circ A\} B.$$

(8) $$[A, A, B] \subseteq \{A^2 \circ B\} + \{A \circ A\} B.$$

Beweis. Seien $r \in R$, $a, a_i \in A$, $b \in B$ und $c \in C$:

Ad (1): Mit

$$r[a, b, c] = [ra, b, c] - [a, br, c] + [a, b, rc] \in [A, B, C]$$

gilt aus Symmetriegründen auch $[a, b, c] r \in [A, B, C]$, also (1).

Ad (2): Mit (1) folgt (2) wegen

$$(a_1 \circ a_2) b a_3 = [a_1, a_2 b, a_3] - a_3[a_1, b, a_2] + [a_3, a_1 b, a_2] \in [A, B, A].$$

Ad (3): (3) folgt unmittelbar durch Anwendung von (2) auf $B := A$.

Ad (4): Es gilt $[a_1, b, a_2] \in AB \cap BA$ und

$$[a_1, b, a_2] = a_1 \circ b a_2 - (a_2 \circ b) a_1 \in \{A \circ B\}.$$

Ad (5): Man wendet (4) auf $B := A$ an.

Ad (6): Mit (1) und (2) folgt (6) wegen

$$a_1(a_2 \circ b) a_3 = (a_1 \circ a_2) b a_3 + a_2[a_1, b, a_3] + [a_2 a_3, b, a_1] \in [A, B, A].$$

Ad (7) und (8): Mit (1) ergibt sich (7) und (8) aus

$$a_1 a_2 \circ b - [a_2, a_1, b] = (a_1 \circ a_2) b.$$

Unmittelbar aus Lemma 13.(3) und (5) folgt

Satz 5. Ein Ring R ist polysymmetrisch genau dann, wenn R polykommutativ (auflösbar) ist.

Anwendung von Lemma 13.(4) und (6) auf $A := R$ erbringt unmittelbar

Satz 6. R ist genau dann poly-R-symmetrisch, wenn R poly-F ist. Hierbei heiße ein Ideal A eines Ringes S F-Ideal von S, wenn

$$S \circ A = 0 \quad \text{oder} \quad SA = 0 \quad \text{oder} \quad AS = 0\,.$$

Lemma 14. Für Ideale A und B von R gilt:

(1) ${}_n(A^2 \circ B) \subseteq [A, A, B] + \{A \circ A\}^n B$.

(2) ${}_n[A, A, B] \subseteq \{A^2 \circ B\} + \{A \circ A\}^n B$.

Hierbei sei für Teilmengen M und N von R in Abänderung einer früheren Festetzung

$${}_1(M \circ N) = \{M \circ N\} \quad \text{und} \quad {}_{i+1}(M \circ N) = \{M \circ {}_i(M \circ N)\} \quad \text{und}$$

$${}_1[M, M, N] = [M, M, N] \quad \text{und} \quad {}_{i+1}[M, M, N] = [M, M, {}_i[M, M, N]]\,.$$

Beweis.

Ad (1): Nach Lemma 13.(7) gilt (1) für $n = 1$. Anwendung von Lemma 13.(7) auf $B := \{A \circ A\}^i B$ liefert

$$(a) \qquad \{A^2 \circ \{A \circ A\}^i B\} = [A, A, \{A \circ A\}^i B] + \{A \circ A\}^{i+1} B \subseteq \subseteq [A, A, B] + \{A \circ A\}^{i+1} B\,.$$

Aus der Gültigkeit von (1) für $n = i$ folgt mit (a) die Gültigkeit von (1) für $n = i + 1$:

$${}_{i+1}(A^2 \circ B) = \{A^2 \circ {}_i(A^2 \circ B)\} \subseteq \{A^2 \circ [A, A, B]\} + \{A^2 \circ \{A \circ A\}^i B\} \subseteq \subseteq [A, A, B] + \{A \circ A\}^{i+1} B\,.$$

Ad (2): Nach Lemma 13.(8) gilt (2) für $n = 1$. Anwendung von Lemma 13.(8) auf $B := \{A \circ A\}^i B$ erbringt

$$(b) \qquad [A, A, \{A \circ A\}^i B] = \{A^2 \circ \{A \circ A\}^i B\} + \{A \circ A\}^{i+1} B \subseteq \{A^2 \circ B\} + + \{A \circ A\}^{i+1} B\,.$$

Aus der Gültigkeit von (2) für $n = i$ folgt mit (b) die Gültigkeit von (2) für $n = i + 1$:

$$
\begin{aligned}
{}_{i+1}[A, A, B] = [A, A, {}_i[A, A, B]] \subseteq [A, A, \{A^2 \circ B\}] + \\
+ [A, A, \{A \circ A\}^i B] \subseteq \{A^2 \circ B\} + \{A \circ A\}^{i+1} B\,.
\end{aligned}
$$

Satz 7. Für Ringe R ist gleichwertig:

(1) R ist poly-R-asymmetrisch.

(2) R ist polyzentral (von endlicher Klasse).

Beweis.

Aus (1) folgt (2): Jeder poly-R-asymmetrische Ring R ist polysymmetrisch, also nach Satz 5 auflösbar. Demnach gibt es nach [2; Theorem 5.6, S. 350] eine natürliche Zahl n, so daß $(R')^n = 0$. Anwendung von Lemma 14.(1) auf $A := R$ erbringt weiter

$$
{}_n(R^2 \circ B) \subseteq [R, R, B]
$$

für jedes Ideal B von R. Somit besitzt R^2 einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Nach Satz 2 hat R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Wegen [2; Theorem 6.5, S. 353] ist R von endlicher Klasse.

Aus (2) folgt (1): Nach [2; Theorem 5.6, S. 350] gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $(R')^n = 0$. Anwendung von Lemma 14.(2) auf $A := R$ erbringt

$$
{}_n[R, R, B] \subseteq \{R^2 \circ B\} \subseteq \{R \circ B\}\,.
$$

für jedes Ideal B von R. Also ist R poly-R-asymmetrisch.

Es erhebt sich die Frage, ob auch jeder poly-R-symmetrische Ring von endlicher Klasse ist. Wir vermerken:

Beispiel 6. Die in [8; S. 391-395] angegebenen Algebren erfüllen die Bedingung

$$
[R, [R, R, R], R] = 0\,,
$$

besitzen jedoch keine von null verschiedenen Zentren, wie man unmittelbar nachrechnet.

Auf Grund von Lemma 13.(1) und der Linearität der verallgemeinerten Kommutatoren $[z, y, x]$ ist ein Ring R poly-R-asymmetrisch, d.h. nach Satz 7 von endlicher Klasse, genau dann, wenn in R ein Gesetz $g_i(x) = 0$ gilt. Hierbei sei

$$g_1 := [x_3, x_2, x_1] \quad \text{und} \quad g_{i+1} := [x_{2i+3}, x_{2i+2}, g_i] \, .$$

LITERATUR

[1] I. N. Herstein, *Generalized commutators in rings*, Portugaliae Mathematica, vol. 13, pp. 137-139.

[2] S. A. Jennings, *Central chains of ideals in an associative ring*, Duke Mathematical Journal, vol. 9, pp. 341-355.

[3] S. A. Jennings, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53, pp. 593-597.

[4] W. Specht, *Gruppentheorie*, Springer-Verlag, 1956.

[5] W. Specht, *Gesetze in Ringen I*, Mathematische Zeitschrift, Band 52, Heft 5, S. 557-589.

[6] W. Streb, *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XLIV, S. 399-409.

[7] W. Streb, *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XLVI, S. 137-139.

[8] W. Streb, *Über nile Algebren mit nilpotenten Kommutatoridealen die keine von null verschiedenen Zentren besitzen*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XLVI, S. 391-395.

[9] W. Streb, *Über Ringe die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XLVII, S. 313-329.

[10] W. Streb, *Über die Endlichkeit niler Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XLVIII, S. 349-357.

[11] P. J. Higgins, *Lie rings satisfying the Engel condition*, Proceedings of the Cambridge philosophical society, vol. 50, pp. 8-15.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 marzo 1973.