Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuliano Bratti

Una proprietà degli operatori differenziali lineari che sono sub-ellittici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 275-280

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__275_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Una proprietà degli operatori differenziali lineari che sono sub-ellittici.

GIULIANO BRATTI (*)

§ 1. Questo articolo ha lo scopo di approfondire l'analisi del comportamento degli operatori differenziali alle derivate parziali sopra il « wave front set » delle distribuzioni. Si otterrà la dimostrazione della seguente proposizione:

A) sia $P = P(x, D) = \Sigma_{|\alpha| \leq m} a^{\alpha}(x) D^{\alpha}$ *un operatore differenziale su* Ω, *un aperto di* $\mathbb{R}^n$, *con coefficienti di classe* C^{∞}. *Se* P *è sub-ellittico su* Ω, $mr(Pu) \equiv mr(u)$, $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (1).

Ecco la terminologia ed il simbolismo:

sia S_{n-1} la superficie sferica di $\mathbb{R}_n$, di centro l'origine e raggio unitario; se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^n$ e u è una distribuzione su Ω, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, indicando con x la variabile in $\mathbb{R}^n$ e ξ la variabile in $\mathbb{R}_n$, $WF(u)$ è quel sottoinsieme di $\Omega \times S_{n-1}$ così definito: $(x_0, \xi^0) \notin WF(u)$ se esiste una $\varphi(x) \in C_c^{\infty}(\Omega)$ con $\varphi(x_0) \neq 0$ e tale che la trasformata di Fourier della distribuzione $\varphi(x)u$ sia rapidamente decrescente in un intorno conico del semiraggio per l'origine e direzione ξ^0. Si pone: $mr(u) = WF(u) \cap \cap R_{\infty}(u)$, dove: $R_{\infty}(u = \bigcap_s R_s(u)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, e $R_s(u) = \bigcup \{\mathcal{O} \subseteq \Omega \times S_{n-1}$,

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni 3, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(1) Nella scrittura di $P = P(x, D)$, α denota un multi-indice: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, con le α_i intere non negative; $|\alpha| = \sum_{1}^{n}{}_i \alpha_i$, $D^{\alpha} = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} - D^{\alpha_n}$ dove $D^{\alpha_k} = ((1/i)(\partial/\partial x_k))^{\alpha_k}$ e $i^2 = -1$.

$\mathcal{O}$ aperto e tale che $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)\}$ (²). Per più ampi dettagli su $WF(u)$, (che si dice il « wave front set » della distribuzione u), e per l'$mr(u)$ si vedano, rispettivamente [4] e [1].

Un operatore differenziale su Ω, $P = P(x, D)$, si dice *sub-ellittico* in $x_0 \in \Omega$ se esiste un intorno V di x_0 tale che: $\forall \varphi(x) \in C^\infty_c(V)$, $\|\varphi\|_{m-1+\delta} \subseteq \subseteq C\|P\varphi\|_0$, dove: $0 < \delta \leqslant 1$; $C > 0$; m è l'ordine di P e $\|\cdot\|_s$ indica la norma nello spazio hilbertiano, (di Sobolev), $H^s(\mathbb{R}^n)$ (³). Un operatore P si dice sub-ellittico su Ω se è sub-ellittico in ogni punto di Ω.

§ 2. Il risultato qui ottenuto ha origine nel problema: studiare, a priori, le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali, descrivendone le proprietà. Se $A = A(x, D) \in \Psi^\infty_0(\Omega)$ è un pseudodifferenziale propriamente supportato (⁴), e *strettamente ipoellittico*, $(\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $WF(Au) \equiv WF(u))$, risulta: $mr(u) \subseteq mr(Au)$.

Ciò è conseguenza del fatto che se $\mathcal{O}$ è un aperto di $\Omega \times S_{n-1}$ e $A \in \Psi^m_0(\Omega)$, $m \in \mathbb{R}$, e $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, allora $Au \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$. Senza la stretta-ipoellitticità dell'operatore, si possono costruire esempi di operatori che modificano completamente l'insieme $mr(u)$. Ecco i tre tipi principali:

a) sia $P_0 = (x_0, \xi^0) \in mr(u)$: se $A \in \Psi^\infty_0(\Omega)$ e $\mathcal{O}$ è un intorno di P_0, in $\Omega \times S_{n-1}$, tale che $A \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)$, allora $P_0 \notin mr(Au)$. Ciò perchè $\mathcal{O} \cap WF(Au) \subseteq [\mathcal{O} \cap WF(A)] \cap WF(u) = \emptyset$ (⁵).

(²) $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\colon \forall \varphi(x) \in C^\infty_c(\Omega)$ e $\forall g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O})$, $g(x, D)(\varphi u) \in \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$. Qui $g(x, D)$ indica il pseudodifferenziale di ordine $\leqslant 0$ il cui simbolo si ottiene dalla funzione $g(x, \xi)$ prolungandola, per omogeneità, su $\Omega \times \{\mathbb{R}_n - \{0\}\}$. Per il seguito: se $\mathcal{O}$ è un aperto di $\Omega \times S_{n-1}$, $C^\infty(\mathcal{O}^*) = \bigcap_s H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Se $\pi\colon \Omega \times S_{n-1} \to \Omega$ è la proiezione, $\pi(x, \xi) = x$, si noti che se $u \in C^\infty(\mathcal{O}^*)$ ciò *non* implica: $u \in C^\infty(\pi(\mathcal{O}))$.

(³) Per lo studio degli operatori sub-ellittici, si vedano: [5], nel quale è stato iniziato; [2], nel quale gli operatori sono stati caratterizzati.

Una stima del tipo: $\|\varphi\|_{m-1+\delta} \leqslant C\|P\varphi\|_0$ è equivalente ad una stima del tipo: $\forall s \in \mathbb{R}$ esiste V_s intorno di x_0 in Ω e $C_s > 0$ con: $\|\varphi\|_{s+m+1-\delta} \leqslant C_s\|P\varphi\|_s$, $\forall \varphi \in C^\infty_c(V_s)$. Per controllare la validità di tali stime è necessario e sufficiente controllarle sulla parte principale, $p(x, D)$, di $P(x, D)$: $p(x, D) = \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x) D^\alpha$

(⁴) Per la definizione dei pseudodifferenziali si veda: [4], pag. 102. Per la definizione di pseudodifferenziale propriamente supportato: [4], pag. 103.

(⁵) Dire che $A \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}^*)$ significa: $\forall g(x, \xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O})$, se $\sigma_A(x, \xi)$ indica il simbolo di A, $g(x, \xi)\sigma_A(x, \xi) \in S^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_m S^m(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{R}$. $S^m(\Omega)$ è lo spazio dei simboli di ordine $\leqslant m$ su Ω. Si veda [6].

b) In [1] l'A. ha dimostrato: se $P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha D^\alpha$, $a^\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ il corpo complesso, è un operatore, ipoellittico, (e quindi strettamente ipoellittico), $mr(u) \equiv mr(Au)$.

c) Per ultimo si vuol costruire un esempio di pseudodifferenziale e una distribuzione $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ con: $mr(u) = \emptyset$ e $mr(Au) \neq \emptyset$.

In $\mathbb{R}^2$ si consideri una successione di corone circolari di centro $(0, 0)$, e raggi esterni decrescenti a zero. Sia $\{\Gamma_p\}$ tale successione; $\forall p \in \mathbb{N}$ sia $\alpha_p(x) \in C_c^\infty(\Gamma_p)$; si consideri la serie: $\sum_{1}^{\infty}{}_p \left(\alpha_p(x)/(1+|\xi|^2)^p\right)$. Tale serie determina, in $S^0(\mathbb{R}^2)$, un simbolo $a(x, \xi)$; il resto n-esimo di quella serie, poi, determina in $S^{-2n}(\mathbb{R}^n)$ un simbolo $a_p(x, \xi)$. ([6]).

Sia $\{x_p\}$ una successione di punti in $\mathbb{R}^2$ con $\alpha_p(x_p) \neq 0$; sia u una distribuzione con supporto compatto, $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, tale che: se $\xi^0 \in S_1$, $WF(u) \ni \{(x_n, \xi^0), (0, \xi^0)\}$. Sia $A = A(x, D)$ il pseudodifferenziale di ordine $\leqslant 0$ il cui simbolo, $\sigma_A(x, \xi)$, è $a(x, \xi)$ di sopra. Dimostriamo che $(0, \xi^0) \in WF(Au)$. Infatti, se così non fosse si potrebbe trovare, in $\mathbb{R}^2 \times S_1$, un intorno di $(0, \xi^0)$, $U \times V$, U intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$ e V intorno di ξ^0 in S_1, tale che $Au \in C^\infty((U \times V)^*)$. Per p grande $(x_p, \xi^0) \in U \times V$ e si può supporre $\Gamma_p \subseteq U$. Se $\beta(x) \in C_c^\infty(\Gamma_p)$ e $\beta(x_p) = 1$ e $g(x, \xi) \in$ $\in C_c^\infty((U \times V))$, deve essere $g(x, D)[\beta(x)Au] \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Il simbolo del pseudodifferenziale composto: $g(x, D) \circ \beta(x) \circ A(x, D)$ è influenzato dal solo termine p-esimo della serie che determina $A(x, D)$; ne deriva che: poichè il pseudodifferenziale $\beta(x) \circ A(x, D)$ è ellittico di ordine $-2p$ in (x_p, ξ^0) se $g(x_p, \xi^0) = 1$, $g(x, D) \circ \beta(x) \circ A(x, D)$ è ellittico in (x_p, ξ^0) e quindi (x_p, ξ^0) non può essere in $WF(u)$. Si è dimostrato così: $(0, \xi^0) \in WF(Au)$.

Dimostriamo ora che $(0, \xi^0) \in mr(Au)$ sicchè se si sceglie u con le proprietà indicate e con $mr(u) = \emptyset$ l'esempio con le proprietà indicate in *c*) è ottenuto. Infatti: sia $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$; se $\mathcal{O}$ è un intorno sufficientemente piccolo di $(0, \xi^0)$ per ogni $\alpha(x) \in C_c^\infty(\pi(\mathcal{O}))$ e $g(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O})$, il pseudodifferenziale $g(x, D) \circ \alpha(x) \circ A(x, D)$ è di ordine $\leqslant -k$, k un intero positivo, con, al decrescere di $\mathcal{O}$, $-k \to -\infty$. Ne risulta: $A(x, D)u \in H^{k+s}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^*)$.

([6]) Il senso con cui si deve intendere la convergenza della serie in $S^0(\mathbb{R}^2)$ o del suo resto n-esimo in $S^{-2n}(\mathbb{R}^2)$, è specificato in [6], pag. 146, Teorema 2.7.

3. Dimostrazione di A) del § 1.

Prima di passare alla dimostrazione diretta di A), si vogliono ricordare due proposizioni, a) e b), utili a quella dimostrazione. b) *rappresenta una estesione di un risultato di* [2]: là è dimostrato, pag. 332, che ogni sub-ellittico è ipoellittico; b) dice che ogni sub-ellittico è strettamente ipoellittico.

a) Sia $P = P(x, D)$ un polinomio differenziale, su Ω, ipoellittico, ($\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sing supp $(Pu) \equiv$ sing supp u). Se ${}^tP = {}^tP(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha(a^\alpha(x))$ è il suo trasposto, ${}^tP$ è localmente risolubile su Ω, cioè: $\forall x_0 \in \Omega$, si può trovare un intorno di x_0, V, tale che: $\forall \varphi(x) \in C_c^\infty(V)$ esiste $u \in \mathcal{D}'(V)$ con ${}^tPu = {}^tP(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha(a^\alpha(x)u) = \varphi$.

La dimostrazione di a) si può trovare in: Comunications on pure and Applied Mathematics, Vol. XXII, pagg. 637-651, (1970), pag. 640.

b) Sia $P = P(x, D)$ un polinomio differenziale su Ω, ipoellittico e localmente risolubile. P è strettamente ipoellittico, cioè: $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $WF(Pu) \equiv WF(u)$.

Osservazione. Poichè ogni sub-ellittico è ipoellittico [2], pag. 332, ed ha il suo trasporto ancora sub-ellittico, ogni sub-ellittico è strettamente ipoellittico.

Dimostrazione di b). Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si indica con $\mathcal{O}_u$ il complementare, in $\Omega \times S_{n-1}$, di $WF(u)$. Nelle ipotesi di b) si deve far vedere che: $\mathcal{O}_{Pu} \subseteq \mathcal{O}_u$, risultando sempre $\mathcal{O}_{Pu} \supseteq \mathcal{O}_u$. Sia allora $P_0 = (x_0, \xi^0) \in \mathcal{O}_{Pu}$, Scelti $\alpha(x) \in C_c^\infty(\Omega)$ e $g(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathcal{O}_{Pu})$ in modo che: $\alpha(x^0) = 1$ e $g(x^0, \xi^0) = 1$. si ha: $g(x, D)[\alpha(x)Pu] \in C^\infty(\pi(\mathcal{O}_{Pu}))$ e quindi, senza restrizioni, si può supporre $g(x, D)[\alpha(x)Pu] \in C^\infty(\omega)$, ω intorno di x_0, e P risolubile in ω. Esiste allora $v \in C^\infty(\omega)$ con $Pv = g(x, D)(\alpha(x)Pu)$ e per l'ellitticità di $g(x, D) \circ \alpha(x)$, $P_0 \in \mathcal{O}_u$.

La dimostrazione è completa.

Dimostrazione di A). Sia $P_0 = (x^0, \xi^0) \in mr(Pu)$. Se s è un numero reale, esiste $\mathcal{O}_s$, un aperto di $\Omega \times S_{n-1}$, $P_0 \in \mathcal{O}_s$, tale che $Pu \in$

Nota: *L'autore non sa se*: ogni $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha(x) D^\alpha$, $a^\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, che è ipoellittico sia anche strettamente ipoellittico.

$\in H^s_{\text{loc}}(\mathcal{O}^*_s)$. Scelte: $\alpha(x) \in C^\infty_c(\Omega)$ e $g(x,\xi) \in C^\infty_c(\mathcal{O}_s)$ con $\alpha(x_0) = 1$ e $g(P_0) = 1$, si può supporre $v = g(x, D)[\alpha(x) Pu]$, $(v \in H^s(\mathbb{R}^n))$, con supporto compatto in ω, un intorno di x_0 in Ω, e ω tale che: $\forall \varphi(x) \in C^\infty_c(\omega)$, $\|\varphi\|_s \leqslant C_s \|{}^tP\varphi\|_{(s+m-1+\delta_0)}$. Con il solito procedimento per i teoremi di esistenza per gli operatori differenziali tra spazi normali di distribuzioni, spazi che sono bilbertiani, si ha: esiste $v_1 \in H^{s+m-1+\delta_0}_{\text{loc}}(\omega_1)$, $\omega_1 \subset \omega$, ω_1 un aperto intorno di x_0 tale che: $Pv_1 = v$ in ω_1 (1). Poichè v è la trasformata di Pu mediante un operatore pseudodifferenziale ellittico in un intorno di P_0, $Pv_1 \equiv Pu$ mod. $C^\infty(\mathcal{O}'^*)$, con $\mathcal{O}'$ un conveniente intorno di P_0.

Poichè P è strettamente ipoellittico su Ω, $v_1 = u + v_2$ con $v_2 \in \in C^\infty(\mathcal{O}'^*)$ e quindi $u \in H^{s+m-1+\delta_0}_{\text{loc}}(\mathcal{O}'^*)$.

La dimostrazione è completa risultando: $mR(u) \supseteq mR(Pu)$.

Osservazione. Se si paragona il risultato di [1], ((ogni operatore differenziale su Ω, a coefficienti costanti ed ipoellittico è tale che: $mr(Pu) \equiv mr(u)$), con il risultato del presente lavoro, si può notare un interessante parallelo: in ambedue i casi sono verificate le ipotesi di ipoellitticità e locale risolubilità dell'operatore, (che garantiscono, come si può vedere dalla dimostrazione di b) di sopra, la sua stretta ipoellitticità e quindi il fatto che $mR(u) \subseteq mR(Pu)$).

A conseguenza si può prospettare la validità della seguente congettura:

Ogni operatore ipoellittico e localmente risolubile è tale che: $mr(Pu) = = mr(u)$.

BIBLIOGRAFIA

1] G. Bratti, *Sul comportamento degli operatori differenziali ipoellitticia, coefficienti costanti, sopra il «wave front set» delle distribuzioni*, Rend. Sem. Mat. dell'Università di Padova, (1973), Vol. 51,

[2] J. V. Egorov, *Pseudodifferential operators of principal type*, Math. USSR-Sbornik, **2** (1967), no. 3.

(1) I teoremi di esistenza ai quali si allude si possono ritrovare in *Linear Partial Differential Equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, 1966, pagg. 142-145.

[3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.
[4] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I*, Acta Math., **127** (1971)-
[5] L. HÖRMANDER, *Pseudodifferential operators and nonelliptic boundary prob. lems*, Annals of Math., **83** (1966).
[6] L. HÖRMANDER, *Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations* Proc. Symp. Pure Math., **10** (1967).
[7] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic differential operators*, Ann. Inst. Fourier (1961).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 novembre **1973**.