RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANDREA FORT

Una caratterizzazione dei reticoli modulari a catene limitate-finite

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 269-273

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__269_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Una caratterizzazione dei reticoli modulari a catene limitate-finite.

ANDREA FORT (*)

0. Ricordiamo che una coppia ordinata (a, b) di elementi di un reticolo L si dice *modulare* se, per ogni $c \leqslant b$, si ha

$$(c \vee a) \wedge b = c \vee (a \wedge b)$$

e si dice *dualmente modulare* se, per ogni $c \geqslant b$, si ha

$$(c \wedge a) \vee b = c \wedge (a \vee b)$$

Diciamo, inoltre, che un reticolo L è *a catene limitate-finite* se ogni catena di elementi di L dotata di un maggiorante e di un minorante ha lunghezza finita.

Lo scopo della presente nota è di dimostrare il seguente

TEOREMA. Sia L un reticolo a catene limitate-finite. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) L è modulare

ii) la coppia ordinata (a, b) di elementi di L è dualmente modulare volta la coppia ordinata (b, a) è modulare

iii) la coppia ordinata (a, b) di elementi di L è modulare ogniqualvolta la coppia (b, a) è dualmente modulare.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Osserviamo che questo teorema costituisce un rafforzamento del teorema (1.9) a pag. 3 di [1] nell'ambito dei reticoli a catene limitate-finite.

1. Ci è utile ricordare che le seguenti proposizioni caratterizzano le coppie ordinate modulari e quelle dualmente modulari. (cf. [2] o [3]) Siano a e b elementi di un reticolo L; allora

i) (a, b) è coppia ordinata modulare se e solo se $\varphi^a : x \mapsto x \vee a$ è applicazione iniettiva di $b/b\wedge a$ (*) in $b\vee a/a$

ii) (b, a) è coppia ordinata dualmente modulare se e solo se $\varphi^a : x \mapsto x\vee a$ è applicazione suriettiva di $b/b\wedge a$ su tutto $b\vee a/a$.

Il teorema che dimostreremo si può dunque formulare, in modo forse più significativo, come segue:

Un reticolo L a catene limitate-finite è modulare se e solo se, considerati due elementi qualsivoglia $a, b \in L$, l'applicazione $\varphi^a : x \mapsto x \vee a$ di $b/b\wedge a$ in $a\vee b/a$ è suriettiva ogniqualvolta è iniettiva, ovvero se e solo se $\varphi^a : x \mapsto x\vee a$ è iniettiva non appena è suriettiva.

Dimostrazione del Teorema. La dimostrazione che i) implica ii) e iii) è ovvia se si tien conto del fatto che in un reticolo modulare M, per ogni $a, b \in M$, risulta che la coppia ordinata (a, b) è tanto modulare che dualmente modulare.

Per dimostrare che ii) implica i) supponiamo che esista un reticolo L a catene limitate-finite non modulare in cui sia verificata la ii). Allora, nell'insieme di tutti i sottoreticoli «pentagonali» di L scegliamo il sottoreticolo

$$\{a, r, s, t, b \mid a < r < s < b,\ r\wedge t = s\wedge t = a,\ r\vee t = s\vee t = b\}$$

tale che la lunghezza dell'intervallo b/a risulti minima, e tale che, fra tutti i sottoreticoli «pentagonali» di estremi a e b, sia minima la lunghezza dell'intervallo t/a.

Se si avesse $t \succ a$, allora (r, t) sarebbe coppia modulare, mentre (t, r) non sarebbe coppia dualmente modulare: e ciò sarebbe in contrasto con l'ipotesi che in L è verificata la ii). Dunque esiste un elemento $u \in L$ tale che $a < u < t$.

(*) Se $u, v \in L$ e se $u \geqslant v$, allora con u/v si denota il sottoreticolo di L individuato dall'insieme $\{z \mid z \in L,\ v \leqslant z \leqslant u\}$.

Non può essere $b = u \vee r = u \vee s$ per la minimalità della lunghezza di t/a.

Se fosse $u \vee r = u \vee s \neq b$, allora avremmo trovato un sottoreticolo « pentagonale » di L, di estremi $u \vee r$ ed a, e quindi di lunghezza minore della lunghezza di b/a, in contrasto con la minimalità di questa ultima. Dunque si ha $u \vee s > u \vee r$.

Distinguiamo ora due casi:

1) Sia $u \vee s \neq b$. Allora i tre intervalli b/u, $u \vee s/a$ e $u \vee r/a$ sono modulari per la scelta di b/a.

Si ha $u \vee s/u \simeq s/a$ e $u \vee s/(u \vee s) \wedge t \simeq u \vee s \vee t/t = b/t$ e $u \vee r/u \simeq r/a$. Inoltre $((u \vee r) \wedge t) \vee r \leqslant ((u \vee r) \vee r) \wedge (t \vee r) = u \vee r$; ed anche $(u \vee r) \wedge t \geqslant u$, da cui consegue che $((u \vee r) \wedge t) \vee r \geqslant u \vee r$ e quindi, per quanto visto sopra $((u \vee r) \wedge t) \vee r = u \vee r$. Allora si ha $((u \vee r) \wedge t) \vee r/(u \vee r) \wedge t \simeq r/((u \vee r) \wedge t) \wedge r = r/a \simeq u \vee r/u$ e quindi $(u \vee r) \wedge t = u$.

Con un ragionamento analogo otteniamo $(u \vee s) \wedge t = u$. In conclusione abbiamo trovato:

$$u < t < b\,, \qquad u < u \vee r < u \vee s < b\,,$$

$$(u \vee r) \wedge t = (u \vee s) \wedge t = u \qquad \text{e} \qquad (u \vee r) \vee t = (u \vee s) \vee t = b$$

(vedi fig. 1), cioè un sottoreticolo « pentagonale » che contraddice la modularità di b/u.

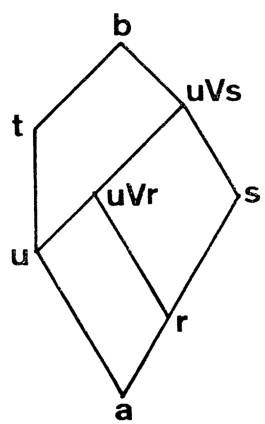

Fig. 1

2) Sia $u \vee s = b$. Se la mappa φ^u individuata dalla posizione $\varphi^u : x \mapsto x \vee u$ per ogni $x \in L$ fosse applicazione iniettiva di s/a in b/u, cioè la coppia ordinata (u, s) fosse modulare, si avrebbe una contraddizione con l'ipotesi, giacchè la coppia ordinata (s, u) non è dualmente modulare, essendo $t = t \wedge (u \vee s) \neq u \vee (t \wedge s) = u$.

Dunque φ^u non è iniettiva; ciò significa che esistono due elementi $v, z \in s/a$ tali che $v \vee u = z \vee u$, $z < v \vee z$. Se fosse $v \vee u = z \vee u \neq b$, essendo ovviamente $v \wedge u = z \wedge u = a$, si sarebbe trovato un sottoreticolo « pentagonale » che contraddice la minimalità della nostra scelta iniziale: infatti $a < u < u \vee z$, $a < z < v \vee z < u \vee z$, $u \wedge z = a = u \wedge (z \vee v)$, $u \vee z = u \vee (z \vee v)$. Dunque due immagini secondo l'applicazione φ^u possono coincidere solo in b. Allora esiste un elemento $w \in s/a$ tale che $s \vee u = w \vee u = b$, $w < s$, $w \wedge u = s \wedge u = a$; ed ancora abbiamo individuato un sottoreticolo « pentagonale » che contrasta col fatto che si era supposta minima la lunghezza di t/a. (vedi fig. 2).

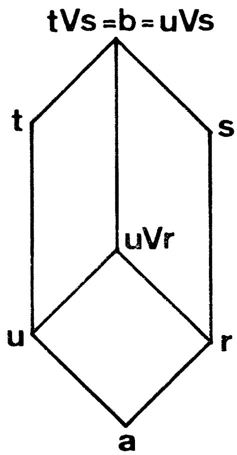

Fig. 2

In ogni caso, l'aver negato il fatto che ii) implica i) ci ha condotto ad una contraddizione. Dunque i) e ii) sono equivalenti.

Osserviamo infine che la iii) è la dualizzazione della ii): dunque quanto è stato dimostrato finora comporta che la iii) implica che il reticolo $\hat{L}$ duale di L è modulare; ma allora L stesso è modulare, e così la dimostrazione del teorema è completa.

Notiamo che se si lascia cadere l'ipotesi che il reticolo sia a catene limitate-finite, allora non sussiste più l'equivalenza di i) e ii) come mostra il seguente reticolo rappresentato in fig. 3

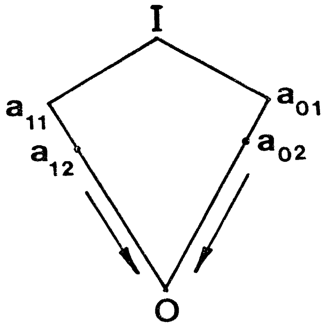

Fig. 3

$$A = \left\{ a_{ij}, I, 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} i \in \{0, 1\}\,, \quad j \in N\,, \quad 0 < a_{ij} < I \text{ per ogni } i \text{ e per ogni } j \\ a_{ij} \leqslant a_{i'j'} \text{ se e solo se } i = i' \text{ e } j \geqslant j' \end{array} \right\}$$

In A sono modulari solo le coppie ordinate le componenti delle quali sono elementi confrontabili, ed è quindi evidente che in A si verifica la ii); del resto è altrettanto chiaro che A non è modulare.

Il reticolo A mostra che la iii) non implica la i) se si lascia cadere l'ipotesi suddetta.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Maeda - S. Maeda, *Theory of Symmetric Lattices*, Berlin, Springer-Verlag, 1970.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, III ed., New York, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1967.

[3] R. Croisot, *Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie*, Ann. Ecole Norm. Sup., **68** (1951), pp. 203-265.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 marzo 1973.