ANNA MARIA BRESQUAR

Sulla diseguaglianza di Wirtinger

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 257-268

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__257_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 51 (1974)

Sulla diseguaglianza di Wirtinger.

Anna Maria Bresquar (*)

Summary - Some Wirtinger inequalities are constructed for functions with n zeros. Extremum properties of the constant and other features of the extremals are proved.

Introduzione.

È nota come disuguaglianza di Wirtinger la seguente

$$\int_0^h y^2\,dx \leqslant \lambda \int_0^h \{y'\}^2\,dx\,, \tag{1}$$

dove y è una funzione di classe C^1 soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:

$$\int_0^h y\,dx = 0\,, \tag{2}$$

$$y(0) = y(h) = 0\,, \tag{3}$$

$$y(0) = 0\,, \tag{4}$$

oppure

$$y(h) = 0\,. \tag{5}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Si sa che i corrispondenti valori di λ e le funzioni estremali sono rispettivamente:

$$\lambda = \frac{h^2}{4\pi^2}, \quad y = c_1 \sin\frac{2\pi x}{h} + c_2 \cos\frac{2\pi x}{h}, \tag{2'}$$

$$\lambda = \frac{h^2}{\pi^2}, \quad y = c \sin\frac{\pi x}{h}, \tag{3'}$$

$$\lambda = \frac{4h^2}{\pi^2}, \quad y = c \sin\frac{\pi x}{2h}, \tag{4'}$$

$$\lambda = \frac{4h^2}{\pi^2}, \quad y = c \cos\frac{\pi x}{2h}. \tag{5'}$$

In questo lavoro (*) stabilisco la disuguaglianza (1) sotto le condizioni

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_n) = 0\,,$$

dove

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant h\,,$$

determinando il valore di λ e le corrispondenti estremali.

Per non rinunciare a queste ultime, conviene supporre che $y(x)$ sia assolutamente continua con derivata in L^2; vengono tuttavia segnalati i casi in cui esistono estremali in C^1. Si determina pure, per ogni scelta di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la dimensione dello spazio lineare delle estremali.

Infine si ottengono minimo e massimo di λ. Il minimo viene assunto per $x_i = \big((2i-1)h\big)/2n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e vale $h^2/(n^2\pi^2)$. Il massimo corrisponde al caso limite $x_i = 0$ (oppure $x_i = h$) per $i = 1, \ldots, n$, e vale $4h^2/\pi^2$.

Per comodità di esposizione il problema viene trattato dapprima per $n = 1$ e per $n = 2$, poi nel caso generale.

1. La disuguaglianza di Wirtinger con $y(x_1) = 0$.

In questo paragrafo, preso $x_1 \in [0, h]$, studio la (1) con la condizione $y(x_1) = 0$ ottenendo così una prima generalizzazione delle con-

(*) L'origine di questa ricerca si trova in un'osservazione contenuta nel § 1 di [5].

dizioni (4) e (5). Se $0 \leqslant x_1 \leqslant h/2$ otterrò che la (1) sarà verificata per $\lambda = \big(4(h-x_1)^2\big)/\pi^2$ ed avrà come estremali

$$(6) \qquad y = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant x_1)\,, \\ c \sin \dfrac{\pi(x-x_1)}{2(h-x_1)} & (x_1 \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases}$$

Se $h/2 \leqslant x_1 \leqslant h$ avrò $\lambda = 4x_1^2/\pi^2$ e le estremali saranno

$$(7) \qquad y = \begin{cases} c \cos \dfrac{\pi x}{2x_1} & (0 \leqslant x \leqslant x_1)\,, \\ 0 & (x_1 \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_0^h y^2\,dx = \int_0^{x_1} y^2\,dx + \int_{x_1}^h y^2 dx\,.$$

Poichè $y(x_1) = 0$, al primo integrale posso applicare la (1) con una condizione di tipo (5) ed al secondo la (1) con una condizione di tipo (4). Si ottiene subito

$$\int_0^h y^2\,dx \leqslant \frac{4x_1^2}{\pi^2}\int_0^{x_1}\{y'\}^2\,dx + \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}\int_{x_1}^h \{y'\}^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}\right]\int_0^h \{y'\}^2\,dx\,.$$

Se

$$\lambda = \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}\right] = \frac{4x_1^2}{\pi^2}, \qquad \text{cioè se } \frac{h}{2} \leqslant x_1 \leqslant h\,,$$

le estremali sono proprio date da (7).
Se

$$\lambda = \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}\right] = \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}, \qquad \text{cioè se } 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{h}{2}\,,$$

le estremali sono ovviamente date da (6).

OSSERVAZIONE 1ª. Le funzioni estremali trovate non sono in generale di classe C^1. Fanno eccezione i casi già noti, corrispondenti ad $x_1 = 0$ oppure $x_1 = h$, ed il caso $x_1 = h/2$ in cui posso prendere oltre alle (6) ed alle (7), in questo caso simultaneamente valide, anche

$$y = \begin{cases} c \cos \dfrac{\pi x}{h} & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{h}{2}\right), \\ -c \sin \dfrac{\pi(2x-h)}{2h} & \left(\dfrac{h}{2} \leqslant x \leqslant h\right), \end{cases}$$

cioè $y = c \cos(\pi x/h)$ in tutto l'intervallo $[0, h]$.

OSSERVAZIONE 2ª. Si noti che, mentre per un generico valore di x_1 le funzioni estremali dipendono da una costante arbitraria, per $x_1 = h/2$ le funzioni estremali dipendono da due costanti arbitrarie. Infatti le funzioni (6) e (7) sono in questo caso relative allo stesso valore di $\lambda = h^2/\pi^2$ e sono ortogonali, come pure le loro derivate, in $[0, h]$. Ne segue, indicata con y_1 una funzione (6) e con y_2 una funzione (7) che

$$\int_0^h (c_1 y_1 + c_2 y_2)^2 \, dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^h (c_1 y_1' + c_2 y_2')^2 \, dx .$$

OSSERVAZIONE 3ª. Il caso $x_1 = h/2$ presenta un terzo motivo di interesse; infatti il minimo di

$$\lambda = \max \left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_1)^2}{\pi^2}\right],$$

al variare di x_1 in $[0, h]$, si ottiene per $4x_1^2/\pi^2 = \big(4(h-x_1)^2\big)/\pi^2$ cioè per $x_1 = h/2$ e vale h^2/π^2.

Il massimo di λ al variare di x_1 in $[0, h]$ si ottiene evidentemente per $x_1 = 0$ ed $x_1 = h$ e vale $4h^2/\pi^2$.

2. La disuguaglianza di Wirtinger con $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

In questo paragrafo considero una generalizzazione di (3) ponendo

$$y(x_1) = y(x_2) = 0 \qquad \text{con } 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant h . \tag{8}$$

Tenuto conto delle soluzioni del problema con condizioni di tipo (5), (3), (4) relative agli intervalli $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, h]$, in modo analogo al paragrafo precedente si ottiene

$$\int_0^h y^2\,dx \leqslant \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2-x_1)^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_2)^2}{\pi^2}\right]\int_0^h \{y'\}^2\,dx\,.$$

La formula rimane valida anche se $x_1 = 0$ oppure $x_2 = h$.

Posto

$$\gamma_1 = \frac{4x_1^2}{\pi^2}, \qquad \gamma_2 = \frac{(x_2-x_1)^2}{\pi^2}, \qquad \gamma_3 = \frac{4(h-x_2)^2}{\pi^2},$$

se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1$ le estremali sono date da

$$y = \begin{cases} c\cos\dfrac{\pi x}{2x_1} & (0 \leqslant x \leqslant x_1)\,. \\ 0 & (x_1 \leqslant x \leqslant h)\,, \end{cases} \tag{9}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_2$ le estremali sono date da

$$y = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant x_1)\,, \\ c\sin\dfrac{\pi(x-x_1)}{x_2-x_1} & (x_1 \leqslant x \leqslant x_2)\,, \\ 0 & (x_2 \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases} \tag{10}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_3$ le estremali sono date da

$$y = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant x_2)\,, \\ c\sin\dfrac{\pi(x-x_2)}{2(h-x_2)} & (x_2 \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases} \tag{11}$$

Per discutere le disuguaglianze fra γ_1, γ_2, γ_3 in funzione di x_1 ed x_2 conviene usare una rappresentazione grafica.

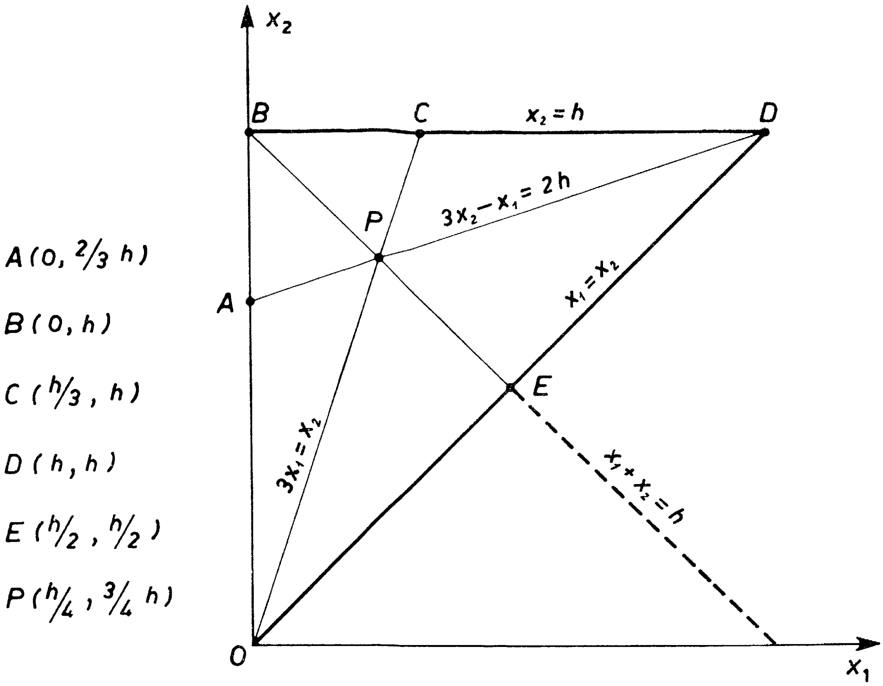
I punti del piano $x_1 x_2$ corrispondenti a valori accettabili per la (8) sono ovviamente tutti quelli del triangolo OBD escluso il lato OD in cui si ha $x_1 = x_2$. I punti di quest'ultimo lato corrispondono al problema trattato nel paragrafo precedente.

Si ha:

$$\max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 \text{ nel quadrilatero } EPCD\,,$$

$$\max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_2 \text{ nel quadrilatero } APCB\,,$$

$$\max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_3 \text{ nel quadrilatero } OAPE\,.$$



Osservazione 1ª. Anche in questo problema le estremali non sono in generale di classe C^1; fanno eccezione i casi corrispondenti ai punti A, B, C, P.

Nel punto A si ha $x_1 = 0$, $x_2 = 2h/3$, quindi $\gamma_1 = 0$, $\lambda = \gamma_2 = \gamma_3 = 4h^2/9\pi^2$, e le estremali di classe C^1 sono date da

$$y = \begin{cases} c \sin \dfrac{3\pi x}{2h} & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3}h\right), \\[2ex] -\,c \sin \dfrac{\pi(3x - 2h)}{2h} & \left(\dfrac{2}{3}h \leqslant x \leqslant h\right), \end{cases}$$

cioè da $y = c \sin(3\pi x/2h)$ in tutto l'intervallo $[0, h]$.

Il punto B corrisponde al caso già noto $x_1 = 0$, $x_2 = h$.

Nel punto C si ha (simmetricamente al caso del punto A) $x_1 = h/3$, $x_2 = h$, $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 4h^2/9\pi^2$, $\gamma_3 = 0$, e le estremali di classe C^1 sono date da $y = c\cos(3\pi x/2h)$ per $0 \leqslant x \leqslant h$.

Infine per il punto P si ha $x_1 = h/4$, $x_2 = 3h/4$, $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = h^2/4\pi^2$ e le estremali di classe C^1 sono date da

$$y = \begin{cases} c\cos\dfrac{2\pi x}{h} & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{h}{4}\right), \\[2ex] -c\sin\dfrac{\pi(4x-h)}{2h} & \left(\dfrac{h}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4}h\right), \\[2ex] c\sin\dfrac{\pi(4x-3h)}{2h} & \left(\dfrac{3}{4}h \leqslant x \leqslant h\right), \end{cases}$$

cioè $y = c\cos(2\pi x/h)$ in tutto l'intervallo $[0, h]$.

Osservazione 2ª. Si noti che per una scelta generica di x_1 e x_2 le funzioni estremali dipendono da una costante arbitraria. Fanno eccezione i casi che in figura sono rappresentati dai punti dei segmenti AP, PC, PE.

Infatti nel punto P si ha

$$\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$$

e le funzioni estremali dipendono da tre costanti arbitrarie.

Sul segmento AP, privato del punto P, si ha

$$\lambda = \gamma_2 = \gamma_3 > \gamma_1$$

e le estremali dipendono da due costanti arbitrarie.

Condizioni analoghe si verificano sui segmenti CP, EP privati del punto P e le estremali dipendono sempre da due costanti arbitrarie.

Queste affermazioni si giustificano nello stesso modo di quelle fatte nell'Osservazione 2ª del paragrafo uno.

Come si vede, i casi in cui esistono estremali di classe C^1 sono compresi nella famiglia ora descritta.

Osservazione 3ª. Anche in questo caso si possono ricercare il minimo ed il massimo di

$$\lambda = \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \frac{4(h - x_2)^2}{\pi^2}\right]$$

al variare di x_1, x_2 in $[0, h]$.

Si ha che

$$\min \lambda = \frac{h^2}{4\pi^2} = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$$

è assunto per $x_1 = h/4$, $x_2 = 3h/4$.

La dimostrazione di questo risultato è rinviata all'Osservazione 3ª del successivo paragrafo, vale a dire al caso generale.

È poi evidente che

$$\sup \lambda = \frac{4h^2}{\pi^2},$$

e che questo valore può essere considerato un massimo se si ammette che x_1, x_2 possano coincidere.

A questo proposito, si riconosce che il caso limite $x_1 = x_2$ ci riporta al precedente paragrafo, e non dà luogo a condizioni speciali del tipo

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0 .$$

3. La disuguaglianza di Wirtinger con $y(x_1) = \ldots = y(x_n) = 0$.

Per comodità di discorso supponiamo $n \geqslant 2$; scelti i valori $0 \leqslant x_1 < < x_2 < x_3 \ldots < x_n \leqslant h$, impongo le condizioni

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_n) = 0 . \tag{12}$$

Si ha allora

$$\int_0^h y^2\, dx \leqslant \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \ldots, \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\pi^2}, \frac{4(h - x_n)^2}{\pi^2}\right] \int_0^h \{y'\}^2\, dx .$$

Posto

$$\gamma_1 = \frac{4x_1^2}{\pi^2}, \qquad \gamma_2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}, \ldots, \gamma_n = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\pi^2}, \qquad \gamma_{n+1} = \frac{4(h - x_n)^2}{\pi^2},$$

se $\lambda = \max(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}) = \gamma_1$ le estremali sono date da

$$y = \begin{cases} c \cos \dfrac{\pi x}{2x_1} & (0 \leqslant x \leqslant x_1)\,, \\ 0 & (x_1 \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases} \tag{13}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) = \gamma_i$ (per $i = 2, 3, \ldots, n$) le estremali sono date da

$$y = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant x_{i-1})\,, \\ c \sin \dfrac{\pi(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} & (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i)\,, \\ 0 & (x_i \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases} \tag{14}$$

Se $\lambda = \max(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) = \gamma_{n+1}$ le estremali sono date da

$$y = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant x_n)\,, \\ c \sin \dfrac{\pi(x - x_n)}{2(h - x_n)} & (x_n \leqslant x \leqslant h)\,. \end{cases} \tag{15}$$

OSSERVAZIONE 1ª. Anche in questo caso le estremali trovate non sono in generale di classe C^1; fanno eccezione i casi:

Caso a)

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = \frac{h}{n-1}\,, \qquad x_3 = 2\frac{h}{n-1}\,, \ldots, x_{n-1} = (n-2)\frac{h}{n-1}\,, \qquad x_n = h\,,$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = 0\,, \qquad \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_n = \frac{h^2}{\pi^2(n-1)^2}\,, \qquad \gamma_{n+1} = 0\,,$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \sin \frac{(n-1)\pi x}{h} \qquad \text{per } 0 \leqslant x \leqslant h\,.$$

Caso b)

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = \frac{2h}{2n-1}\,, \qquad x_3 = \frac{4h}{2n-1}\,, \ldots, x_n = \frac{2(n-1)h}{2n-1}$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = 0\,, \qquad \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_{n+1} = \frac{4h^2}{\pi^2(2n-1)^2}$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \sin \frac{(2n-1)\,\pi x}{2h} \qquad \text{per } 0 \leqslant x \leqslant h\,.$$

Caso c)

$$x_1 = \frac{h}{2n-1}\,, \qquad x_2 = 3\,\frac{h}{2n-1}\,, \ldots, x_{n-1} = (2n-3)\,\frac{h}{2n-1}\,, \qquad x_n = h\,,$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = \frac{4h^2}{\pi^2(2n-1)^2}\,, \qquad \gamma_{n+1} = 0\,,$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2h} \qquad \text{per } 0 \leqslant x \leqslant h\,.$$

Caso d)

$$x_1 = \frac{h}{2n}\,, \qquad x_2 = 3\,\frac{h}{2n}\,, \ldots, \ x_n = (2n-1)\,\frac{h}{2n}\,,$$

a cui corrispondono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n+1} = \frac{h^2}{\pi^2 n^2}\,,$$

e le estremali di classe C^1

$$y = c \cos \frac{n\pi x}{h} \qquad \text{per } 0 \leqslant x \leqslant h\,.$$

OSSERVAZIONE 2ª. Anche ora per una scelta generica delle $x_1, \ldots, x_n$ le funzioni estremali dipendono da una costante arbitraria; fanno eccezione i casi in cui $\lambda = \max(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ coincida con due o più delle $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}$: Precisamente se k delle costanti $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}$ confluiscono nel massimo λ le corrispondenti estremali dipendono da k costanti arbitrarie.

Come si vede i casi *a*), *b*), *c*), *d*) dell'osservazione precedente sono compresi nella famiglia ora descritta; le loro estremali dipendono rispettivamente da $n-1$, n, n, $n+1$ costanti arbitrarie.

OSSERVAZIONE 3ª. Ricerchiamo il minimo ed il massimo di

$$\lambda = \max\left[\frac{4x_1^2}{\pi^2}, \frac{(x_2-x_1)^2}{\pi^2}, \ldots, \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{\pi^2}, \frac{4(h-x_n)^2}{\pi^2}\right]$$

al variare di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $[0, h]$.

TEOREMA. $\min \lambda = h^2/(n^2\pi^2)$, *cioè* $\lambda = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{n+1}$; *il minimo è assunto quando*

$$x_i = \frac{(2i-1)h}{2n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a_1, \ldots, a_{n+1}$ numeri non negativi e siano $p_1, \ldots, p_{n+1}$ dei pesi (non negativi, non tutti nulli).

Osserviamo che nella disuguaglianza

$$\left[\frac{\sum_1^{n+1}{}_i\, p_i a_i}{\sum_1^{n+1}{}_i\, p_i}\right]^2 \leqslant \frac{\sum_1^{n+1}{}_i\, p_i a_i^2}{\sum_1^{n+1}{}_i\, p_i} \leqslant \max\{a_i^2\}, \tag{16}$$

il segno uguale vale soltanto se $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1}$.

Poniamo

$$a_i = \sqrt{\gamma_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n+1),$$

cioè

$$a_1 = \frac{2x_1}{\pi}, \qquad a_2 = \frac{x_2 - x_1}{\pi}, \ldots, a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\pi}, \qquad a_{n+1} = \frac{2(h-x_n)}{\pi},$$

ed ancora

$$p_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad p_2 = 1, \ldots, p_n = 1, \qquad p_{n+1} = \tfrac{1}{2}.$$

Si trova

$$\frac{\sum_1^{n+1}{}_i\, a_i p_i}{\sum_1^{n+1}{}_i\, p_i} = \frac{h}{n\pi}$$

e quindi sostituendo nella (16)

$$\frac{h^2}{n^2\pi^2} \leqslant \max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}\} = \lambda .$$

Il segno uguale, come detto sopra, vale solo se

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n+1} .$$

Questa condizione si traduce in un sistema lineare nelle x_i che ha la soluzione prevista

$$x_i = \frac{(2i-1)h}{2n} \qquad (i = 1, \ldots, n) .$$

Rimane evidentemente vero che

$$\sup \lambda = \frac{4h^2}{\pi^2}$$

e che questo valore può essere considerato un massimo soltanto se si ammette che $x_1, \ldots, x_n$ possano coincidere assumendo tutte il valore zero oppure il valore h.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. H. Hardy - J. E. Littlewood - G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, II ed., 1959.

[2] E. F. Beckenbach - R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Springer, 1965.

[3] K. Fan - O. Taussky - J. Todd, *Discrete analogs of inequalities of Wirtinger*, Monatshefte für Mathematik, **59** (1955), 73-90.

[4] P. R. Beesack, *Integral inequalities of the Wirtinger type*, Duke Mathematical Journal, **25** (1958), 477-498.

[5] U. Richard, *Sur des inégalités du type de Wirtinger et leur application aux équations différentielles ordinaires*, Proceedings of Colloquium of Analysis, Rio de Janeiro 1972 (in corso di stampa presso Hermann, Parigi).

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1973.