Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Angelo Favini

Su certe equazioni astratte ultraparaboliche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 221-256

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__221_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 51 (1974)

Su certe equazioni astratte ultraparaboliche.

ANGELO FAVINI (*)

Introduzione.

In questa nota si fa uso della teoria dei semigruppi analitici (**) per ottenere alcuni risultati di esistenza ed unicità per le soluzioni di certe equazioni astratte a coefficienti operatoriali.

Una delle motivazioni del nostro studio è quella di dare una risposta a questioni concernenti esistenza ed unicità delle soluzioni classiche di problemi di Cauchy degeneri.

L'idea è di considerare la variabile « spaziale » fonte della degenerazione di un operatore differenziale, come variabile « temporale », di studiare il problema differenziale a due variabili temporali che ne risulta, in un opportuno spazio di funzioni e, infine, di riconoscere che l'eventuale soluzione ottenuta è una effettiva soluzione del problema dato nell'ambiente originale.

Trattiamo, quindi, problemi del tipo

$$\begin{cases} B_0 \dfrac{\partial}{\partial t} u + B_1 \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -A(t, \tau) u\,, & t \in]0,\, T]\,,\ \tau \in \Omega\,, \\ u(0, \tau) = f(\tau)\,, \quad \tau \in \Omega\,, \end{cases}$$

e proviamo che, sotto opportune ipotesi, tale problema ammette una soluzione stretta, esprimibile per mezzo di integrali complessi.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

(**) Per le definizioni e le proprietà fondamentali rimandiamo, principalmente, al libro di T. KATO (cfr. [8]), ma anche a [2], [9], [11], [17].

I risultati ottenuti possono vedersi, oltre che come una generalizzazione di certi problemi ultraparabolici, anche come generalizzazione astratta di problemi differenziali concreti, in più variabili temporali.

Equazioni astratte, del tipo qui considerato, e problemi connessi, sono stati studiati da J. L. Lions (cfr. [21]) in certi spazi di Hilbert, però con tecnica diversa da quella da noi seguita. Ricordiamo anche che problemi concreti per equazioni ultraparaboliche sono stati studiati da M. N. Rosculet (cfr. [15]) e da V. S. Vladimirov-Ju. N. Drožžinov (cf. [16]).

DEFINIZIONE 1. *Sia Ω un aperto* (*) *non vuoto di* $\mathbb{R}$. *Siano* $A(t, \tau)$ *per* $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$ *e* $\tau \in \Omega$ *operatori lineari nello spazio di Banach complesso* X, *sia* f *una funzione continua da* Ω *a* X *e* g *una funzione continua da* $[0, T] \times \Omega$ *a* X.

Una funzione $u = u(t, \tau)$, $t \in [0, T]$, $\tau \in \Omega$, *si dice soluzione stretta del problema*

$$(1) \qquad \begin{cases} B_0 \dfrac{\partial}{\partial t} u + B_1 \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -/A(t, \tau) u + g(t, \tau) \,, & (t, \tau) \in]0, T] \times \Omega \,, \\ u(0, \tau) = f(\tau) \,, \quad \tau \in \Omega \,, \end{cases}$$

se risulta fortemente continua su $[0, T] \times \Omega$, *ha derivate parziali* $(\partial/\partial t) u$ *e* $(\partial/\partial \tau) u$ *fortemente continue su* $]0, T] \times \Omega$, $u(t, \tau) \in D_{A(t,\tau)}$, $(t, \tau) \in$ $\in]0, T] \times \Omega$, *e vale la* (1).

Nel seguito, con $C, C_1, \ldots, M, N, \ldots$ indicheremo delle costanti che dipendono dal problema al momento considerato.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $\{A(t, \tau)\}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi densamente definiti nello spazio di Banach* X, *con* $t \in \Delta$, *aperto* (**) *convesso di* $\mathbb{C}$ *contenente* $[0, T]$, $t \in \Xi$, *dove* Ξ *è un aperto di* $\mathbb{C}$ *tale che*

$$(2) \qquad \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z = \tau' - \frac{\nu}{\lambda}(t - t'),\ t, t' \in \Delta,\ \tau' \in \Omega \right\} \subset \Xi \,,$$

$\lambda, \nu \in \mathbb{C}/\{0\}$, *con* $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\arg \lambda| < \phi$, $0 < \phi < \pi/2$.

(*) L'ipotesi è di comodo, e può essere indebolita.

(**) Anche questa è una ipotesi di comodo che può essere indebita.

L'insieme risolvente di $-A(t,\tau)$ *contenga il settore chiuso*

$$\Sigma = \left\{ w \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\arg w| \leqslant \varphi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

e valga

$$\|(\sigma I + A(t,\tau))^{-1}\|_{X\to X} \leqslant M/|\sigma|\,, \qquad \sigma\in\Sigma\,, \quad t\in\Delta\,, \quad \tau\in\Xi\,. \tag{3}$$

Inoltre, $A(t,\tau)^{-1}$ *sia olomorfa su* $\Delta\times\Xi$.

Infine, f *sia olomorfa da un aperto contenente*

$$H = \left\{ z\in\mathbf{C} \,\middle|\, z = \tau - \frac{\nu}{\lambda}t,\ t\in\Delta,\ \tau\in\Omega \right\}$$

a X. *Allora il problema*

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial}{\partial t}u + \nu\dfrac{\partial}{\partial\tau}u = -A(t,\tau)u\,, & t\in\,]0,T]\,,\ \tau\in\Omega\,, \\ u(0,\tau) = f(\tau)\,, \quad \tau\in\Omega\,, \end{cases} \tag{4}$$

ha una e una sola soluzione stretta, analitica in t *e in* τ.

Se g *è una funzione olomorfa da* $\Delta\times\Xi$ *a* X, *allora il problema non omogeneo*

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial}{\partial t}u + \nu\dfrac{\partial}{\partial\tau}u = -A(t,\tau)u + g(t,\tau)\,, & t\in\,]0,T]\,,\ \tau\in\Omega\,, \\ u(0,\tau) = f(\tau)\,, \quad \tau\in\Omega\,, \end{cases} \tag{5}$$

ha una unica soluzione stretta, analitica in t, τ.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la prima affermazione.

Poniamo

$$\Delta' = \left\{ z\in\mathbf{C} \,\middle|\, z = \frac{t}{\lambda}\,,\ t\in\Delta \right\}.$$

Δ' risulta un sottoinsieme aperto convesso di $\mathbf{C}$ contenente un segmento $[0, T_1]$, in virtù dell'ipotesi su Δ.

Se $t\in\Delta$, $\tau\in\Omega$, sia

$$\xi = \frac{t}{\lambda}\,, \qquad \eta = \frac{t}{\lambda} - \frac{\tau}{\nu}\,.$$

Poniamo

$$u(t, \tau) = u(\lambda\xi, \nu(\xi - \eta)) = w(\xi, \eta) ,$$

e consideriamo il problema

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} = -A(\lambda\xi, \nu(\xi-\eta))\, w , & \xi \in \Delta' , \ \xi \neq 0 , \ -\nu\eta \in H , \\ w(0, \eta) = f(-\nu\eta) , & -\nu\eta \in H . \end{cases}$$

Fissiamo η soddisfacente $-\nu\eta \in H$ e ricerchiamo, senza per ora preoccuparci della regolarità in η, $w(\xi, \eta)$, esaminando il problema differenziale

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\xi} w_\eta(\xi) = -A(\lambda\xi \ \nu(\xi-\eta))\, w_\eta/(\xi) , & \xi \in \Delta' , \ \xi \neq 0 , \\ w_\eta(0) = f(-\nu\eta) . \end{cases}$$

Sia $B_\eta(\xi) = A(\lambda\xi, \nu(\xi - \eta))$, $\xi \in \Delta'$.

Per ogni $\xi \in \Delta'$, $B_\eta(\xi)$ è un operatore lineare chiuso in X, a dominio denso in X; l'insieme risolvente di $-B_\eta(\xi)$ contiene Σ e, poichè $-\nu\eta = \tau' - (\nu/\lambda)t'$, per t', τ' opportuni, risulta

$$\|(\sigma I + B_\eta(\xi))^{-1}\|_{X\to X} = \left\|\left(\sigma I + A\left(t, \tau' + \frac{\nu}{\lambda}(t - t')\right)\right)^{-1}\right\|_{X\to X} \leqslant M/|\sigma| ,$$

$$\sigma \in \Sigma , \ \xi \in \Delta' .$$

Allora il Teorema 1 di Kato-Tanabe (cfr. [10], p. 1) assicura che esiste un operatore di evoluzione $U(\xi, \xi'; \eta)$ olomorfo in $\xi, \xi' \in \Delta'$, $\xi \neq \xi'$, $|\arg(\xi - \xi')| < \phi$, fortemente continuo anche per $\xi = \xi'$, per cui $U(\xi, \xi; \eta) = I$ e

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi, \xi'; \eta) = -A(\lambda\xi, \nu(\xi - \eta))\, U(\xi, \xi'; \eta) .$$

Esattamente si ha

$$U(\xi, \xi'; \eta) = \exp[-(\xi - \xi')A\,(\lambda\xi, \nu(\xi - \eta))] +$$

$$+ \int_{\xi'}^{\xi} \exp[-(\xi - \xi'')A(\lambda\xi, \nu(\xi - \eta))]\, R(\xi'', \xi'; \eta)\, d\xi'' ,$$

l'integrazione essendo fatta lungo una curva regolare che congiunge ξ con ξ' contenuta in Δ', ove

$$R(\xi'', \xi'; \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta)\,,$$

$$R^{(1)}(\xi'', \xi'; \eta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \exp\left[\sigma(\xi''-\xi')\right]\frac{\partial}{\partial \xi''}\left(\sigma I + A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right)^{-1} d\sigma\,,$$

Γ essendo una curva regolare contenuta in Σ che va da $\infty \exp\left[-i(\pi/2+\phi)\right]$ a $\infty \exp\left[i(\pi/2+\phi)\right]$,

$$R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta) = \int_{\xi'}^{\xi''} R^{(1)}(\xi'', \xi; \eta) R^{(m-1)}(\xi'\, \xi'; \eta)\, d\xi\,, \qquad m = 2, 3, \ldots$$

Riconosciamo che $\exp\left[-(\xi''-\xi')A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right]$ è olomorfa in ξ', ξ'', η.

Poichè $-A(t, \tau)$ è generatore infinitesimale di un semigruppo analitico, la olomorfia in ξ' è immediata.

D'altra parte, poichè $|\arg \xi| < \phi$, si ha (cfr. [9], p. 108),

$$\exp\left[-\xi A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \exp\left[\sigma\xi\right]\left(\sigma I + A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right)^{-1} d\sigma\,.$$

Ora

$$\left(\sigma I + A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right)^{-1} = A\left(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta)\right)^{-1}\left(\sigma A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))^{-1} + I\right)^{-1}$$

e quindi l'ipotesi che $A(t, \tau)^{-1}$ sia olomorfa in $\Delta \times \Xi$ assicura che anche $\left(\sigma I + A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right)^{-1}$ è olomorfa in ξ'', η.

Inoltre, per la (3), vale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \left\|\exp\left[\sigma\xi\right]\left(\sigma I + A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right)^{-1}\right\|_{X\to X} |d\sigma| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma} \left|\exp\left[\sigma\xi\right]\right|\, |\sigma|^{-1}\, |d\sigma| < +\infty\,,$$

(cfr. [8], p. 489).

Quindi, la olomorfia di $\exp\left[-(\xi''-\xi')A(\lambda\xi'', \nu(\xi''-\eta))\right]$ in ξ', ξ'', η resta assicurata.

Per analizzare la regolarità di $R^{(1)}(\xi'', \xi'; \eta)$, seguendo Kato e Tanabe (cfr. [10], p. 2), fissiamo un arbitrario compatto ω contenuto in $\Delta \times \Xi$.

Allora, per la formula di Cauchy, in base all (3), se γ è una opportuna circonferenza di centro ξ'', si ha

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \xi''} (\sigma I + A(\lambda \xi'', \nu(\xi'' - \eta)))^{-1} \right\|_{X \to X} \leqslant C \int_\gamma \frac{1}{|\sigma|} \frac{d|\xi'|}{|(\xi' - \xi'')|^2} \leqslant N(\omega)/|\sigma|$$

e quindi,

$$\|R^{(1)}(\xi'', \xi'; \eta)\|_{X \to X} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\exp[\sigma(\xi'' - \xi')]| N(\omega)/|\sigma| \cdot d|\sigma| \leqslant M(\omega) .$$

Notiamo, dunque, che su ogni compatto contenuto in $\Delta \times \Xi$, il comportamento rispetto a σ di $\big(\sigma I + A(\lambda \xi'', \nu(\xi'' - \eta))\big)^{-1}$ e della sua derivata parziale rispetto a ξ'' è analogo.

Utilizzando nuovamente la formula di Cauchy, segue che

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial \eta \, \partial \xi''} (\sigma I + A(\lambda \xi'', \nu(\xi'' - \eta)))^{-1} \right\|_{X \to X} \leqslant N'(\omega)/|\sigma| ,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \eta} R^{(1)}(\xi'', \xi'; \eta) \right\|_{X \to X} \leqslant M'(\omega) .$$

Si ha poi, in base alla definizione stessa di $R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta)$,

$$\|R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta)\|_{X \to X} \leqslant M^m(\omega) |\xi'' - \xi'|^{m-1}/(m-1)!$$

e, analogamente,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \eta} R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta \right\|_{X \to X} \leqslant M_1(\omega) \frac{[2M_1(\omega)(1 + |\xi'' - \xi'|)]^{m-1}}{(m-1)!} ,$$

$M_1(\omega)$ opportuna costante.

Così, dalla olomorfia di $R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta)$, $(\partial/\partial\eta) R^{(m)}(\xi'', \xi'; \eta)$ nelle variabili ξ', ξ'', η e dalle maggiorazioni sopra ottenute, segue che $R(\xi'', \xi'; \eta)$ e $(\partial/\partial\eta) R(\xi'', \xi'; \eta)$ sono olomorfe in tali variabili.

Concludiamo allora che la u definita da

$$u(t,\tau)=U\left(\frac{t}{\lambda},0;\frac{t}{\lambda}-\frac{\tau}{\nu}\right)f\left(\tau-\frac{\nu}{\lambda}t\right)$$

è una effettiva soluzione stretta del problema (4).

Infatti, avendo provato la olomorfia di $U(\xi'',\xi';\eta)$ nella η, è lecito derivare u rispetto a t e a τ ed è facile riconoscere che u soddisfa l'equazione di (4).

Inoltre,

$$u(0,\tau)=U\left(0,0;-\frac{\tau}{\nu}\right)f(\tau)=f(\tau)\,.$$

Infine, u è l'unica soluzione stretta, in quanto, sotto le condizioni date, il problema (7) ha una e una sola soluzione stretta.

La seconda affermazione viene provata in modo analogo.

Infatti, ci si riduce a studiare il problema

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} dw_\eta(\xi)/d\xi=-A\big(\lambda\xi,\nu(\xi-\eta)\big)\,w_\eta(\xi)+g_\eta(\xi)\,, & \xi\in\Delta'\,,\ \xi\neq 0\,,\\ w_\eta(0)=f(-\nu\eta)\,, \end{cases}$$

dove si è posto $g_\eta(\xi)=g\big(\lambda\xi,\nu(\xi-\eta)\big)$.

Per la condizione su g, (8) ha una e una sola soluzione stretta (cfr. [10], p. 2), definita da

$$w_\eta(\xi)=U(\xi,0;\eta)f(-\nu\eta)+\int_0^\xi U(\xi,\xi';\eta)\,g_\eta(\xi')\,d\xi'\,.$$

Per concludere la prova, basta mostrare che il secondo addendo è analitico in η.

D'altra parte, $\eta\to U(\xi,\xi';\eta)$ è analitica e, poichè

$$\eta\to g\big(\lambda\xi',\nu(\xi'-\eta)\big)$$

è analitica, anche (cfr. [1], p. 124)

$$\eta\to\int_0^\xi U(\xi,\xi';\eta)\,g_\eta(\xi')\,d\xi'$$

è analitica.

LEMMA 1. *Siano* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *sottoinsiemi aperti limitati di* $\mathbf{C}$, *con* $\overline{\mathcal{A}} \subset \{z \in \mathbf{C} | \operatorname{Re} z > 0, |\arg z| < \phi\}$, $0 < \phi < \pi/2$.

Sia $\{A(t, \tau)\}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi in* X *che soddisfa le condizioni della Proposizione* 1 *su* $\Delta \times \Xi_1$, *dove* Ξ_1 *è un aperto contenente*

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, z = \tau' - \frac{\nu}{\lambda}(t - t'),\ t, t' \in \Delta,\ \tau' \in \Omega,\ \lambda \in \overline{\mathcal{A}},\ \nu \in \overline{\mathcal{B}} \right\}.$$

Se f *è olomorfa da un aperto contenente*

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, z = \tau' - \frac{\nu}{\lambda} t,\ t \in \Delta,\ \tau' \in \Omega,\ \lambda \in \overline{\mathcal{A}},\ \nu \in \overline{\mathcal{B}} \right\}$$

a X *e* g *è olomorfa da* $\Delta \times \Xi_1$ *a* X, *allora la funzione* $u = u(t, \tau; \lambda, \nu)$, *soluzione stretta del problema*

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial}{\partial t} u + \nu \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -A(t, \tau) u + g(t, \tau)\,, & (t, \tau) \in]0, T] \times \Omega\,, \\ u(0, \tau) = f(\tau)\,, \quad \tau \in \Omega\,, \end{cases}$$

è olomorfa in $\lambda \in \mathcal{A}$, $\nu \in \mathcal{B}$.

DIMOSTRAZIONE. È contenuta nella prova della Proposizione 1 una volta che si è sostituito l'insieme Δ' con l'insieme

$$\bigcap_{\lambda \in \overline{\mathcal{A}}} \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, z = \frac{t}{\lambda},\ t \in \Delta \right\}.$$

TEOREMA 1. *Valgano su* $A(t, \tau)$ *le ipotesi del Lemma* 1.

Se B_0, B_1 *sono operatori lineari continui da* X *a* $X (B_i \in L(X))$ *tali che* $\sigma_{B_0} \subset \mathcal{A}$, $\sigma_{B_1} \subset \mathcal{B}$ (σ_{B_i} *denota lo spettro dell'operatore* B_i), $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *avendo frontiera* Γ_0, Γ_1, *rispettivamente*, Γ_i *curva regolare semplice chiusa oppure unione di un numero finito di tali curve* $(i = 0, 1)$, *e*, ϱ_{B_i} *essendo l'insieme risolvente di* B_i,

$$\lambda \in \varrho_{B_0},\ \nu \in \varrho_{B_1} \Rightarrow (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} = (\nu - B_1)^{-1}(\lambda - B_0)^{-1}\,,$$

$$\sigma \in \varrho_{B_i},\ x \in D_{A(t,\tau)} \Rightarrow (\sigma - B_i)^{-1} A(t, \tau) x = A(t, \tau)(\sigma - B_i)^{-1} x\,, \quad (i = 0, 1),$$

allora la u definita da

$$u(t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu$$

è soluzione stretta del problema (1).

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \overline{\mathcal{A}}$, $\nu \in \overline{\mathcal{B}}$. In virtù della Proposizione 1, esiste una e una sola soluzione stretta $u(t, \tau; \lambda, \nu)$ del problema (5). Essa è data da

$$u(t, \tau; \lambda, \nu) = U\left(\frac{t}{\lambda}, 0; \frac{t}{\lambda} - \frac{\tau}{\nu}\right) f\left(\tau - \frac{\nu}{\lambda} t\right) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t U\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda}; \frac{t}{\lambda} - \frac{\tau}{\nu}\right) \cdot$$

$$\cdot g\left(t', \tau - \frac{\nu}{\lambda}(t - t')\right) dt' .$$

Notiamo che, poichè

$$R^{(1)}\left(\xi'', \xi'; \frac{t}{\lambda} - \frac{\tau}{\nu}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \exp\left[\sigma(\xi'' - \xi')\right] \frac{\partial}{\partial \xi''} \cdot$$

$$\cdot \left(\sigma I + A\left(\lambda\xi'', \tau + \nu\left(\xi'' - \frac{t}{\lambda}\right)\right)\right)^{-1} d\sigma ,$$

se $0 \in \overline{\mathcal{B}}$, $u(t, \tau; \lambda, 0)$ risulta ben definita.

Inoltre, per il Lemma 1, se $t \in]0, T]$, $\tau \in \Omega$, la applicazione

$$(\lambda, \nu) \to u(t, \tau; \lambda, \nu)$$

è olomorfa su $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Ciò assicura che l'espressione

$$u(t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, dA\, d\nu$$

ha senso. Proviamo che essa è soluzione stretta di (1).

Osserviamo intanto che

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} u(0, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\int_{\Gamma_0} (\lambda - B_0)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\Gamma_1} (\nu - B_1)^{-1} f(\tau)\, d\nu\right) d\lambda = f(\tau)\,,$$

(cfr. [6], p. 104; [14], pp. 168-169).

Inoltre, per le ipotesi di regolarità su f e g, si può derivare rispetto a t e a τ sotto il segno di integrale.

Quindi, si ha

$$B_0 \frac{\partial}{\partial t} u(t, \tau) + B_1 \frac{\partial}{\partial \tau} u(t, \tau) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} B_0(\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_0)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu +\right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} B_1(\lambda - B_1)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu = (0)\,.\right.$$

Ma $B_i(\sigma - B_i)^{-1} = \sigma(\sigma - B_i)^{-1} - I$, $(i = 0, 1)$, $\sigma = \lambda$ oppure $\sigma = \nu$. Allora, in base alle ipotesi,

$$(0) = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} A(t, \tau) u(t, \tau; \lambda,, \nu)\, d\lambda\, d\nu - \right.$$

$$- \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} g(t, \tau)\, d\lambda\, d\nu +$$

$$\left. + \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\nu - B_1)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu + \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu \right].$$

Ricordiamo che $(\partial/\partial t)\, u(t, \tau; \lambda, \nu)$ e $(\partial/\partial \tau)\, u(t, \tau; \lambda, \nu)$ sono olomorfe in t, τ, λ, ν, essendo olomorfa la funzione $u(t, \tau; \lambda, \nu)$.

D'altra parte,

$$\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1}(\nu-B_1)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\lambda\,d\nu=\int_{\Gamma_1}(\nu-B_1)^{-1}\left(\int_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial t}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\lambda\right)d\nu\;;$$

$$\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1}(\lambda-B_0)^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\lambda\,d\nu=\int_{\Gamma_0}(\lambda-B_0)^{-1}\left(\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\tau}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\nu\right)d\lambda\,.$$

Poichè

$$\int_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial t}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\lambda=\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\tau}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\nu=0\,,$$

si ha, sfruttando la commutatività di $A(t,\tau)$ con $(\sigma-B_i)^{-1}$, $(i=0,1)$,

$$B_0\frac{\partial}{\partial t}u(t,\tau)+B_1\frac{\partial}{\partial\tau}u(t,\tau)=-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2A(t,\tau)\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_1}(\lambda-B_0)^{-1}(\nu-B_1)^{-1}\cdot$$

$$\cdot u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\lambda\,d\nu+g(t,\tau)=-A(t,\tau)u(t,\tau)+g(t,\tau)\,.$$

Ciò conclude la prova.

OSSERVAZIONE. *Supponiamo che $\{A(t,\tau)\}$ soddisfi le condizioni della Proposizione* 1 *su $\Delta\times\Xi''$ dove Ξ'' è un aperto contenente*

$$\{z\in\mathbb{C}|z=\sigma-\nu(t-t'),\,t,t'\in\Delta,\,\delta\in\Omega,\,\nu\in\mathfrak{B}\}\,,$$

che f sia olomorfa da un aperto Θ contenente $\{z\in\mathbb{C}|z=\sigma-\nu t,\,t\in\Delta,\,\sigma\in\Omega,\,\nu\in\mathfrak{B}\}$ a X, e che g sia olomorfa da $\Delta\times\Xi''$ a X.

Allora la funzione u definita da

$$u(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\nu-B_1)^{-1}u(t,\tau;\lambda,\nu)\,d\nu\,,$$

(B_1 soddisfacente le condizioni del Teorema 1*), è soluzione stretta del*

problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u + B_1 \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -A(t,\tau)u + g(t,\tau) , & (t,\tau) \in]0, T] \times \Omega , \\ u(0,\tau) = f(\tau) , \quad \tau \in \Omega . \end{cases}$$

Dimostriamo questa affermazione.

Poichè Θ e Ξ'' sono aperti di $\mathbb{C}$, se $t \in \Delta$ e $\tau \in \Omega$ sono fissati, si può trovare un ε positivo tale che $|\lambda - 1| < \varepsilon$ implica che

$$\tau - \frac{\nu}{\lambda} t \in \Theta , \qquad \tau - \frac{\nu}{\lambda}(t - t') \in \Xi'' , \qquad \forall t' \in \Delta , \qquad |\arg(t - t')| < \phi .$$

Sia $\Gamma_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda - 1| = \varepsilon\}$ e sia $\mathcal{A}_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda - 1| < \varepsilon\}$.

Si può senz'altro supporre che $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0, \, |\arg z| < \phi\}$.

Allora, per quanto si è visto, ha senso $u(t, \tau; \lambda, \nu)$, $\lambda \in \overline{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\nu \in \overline{\mathcal{B}}$.

Inoltre, $(\lambda, \nu) \to u(t, \tau; \lambda, \nu)$ è olomorfa.

Per il Teorema di Cauchy si ha, inoltre,

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \int_{\Gamma_1} (\lambda - I)^{-1} (\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu) \, d\lambda \, d\nu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\nu - B_1)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} (\lambda - I)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu) \, d\lambda \right) d\nu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; 1, \nu) \, d\nu .$$

L'affermazione risulta quindi provata, in quanto, per la olomorfia di $u(t, \tau; \lambda, \nu)$ in (λ, ν) vale

$$\int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_1} (\lambda - I)^{-1} (\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu) \, d\lambda \, d\nu =$$

$$= \int_{\Gamma_\varepsilon} \int_{\Gamma_1} (\lambda - I)^{-1} (\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu) \, d\lambda \, d\nu .$$

Veniamo ora a considerare il caso in cui l'operatore $A(t, \tau)$ non dipende dalle variabili t e τ.

Prima di tutto, possiamo allora estendere il risultato del Teorema 1 a operatori di tipo (ϕ, M, β) (cfr. [2], [8]), anche nell'ipotesi che sia $T = +\infty$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $0 < T < +\infty$ *e sia* A *di tipo* (ϕ, M, β), $\beta \in R$. *Se* $B_0, B_1 \in L(X)$ *soddisfano*

1) $\lambda \in \varrho_{B_0}, \nu \in \varrho_{B_1} \Rightarrow (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} = (\nu - B_1)^{-1}(\lambda - B_0)^{-1}$;

2) $u \in D_A, \mu \in \varrho_{B_i} \Rightarrow (\mu - B_i)^{-1} A u = A(\mu - B_i)^{-1} u, \qquad (i = 0, 1)$;

3) $\sigma_{B_0} \subset \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\, z > 0, |\arg z| < \phi\}$, $\mathcal{A}$ *aperto limitato*;

4) $\sigma_{B_1} \subset \mathcal{B}$, *dove* $\mathcal{B}$ *è un aperto limitato e* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *hanno come frontiera* Γ_0, Γ_1, *rispettivamente, curve regolari,* (cfr. *il Teorema* 1),

allora, se f *è olomorfa da un aperto di* $\mathbb{C}$ *contenente*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z = \tau - \frac{\nu}{\lambda} t,\ t \in [0, T[,\ \tau \in \Omega,\ \lambda \in \overline{\mathcal{A}},\ \nu \in \overline{\mathcal{B}} \right\}$$

a X, *la funzione* u, *definita da*

$$u(t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_1} (\lambda - B_0)^{-1} (\nu - B_1)^{-1} \exp\left[-\frac{t}{\lambda} A\right] f\left(\tau - \frac{\nu}{\lambda} t\right) d\lambda\, d\nu ,$$

è soluzione stretta del problema

$$\begin{cases} B_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} + B_1 \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au , & t \in]0, T[,\ \tau \in \Omega , \\ u(0, \tau) = f(\tau) , \quad \tau \in \Omega . \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\lambda \in \overline{\mathcal{A}}, \nu \in \overline{\mathcal{B}}$. Allora il problema differenziale

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial}{\partial t} u + \nu \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au , & (t, \tau) \in]0, T] \times \Omega , \\ u(0, \tau) = f(\tau) , \quad \tau \in \Omega , \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione stretta, data da

$$u(t, \tau; \lambda, \nu) = \exp\left[-\frac{t}{\lambda} A\right] f\left(\tau - \frac{\nu}{\lambda} t\right) .$$

Tale affermazione si dimostra ricorrendo al cambiamento di variabili $\xi = t/\lambda$, $\eta = t/\lambda - \tau/\nu$ e sfruttando le proprietà degli operatori di tipo (ϕ, M, β) (cfr. [8], pp. 488-490).

Infine, la prova che la u sopra definita è soluzione stretta del problema posto è come quella del Teorema 1.

TEOREMA 2. *Sia* $0 < T \leqslant +\infty$ *e sia* A *di tipo* (ϕ, M, β), $\beta \in \mathbb{R}$. *Supponiamo che* B *sia un operatore lineare chiuso in* X *con dominio* D_B *denso in* X, *continuo da* D_B *in sè,* D_B *essendo munito della norma*

$$\|x\|_{D_B} = \|x\|_X + \|Bx\|_X ,$$

che ne fa uno spazio di Banach. Se

1) $u \in D_B$, $\sigma \in \varrho_{-A} \Rightarrow (\sigma + A)^{-1}Bu = B(\sigma + A)^{-1}u$;

2) *La applicazione* $z \to f(z)$ *è continua da un aperto* Ω_1 *contenente* $\{z \in \mathbb{C} | z = \tau - \nu t, t \in [0, T[, \tau \in \Omega, \nu \in \mathcal{B}\}$ *a* D_B, *olomorfa da* Ω_1 *a* X, $\mathcal{B}$ *essendo un aperto limitato di* $\mathbb{C}$ *tale che* σ_B (*considerando* $B \in L(D_B)) \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$,

allora esiste una funzione u, *definita su* $[0, T[\times \Omega$, *soluzione stretta del problema differenziale*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + B \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au , \qquad t \in]0, T[, \ \tau \in \Omega , \\ u(0, \tau) = f((\tau) , \qquad \tau \in \Omega , \end{array} \right. \tag{9}$$

in D_B *e, quindi, in* X.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\nu \in \overline{\mathcal{B}}$. Osserviamo che dalla ipotesi 2) segue che l'applicazione $z \to f(z)$, per il teorema di Cauchy, risulta olomorfa da Ω_1 e D_B (cfr. [4], p. 39).

Consideriamo, allora,

$$u(t, \tau; \nu) = \exp[-tA] f(\tau - \nu t) , \qquad (t, \tau) \in [0, T[\times \Omega , \qquad \nu \in \overline{\mathcal{B}} .$$

Essa è olomorfa in ν da $\mathcal{B}$ a X, ma lo è anche da $\mathcal{B}$ a D_B.

Per provare ciò, mostriamo che $u(t, \tau; \nu) \in D_B$ e, poi, che $\nu \to u(t, \tau; \nu)$ è continua da $\mathcal{B}$ a D_B.

Per la 1) e la 2), vale

$$B \exp[-tA] f(\tau - \nu t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp[\sigma t](\sigma + A)^{-1} B f(\tau - \nu t)\, d\sigma =$$
$$= \exp[-tA] B f(\tau - \nu t)\,,$$

e quindi $u(t, \tau; \nu) \in D_B$. Poi

$$\|\exp[-tA] f(\tau - \nu t) - \exp[-tA] f(\tau - \nu' t)\|_{D_B} \leqslant$$
$$\leqslant C \exp[\beta t]\big(\|f(\tau - \nu t) - f(\tau - \nu' t)\|_X + \|B[f(\tau - \nu t) - f(\tau - \nu' t)]\|_X\big) =$$
$$= C \exp[\beta t] \|f(\tau - \nu t) - f(\tau - \nu' t)\|_{D_B}\,.$$

Pertanto, ancora per il risultato sopra richiamato,

$$\nu \to u(t, \tau; \nu)$$

è olomorfa da $\mathcal{B}$ a X.

Sia Γ_1 la curva regolare semplice chiusa o unione di un numero finito di tali curve, tale che $\Gamma_1 = \partial\mathcal{B}$.

Poichè $B \in L(D_B)$ ha senso l'integrale in D_B

$$u(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \exp[-tA](\nu - B)^{-1} f(\tau - \nu t)\, d\nu\,.$$

Notiamo che in D_B valgono

$$(\circ) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \exp[-tA] f(\tau - \nu t) = -A \exp[-tA] f(\tau - \nu t) -$$
$$- \nu \exp[-tA] f'(\tau - \nu t)\,, \qquad t \neq 0\,, \quad |\arg t| < \phi\,;$$

$$(\circ\circ) \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} \exp[-[tA] f(\tau - \nu t) = \exp[-tA] f'(\tau - \nu t)\,.$$

Le (∗), (∗∗) sono valide chiaramente in X.

Ora,

$$B\left(\frac{\exp[-tA] f(\tau - \nu t) - \exp[-t'A] f(\tau - \nu t')}{t - t'}\right) =$$
$$= \frac{\exp[-tA] - \exp[t'A]}{t - t'} B f(\tau - \nu t) + \exp[-t'A] \cdot$$
$$\cdot \frac{Bf(\tau - \nu t) - Bf(\tau - \nu t')}{t - t'} \xrightarrow[t' \to t]{X} -A \exp[-tA] B f(\tau - \nu t) -$$
$$- \nu \exp[-tA] B f'(\tau - \nu t)\,.$$

Perciò $(\exp[-tA]f(\tau-\nu t)-\exp[-t'A]f(\tau-\nu t'))/(t-t')$ converge in D_B per $t'\to t$.

A causa dell'unicità del limite, il limite in X deve coincidere col limite in D_B. Perciò

$$\nu B\exp[-tA]f'(\tau-\nu t)+BA\exp[-tA]f(\tau-\nu t)=$$
$$=A\exp[-tA]Bf(\tau-\nu t)+\nu\exp[-tA]Bf'(\tau-\nu t])$$

e quindi

$$BA\exp[-tA]f(\tau-\nu t)=A\exp[-tA]Bf(\tau-\nu t)\,.$$

Così, la $(*)$ è provata. Nello stesso modo si prova la $(**)$.

Vale, quindi, nella topologia di D_B, poichè

$$B\exp[-tA]u=\exp[-tA]Bu\,,\qquad u\in D_B\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\tau)+B\frac{\partial}{\partial\tau}u(t,\tau)=-Au(t,\tau)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\exp\,[-tA]\int_{\Gamma_1}(\nu-B)^{-1}\nu f'(\tau-\nu t)\,d\nu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\exp[-tA]\int_{\Gamma_1}(\nu-B)^{-1}\nu f'(\tau-\nu t)\,d\nu-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\exp[-tA]f'(\tau-\nu t)\,d\nu=-Au(t,\tau)\,.$$

In [17], K. Yosida ha esposto una teoria dei semigruppi olomorfi in certi spazi localmente convessi.

Ciò consente di stabilire il seguente

Teorema 3. *Sia $0<T\leqslant+\infty$ e sia B un operatore lineare chiuso in X, a dominio denso, continuo da D_B in sè, dove D_B può essere munito da un qualunque topologia che lo renda uno spazio localmente convesso e sequenzialmente completo.*

Sia poi $-A$ un operatore lineare chiuso in D_B, generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfo in D_B. Se

$$\mu\in\varrho_B,\ \nu\in\varrho_{-A},\ x\in D_B\Rightarrow(\mu-B)^{-1}(\nu+A)^{-1}x=(\nu+A)^{-1}(\mu-B)^{-1}x$$

e f è una applicazione continua da un aperto Ω_1 contenente $\{z\in\mathbf{C}|z=\tau-\nu t, t\in[0,T[, \tau\in\Omega, \nu\in\overline{\mathfrak{B}}\}$ a D_B, olomorfa da Ω_1 a X, con $\mathfrak{B}$ aperto limitato in $\mathbf{C}$ tale che $\sigma_B\subset\mathfrak{B}\subset\overline{\mathfrak{B}}$ allora il problema (9) *ha una soluzione stretta in D_B e, quindi, in X.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\nu\in\overline{\mathfrak{B}}$ e $\Gamma_1=\partial\mathfrak{B}$.
La funzione

$$u(t,\tau;\nu)=\exp[-tA]f(\tau-\nu t)$$

risulta ben definita e ha senso porre

$$u(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\nu-B)^{-1}u(t,\tau;\nu)\,d\nu\,.$$

D'altra parte, poichè $-A$ è generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfo,

$$\exp[-tA]f(\tau-\nu t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\exp[\sigma t](\sigma+A)^{-1}f(\tau-\nu t)\,d\sigma$$

e, per l'ipotesi sui risolventi di $-A$ e di B, vale

$$u(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\exp[-tA](\nu-B)^{-1}f(\tau-\nu t)\,d\nu\,.$$

La prova che u è la soluzione cercata è come quella del Teorema 1.

OSSERVAZIONE. Sotto ovvie ipotesi, si può trattare il problema non omogeneo.

TEOREMA 4. *Siano $\lambda,\nu>0$, φ sia una funzione strettamente decrescente da $R^+\cup\{0\}$ a $\mathbb{R}$, di classe $C^{(1)}$, f sia di classe $C^{(1)}(\mathbb{R}^+\cup\{0\};X)$.*
Se A è di tipo (ϕ,M,β), $\beta\in\mathbb{R}$, allora il problema

$$(10)\qquad \begin{cases}\lambda\dfrac{\partial}{\partial t}u+\nu\dfrac{\partial}{\partial\tau}u=-Au\,, & t\in]0,T[\,,\ \tau>\varphi(t)\,,\\ u(t,\varphi(t))=f(t)\,, & t\in[0,T[\,,\end{cases}$$

ha una e una sola soluzione stretta, per ogni $T \in]0, +\infty]$ (*cfr.* [16] *nel caso in cui* $-A$ *è l'operatore differenziale* $\partial^2/\partial x^2$).

Inoltre, se g *è una funzione da* $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times \mathbb{R}$ *a* X *tale che*

$$\|g(t, \tau) - g(t', \tau)\|_X \leqslant C(\tau)|t - t'|\,,$$

dove $C(\tau)$ *è continua, ed esiste continua su* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *la* $(\partial/\partial\tau)g$ *allora esiste una unica soluzione stretta del problema non omogeneo*

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{\partial}{\partial t} u + \nu \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au + g\,, & t \in]0, T[\,,\ \tau > \varphi(t)\,, \\ u(t, \varphi(t)) = f(t)\,, & t \in [0, T[\,, \end{cases}$$

per ogni $T \in]0, +\infty]$.

Dimostrazione. Attraverso il cambiamento di variabili $\xi = t/\lambda$, $\eta = t/\lambda - \tau/\nu$, il problema (10) si riduce al seguente

$$\begin{cases} \partial w(\xi, \eta)/\partial\xi = -Aw(\xi, \eta)\,, & \xi > \psi^{-1}(\eta)\,,\ \eta \in \left[-\varphi(0)/\nu\,, \dfrac{T}{\lambda} - \varphi(T)/\nu\right[\,, \\ w(\psi^{-1}(\eta), \eta) = f(\lambda\psi^{-1}(\eta))\,, & \eta \in \left[-\varphi(0)/\nu, \dfrac{T}{\lambda} - \varphi(T)/\nu\right[\,, \end{cases}$$

dove si è posto $\psi(\xi) = \xi - \varphi(\lambda\xi)/\nu$, $\xi \in [0, T/\lambda[$.

Notiamo che ψ è strettamente crescente, di classe $C^{(1)}$ su $[0, T/\lambda[$ e, quindi, anche ψ^{-1} è di classe $C^{(1)}$ su

$$\left[-\varphi(0)/\nu, \frac{T}{\lambda} - \varphi(T)/\nu\right[\,.$$

Fissato $\eta \in [-\varphi(0)/\nu, T/\lambda - \varphi(T)/\nu[$, consideriamo il problema

$$(12)\qquad \begin{cases} dw_\eta(\xi)/d\xi = -Aw_\eta(\xi)\,, & \xi > \psi^{-1}(\eta)\,, \\ w_\eta(\psi^{-1}(\eta)) = f(\lambda\psi^{-1}(\eta))\,. \end{cases}$$

Poichè A è di tipo $(\phi, M, \beta]$, (12) ha una unica soluzione stretta,

$$w_\eta(\xi) = \exp\left[-\xi - \psi^{-1}(\eta))A\right] f(\lambda\psi^{-1}(\eta)))\,, \qquad \xi \geqslant \psi^{-1}(\eta)\,.$$

Allora, tornado alle variabili originali, si trova che, formalmente,

$$u(t,\tau)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}-\psi^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}-\frac{\tau}{\nu}\right)\right)A\right]f\left(\lambda\psi^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}-\frac{\tau}{\nu}\right)\right), \qquad \tau\geqslant\varphi(t)\,.$$

D'altra parte, per le proprietà di φ, è facile riconoscere che tale u è una soluzione stretta di (10).

La unicità segue dal fatto che existe una e una sola soluzione stretta di (12).

Passiamo alla seconda affermazione.

Sia $T>0$ fissato. Ricerchiamo una soluzione stretta di

$$\text{(13)}\qquad \begin{cases} dw_\eta(\xi)/d\xi=-Aw_\eta(\xi)+h_\eta(\xi)\,, & \psi^{-1}(\eta)<\xi<T/\lambda\,,\\ w_\eta(\psi^{-1}(\eta))=f(\lambda\psi^{-1}((\eta))\,, \end{cases}$$

dove $h_\eta(\xi)=g(\lambda\xi,\nu(\xi-\eta))$.

Siano $\xi,\xi'\in[\psi^{-1}(\eta),T/\lambda[$, $\xi'>\xi$. Allora

$$\begin{aligned}\|h_\eta(\xi)-h_\eta(\xi')\|_X&\leqslant\|g(\lambda\xi,\nu(\xi-\eta))-g(\lambda\xi',\nu(\xi-\eta))_X\|+\\ &+\|g(\lambda\xi',\nu(\xi-\eta))-g(\lambda\xi',\nu(\xi'-\eta))\|_X\leqslant C(\nu(\xi-\eta))|\lambda|\,|\xi-\xi'|+\\ &+\sup_{\delta\in[\nu(\xi-\eta),\nu(\xi'-\eta)]}\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}g(\lambda\xi',\sigma)\right\|\nu|\xi-\xi'|\leqslant C(T)|\xi-\xi'|\,.\end{aligned}$$

Allora (cfr. [8], p. 491), la w_η data da

$$w_\eta(\xi)=\exp\left[-\left(\xi-\psi^{-1}(\eta)\right)A\right]f(\lambda\psi^{-1}(\eta))+\int_{\psi^{-1}(\eta)}^{\xi}\exp\left[-(\xi-s)A\right]h_\eta(s)\,ds\,,$$

è l'unica funzione continua per $\xi\geqslant\psi^{-1}(\eta)$, derivabile con continuità per $\xi>\psi^{-1}(\eta)$, soddisfacente (13).

Poichè, per le ipotesi su φ e per il risultato sulla derivabilità sotto il segno di integrale che si trova in [1], p. 129, esiste continua la

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\int_{\varphi^{-1}(\eta)}^{\xi}\exp\left[-(\xi-s)A\right]g(\lambda s,\nu(s-\eta))\,ds\right),$$

la funzione u che si ottiene da $w_\eta(\xi)$ ritornando alle variabili t e τ, è la soluzione stretta di (11).

Osservazione. Con un ragionamento simile al precedente, si può provare che esiste una soluzione stretta unica dei problemi (10), (11) se si suppone $\lambda > 0$, $\nu < 0$, φ strettamente crescente.

Teorema 5. *Siano α, β funzioni a valori reali, di classe $C^{(1)}$ su un aperto Θ di $\mathbb{R}^2$ contenente $[0, T]\times[a, b]$, $T < +\infty$.*

Inoltre, sia $\alpha(0, \tau) > 0$ per ogni $\tau \in [a, b]$.

Se A è di tipo (ϕ, M, β), $\beta \in \mathbb{R}$ e f è di classe $C^{(1)}$ da $\mathbb{R}$ a X, allora il problema

$$\begin{cases} \alpha(t, \tau)\dfrac{\partial}{\partial t}u(t, \tau) + \beta(t, \tau)\dfrac{\partial}{\partial \tau}u(t, \tau) = -Au(t, \tau)\,, \\ u(0, \tau) = f(\tau)\,, \qquad \tau \in [a, b]\,, \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione stretta in un intorno dell'insieme

$$\omega = \{(0, \tau) \in \mathbb{R}^2 | \tau \in [a, b]\}\,.$$

(*Nel caso che $-A$ sia l'operatore $\partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$, cfr.* [15]).

Dimostrazione. Poichè $\alpha(0, \tau) \neq 0$, $\tau \in [a, b]$, esiste una e una sola funzione $s = \varphi(t, \tau)$, definita in un intorno ω_1 di ω e ivi di classe $C^{(1)}$, che soddisfa

$$\begin{cases} \alpha(t, \tau)\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \tau) + \beta(t, \tau)\dfrac{\partial}{\partial \tau}\varphi(t, \tau) = 1 \\ \varphi(0, \tau) = 1\,, \qquad \tau \in [a, b]\,. \end{cases}$$

Analogamente, esiste una e una sola funzione $\varrho = \psi(t, \tau)$, definita e di classe $C^{(1)}$ su un intorno ω_2 di ω, soddisfacente

$$\begin{cases} \alpha(t, \tau)\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t, \tau) + \beta(t, \tau)\dfrac{\partial}{\partial \tau}\psi(t, \tau) = 0\,, \\ \psi(0, \tau) = \tau\,, \qquad \tau \in [a, b]\,. \end{cases}$$

La correttezza di tale affermazione segue dal risultato di [7], p. 11.

Sia $\omega_0 = \omega_1 \cap \omega_2$. Poniamo

$$\begin{cases} f_1(s, \varrho; t, \tau) = \varphi(t, \tau) - s, \\ f_2(s, \varrho; t, \tau) = \psi(t, \tau) - \varrho, \qquad (t, \tau) \in \omega_0. \end{cases}$$

Si verifica che

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} f_1(s, \varrho; 0, \tau) & \frac{\partial}{\partial \tau} f_1(s, \varrho; 0, \tau) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_2(s, \varrho; 0, \tau) & \frac{\partial}{\partial \tau} f_2(s, \varrho; 0, \tau) \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha(0, \tau)} \neq 0.$$

Poichè, inoltre,

$$f_1(1, \tau; 0, \tau) = 0, \quad f_2(1, \tau; 0, \tau) = 0, \qquad \forall \tau \in [a, b],$$

esiste (cfr. [5], p. 23) un intorno di $\omega' = \{(1, \varrho) \in \mathbb{R}^2 | \varrho \in [a, b]\}$, che denotiamo con ω'', e due funzioni di classe $C^{(1)}$ su ω'':

$$t = t(s, \varrho), \qquad \tau = \tau(s, \varrho),$$

tali che

$$f_1(s, \varrho; t(s, \varrho), \tau(s, \varrho)) = 0, \qquad f_2((s, \varrho; t(s, \varrho), \tau(s, \varrho)) = 0, \qquad (s, \varrho) \in \omega'',$$

e

$$t(1, \tau) = 0, \qquad \tau(1, \tau) = \tau, \qquad \tau \in [a, b].$$

Ne segue che, in un intorno di ω', t e τ possono esprimersi come funzioni (di classe $C^{(1)}$) di s e di ϱ. Ma ciò significa che, in tale intorno, le soluzioni s e ϱ dei problemi differenziali inizialmente considerati, sono invertibili.

Notiamo, inoltre, che dalla condizione $\alpha(0, \tau) > 0$ per ogni $\tau \in [a, b]$ segue che la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial t} s(t, \tau)$$

è positiva per $t = 0$. Quindi, s è crescente in $t = 0$, τ fissato.

Poichè s è di classe $C^{(1)}$ e $s(0, \tau) = 1$ vale $s(t, \tau) \geqslant 1$ se $0 < t < t_0(\tau)$, $t_0(\tau)$ opportuno reale positivo.

Poniamo

$$u(t, \tau) = u(t(s, \varrho), \tau(s, \varrho)) = v(s, \varrho) ,$$

con (s, ϱ) nell'intorno di ω' in cui valgono la invertibilità di s, ϱ ed è $s \geqslant 1$.

Si verifica allora facilmente che

$$\alpha(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} u(t, \tau) + \beta(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial s} v(s, \varrho) = -Av(s, \varrho)$$

e

$$u(0, \tau) = u(t(1, \tau), \tau(1, \tau)) = v(1, \tau) .$$

Consideriamo, quindi, il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} v(s. \varrho) = -Av(s, \varrho) , \\ v(1, \varrho) = f(\varrho) . \end{cases}$$

Esso ha l'unica soluzione stretta

$$v(s, \varrho) = \exp\,[-(s-1)A] f(\varrho)$$

e, così,

$$u(t, \tau) = \exp\,[-(\varphi(t, \tau) - 1)A] f(\psi(t, \tau)) .$$

DEFINIZIONE 2. *Sia $0 < T \leqslant +\infty$. Una funzione $u = u(t, \tau)$, $t, \tau \in [0, T[$, si dice soluzione stretta del problema*

$$(14) \qquad \begin{cases} B_0 \dfrac{\partial}{\partial t} u + B_1 \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au , & t. \tau \in]0, T[, \\ u(t, 0) = f(t) , & t \in [0, T[, \\ u(0, \tau) = g(\tau) , & \tau \in [0, T[, \end{cases}$$

dove A, B_0, B_1 sono operatori lineari in X, f e g sono funzioni continue da $[0, T[$ a X, se u risulta fortemente continua su $[0, T[\times[0, T[$, dotata di derivate parziali prime continue su $]0, T[\times]0, T[$, $u(t, \tau) \in D_A$ per $(t, \tau) \in]0, T[\times]0, T[$ e vale (14).

È chiaro che, senza ulteriori ipotesi su $A, B_0, B_1, f, g,$ il problema sopra introdotto non ammette soluzioni strette.

Proviamo, intanto, la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Siano* $\lambda, \nu > 0$, A *di tipo*

$$(\phi, M, \beta)\,, \qquad \beta \in \mathbb{R}\,,$$

$$f, g \in C^{(1)}([0, T[; X)\,, \qquad f(0) = g(0)\,.$$

Allora esiste una e una sola funzione $u = u(t, \tau)$ *fortemente continua su* $C = \{(t, \tau) \in [0, T[\times[0, T[\}$, *avente derivate parziali continue su* $C_1 = \{(t, \tau) \in C | \nu t - \lambda \tau \neq 0\}$, $u(t, \tau) \in D_A$ *per* $(t, \tau) \in C_1$ *e che soddisfa*

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial}{\partial t} u + \nu \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au\,, & (t, \tau) \in C_1\,, \\ u(t, 0) = f(t)\,, \quad u(0, \tau) = g(\tau)\,, & (t, \tau) \in C\,. \end{cases}$$

Nel caso che $f(0) \in D_A$ *e*

(15) $$\lambda f'(0) + Ag(0) + \nu g'(0) = 0\,,$$

allora la u *sopra determinata è soluzione stretta del problema.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $T < +\infty$. Un analogo procedimento di prova è valido nel caso di $T = +\infty$.

Sia $\xi = t/\lambda$, $\eta = t/\lambda - \tau/\nu$, $u(t, \tau) = \omega(\xi, \eta)$.

Poichè η è continua sull'intervallo $[0, T[\times[0, T[$, il suo codominio è un intervallo, che si riconosce facilmente essere $]-T/\nu, T/\nu[$.

D'altra parte, per definizione, è $\eta \leqslant \xi$.

Quindi, se

$$D = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \left| 0 \leqslant \xi < \frac{T}{\lambda}\,, \; -\frac{T}{\nu} < \eta < \frac{T}{\nu}, \eta \leqslant \xi \right.\right\},$$

$$D_1 = \{(\xi, \eta) \in D | \eta \neq 0, \xi \neq 0, \xi \neq \eta\}\,,$$

il problema dato si riduce al problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} w(\xi, \eta) = -Aw(\xi, \eta)\,, & (\xi, \eta) \in D_1\,, \\ w(\eta, \eta) = f(\lambda\eta)\,, & 0 \leqslant \eta < \dfrac{T}{\lambda}\,, \\ w(0, \eta) = g(-\nu\eta)\,, & -\dfrac{T}{\nu} < \eta \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Sia $0 \leqslant \eta < T/\lambda$. Per l'ipotesi su A e su f, la funzione w_1 definita da

$$w_1(\xi, \eta) = \exp[-(\xi - \eta)A]f(\lambda\eta) ,$$

è l'unica soluzione stretta del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} w(\xi, \eta) = -Aw(\xi, \eta) , & (\xi, \eta) \in D_1 , \ \eta > 0 , \\ w(\eta, \eta) = f(\lambda\eta) , & 0 \leqslant \eta < \dfrac{T}{\lambda} . \end{cases}$$

Analogamente,

$$w_2(\xi, \eta) = \exp[-\xi A]g(-\nu\eta)$$

è la sola soluzione stretta del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} w(\xi, \eta) = -Aw(\xi, \eta) , & (\xi, \eta) \in D_1 , \ \eta < 0 , \\ w(0, \eta) = g(-\nu\eta) , & -\dfrac{T}{\nu} < \eta \leqslant 0 . \end{cases}$$

Ne segue che la soluzione cercata è, formalmente,

$$u(t, \tau) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\tau}{\nu}A\right] f\left(t - \dfrac{\lambda}{\nu}\tau\right) , & (t, \tau) \in [0, T[\times [0, T[, \ \nu t - \lambda\tau \geqslant 0 , \\ \exp\left[-\dfrac{t}{\lambda}A\right] g\left(\tau - \dfrac{\nu}{\lambda}t\right) , & (t, \tau) \in [0, T[\times [0, T[, \ \nu t - \lambda\tau \leqslant 0 . \end{cases}$$

Che la u sopra definita soddisfi, però, le condizioni affermate nella Proposizione 3 segue dalla regolarità assunta per f e g e dal fatto che $f(0) = g(0)$.

Passiamo alla seconda affermazione.

Siano $t, \tau \in]0, T[$ con $\nu t - \lambda\tau = 0$. Vale

$$\frac{1}{\delta t}\left[\exp\left[-\frac{\tau}{\nu}A\right] f(\delta t) - \exp\left[-\frac{\tau}{\nu}A\right] f(0)\right] \xrightarrow[\delta t \to 0+]{} \exp\left[-\frac{\tau}{\nu}A\right] f'(0) =$$

$$= \exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right] f'(0) ,$$

nella topologia di X.

$$\frac{1}{-\delta t}\left[\exp\left[-\frac{t-\delta t}{\lambda}A\right]g\left(\frac{\nu}{\lambda}\delta t\right)-\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]g(0)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\delta t}\left[\exp\left[-\frac{t-\delta t}{\lambda}A\right]-\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]\right]g\left(\frac{\nu}{\lambda}\delta t\right)+$$

$$+\frac{1}{-\delta t}\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]\left[g\left(\frac{\nu}{\lambda}\delta t\right)-g(0)\right]=[1]+[2]\,.$$

Poichè A è di tipo (ϕ, M, β) vale

$$\frac{1}{-\delta t}\left[\exp\left[-\frac{t-\delta t}{\lambda}A\right]-\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]\right]\xrightarrow[\delta t\to 0+]{}\frac{1}{\lambda}\left(-A\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]\right)$$

nella topologia uniforme d'operatore. Poichè $g(0)\in D_A$, si ha

$$[1]\xrightarrow[\delta t\to 0+]{}-\frac{1}{\lambda}A\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]g(0)=-\frac{1}{\lambda}\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]Ag(0)\,.$$

D'altra parte,

$$[2]\xrightarrow[\delta t\to 0+]{}-\frac{\nu}{\lambda}\exp\left[-\frac{t}{\lambda}A\right]g'(0)\,.$$

In base alla (15), si deduce allora che la derivata parziale destra rispetto a t e la derivata parziale sinistra rispetto a t coincidono.

Dunque, esiste la $(\partial/\partial t)u(t,\tau)$ anche sull'insieme dei $t,\tau\in]0,T[$, $\nu t-\lambda\tau=0$.

Aanalogamente, ancora per la (15), si ha che esiste continua su tale insieme la $(\partial/\partial t)\,u(t,\tau)$.

Così, u è di classe $C^{(1)}$ su $]0,T[\times]0,T[$ e, pertanto, è la soluzione stretta del problema.

OSSERVAZIONE 1. Nella ipotesi della seconda parte della Proposizione 3, se $\beta<0$ e $f, g\in L^p([0,+\infty[;X)\cap C^{(1)}([0,+\infty[;X)$, $1\leqslant p<+\infty$, allora la soluzione stretta u del problema lì considerato è un elemento di $L^p([0,+\infty[\times[0,+\infty[;X)\cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+;X)$.

Basta mostrare che $u\in L^p([0,+\infty[\times[0,+\infty[;X)$.

Sia

$$\Omega_1 = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 | t \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0,\ \nu t - \lambda\tau > 0\}\ ,$$

$$\Omega_2 = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 | t \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0,\ \nu t - \lambda\tau < 0\}\ .$$

Allora si ha

$$\iint_{\Omega_1} \left\| \exp\left[-\frac{\tau}{\nu} A\right] f\left(t - \frac{\lambda}{\nu}\tau\right)\right\|_X^p dt\, d\tau =$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{(\lambda/\nu)\tau}^{+\infty} \left\| \exp - \left[\frac{\tau}{\nu} A\right] f\left(t - \frac{\lambda}{\nu}\tau\right)\right\|_X^p dt\right) d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \left\| \exp\left[-\frac{\varrho}{\nu} A\right] f(s)\right\|_X^p ds\right) d\varrho \leqslant C\left(\int_0^{+\infty} \exp\left[\frac{\beta}{\nu}\varrho p\right] d\varrho\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \|f(s)\|_X^p\, ds = C_1 \|f\|^p_{L^p([0,+\infty[;X)}\ .$$

Nella stessa maniera si ottiene

$$\iint_{\Omega_2} \left\| \exp\left[-\frac{t}{\lambda} A\right] g\left(\tau - \frac{\nu}{\lambda} t\right)\right\|_X^p dt\, d\tau \leqslant C_2 \|g\|^p_{L^p([0,+\infty[;X)}\ .$$

Ciò prova l'asserto.

Osservazione 2. Nelle ipotesi dell'Osservazione 1, se

$$f, g \in W_p^1([0, +\infty[; X) \cap L^p([0, +\infty[; D_A)\ ,$$

allora $u \in W_p^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; X)$.

Per l'Osservazione 1, è sufficiente provare che

$$\frac{\partial}{\partial t} u \in L^p(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; X)\ , \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} u \in L^p(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; X)\ .$$

Ora,

$$\iint_{\Omega_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u(t,\tau) \right\|_X^p dt\,d\tau \leqslant C_1 \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+;X)} ,$$

$$\left(\iint_{\Omega_2} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u(t,\tau) \right\|_X^p dt\,d\tau \right)^{1/p} \leqslant \left(\iint_{\Omega_2} \left\| \exp\left[-\frac{t}{\lambda} A\right] Ag\left(\tau - \frac{\nu}{\lambda} t\right) \right\|_X^p dt\,d\tau^{1/p} \right) +$$

$$+ \left(\iint_{\Omega_2} \left\| \frac{\nu}{\lambda} \exp\left[-\frac{t}{\lambda} A\right] g'\left(\tau - \frac{\nu}{\lambda} t\right) \right\|_X^p dt\,d\tau \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_2' \left(\int_0^{+\infty} \|Ag(\varrho)\|_X^p d\varrho \right)^{1/p} + C_3' \|g'\|_{L^p(\mathbb{R}^+;X)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2' \|g\|_{L^p([0,+\infty[;D_A)} + C_3' \|g'\|_{L^p(\mathbb{R}^+;X)} .$$

Ciò prova che

$$\frac{\partial}{\partial t} u \in L^p(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; X) .$$

In analogo modo si verifica che

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u \in L^p(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; X) .$$

PROPOSIZIONE 4. *Sia A di tipo (ϕ, M, β), $\beta \in \mathbb{R}$, e sia*

$$\Theta = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\, z > 0,\ |\arg z| < \phi\} .$$

Sia poi U un aperto di $\mathbb{C}$ contenente $[0, T[$ tale che per ogni z di $\overline{U}$ risulti $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$, $|\arg z| < \phi_1 < \pi/2$, con $\phi + \phi_1 < \pi/2$.

Se Θ_1 è un aperto limitato di $\mathbb{C}$ tale che $\Theta_1 \subset \overline{\Theta}_1 \subset \Theta$ con frontiera Γ curva regolare semplice chiusa oppure unione di un numero finito di tali curve e f, g sono funzioni olomorfe da un aperto $\Omega \supset \overline{U}$ a X, per cui

$$(16) \qquad f(0) = g(0) \in D_A , \quad Af(0) = 0 , \quad f'(0) = g'(0) = 0$$

allora, per ogni $\lambda, \nu \in \overline{\Theta}_1$, *il problema differenziale*

$$(17)\qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{\partial u}{\partial t} + \nu \dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au\,, & t, \tau \in]0, T[\,, \\ u(t, 0) = f(t)\,, \quad u(0, \tau) = g(\tau)\,, & t, \tau \in [0, T[\,, \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione stretta, olomorfa in $(\lambda, \nu) \in \Theta_1 \times \Theta_1$.

Dimostrazione. Siano $\lambda, \nu \in \overline{\Theta}_1$. Allora la funzione u data da

$$u(t, \tau; \lambda, \nu) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\tau}{\nu} A\right] f\left(t - \dfrac{\lambda}{\nu}\tau\right), & t - \dfrac{\lambda}{\nu}\tau \in \overline{U}\,, \\ \exp\left[-\dfrac{t}{\lambda} A\right] g\left(\tau - \dfrac{\nu}{\lambda} t\right), & \tau - \dfrac{\nu}{\lambda} t \in \overline{U}\,, \end{cases}$$

risulta ben definita.

Infatti, se $0 \neq t - (\lambda/\tau)\tau \in \overline{U}$, allora $\tau - (\nu/\lambda)t \notin \overline{U}$.

Notiamo, per provare ciò, che $\tau - (\nu/\lambda)t = -(\nu/\lambda)(t - (\lambda/\nu)\tau)$ e, poichè

$$\left|\arg \frac{\nu}{\lambda}\right| < 2\phi\,,$$

vale $\pi - 2\phi < |\arg(-\nu/\lambda)| \leqslant \pi$.

Quindi, si ha

$$\arg\left(-\frac{\nu}{\lambda}\left(t - \frac{\lambda}{\nu}\tau\right)\right) > \pi - 2\phi - \phi_1 > \phi_1\,,$$

oppure

$$\arg\left(-\frac{\nu}{\lambda}\left(t - \frac{\lambda}{\nu}\tau\right)\right) < -\pi + 2\phi + \phi_1 < -\phi_1\,.$$

Ciò prova l'asserto.

Dalla Proposizione 3 segue che u è soluzione stretta. Resta da provare la olomorfia in $(\lambda, \nu) \in \Theta_1 \times \Theta_1$.

Ma ciò è conseguenza della (16), come si può verificare senza difficoltà.

Teorema 6. *Valgano le ipotesi della Proposizione* 4.

Se $B_i \in L(X)$, $\sigma(B_i) \subset \Theta_i \subset \overline{\Theta}_i \subset \Theta$, $i = 0, 1$, *e*

$$\lambda \in \varrho_{B_0}, \nu \in \varrho_{B_1} \Rightarrow (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} = (\nu - B_1)^{-1}(\lambda - B_0)^{-1};$$

$$u \in D_A, \mu \in \varrho_{B_i} \Rightarrow (\mu - B_i)^{-1}Au = A(\mu - B_i)^{-1}u \qquad (i = 0, 1)\,,$$

allora la u definita da

$$u(t, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma\int_\Gamma (\lambda - B_0)^{-1}(\nu - B_1)^{-1} u(t, \tau; \lambda, \nu)\, d\lambda\, d\nu$$

è soluzione stretta del problema (14); (*cfr.* [12] *per soluzioni distribuzionali di un problema analogo*).

La dimostrazione è come quella della Proposizione 2, in base alla Proposizione 4.

Esempi.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$(18)\quad \begin{cases} \partial u(t, x_0, x_1, \dots, x_u)/\partial t = -B_1 u(t, x_0, x_1, \dots, x_u)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0\,,\ x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \\ \lim\limits_{t\to 0+} \|u(t, \cdot) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = 0\,, \end{cases}$$

dove

$$B_1 u(x) = -a^{ij}(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} u(x) + \\ + b^i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + b\frac{\partial}{\partial x_0} u(x) + c(x_1, \dots, x_n) u(x)\,,$$

$a^{ij}(x_1, \dots, x_n) = a^{ji}(x_1, \dots, x_n)$, $b \neq 0$ e f è un elemento dato in $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Sia

$$A = -a^{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} + b^i(y)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(y)\,, \qquad y = (x_1, \dots, x_n)\,,$$

in modo che

$$B_1 = A + b\frac{\partial}{\partial x_0}\,.$$

Assumiamo che $-A$ sia strettamente ellittico nello spazio $\mathbb{R}^n$ e che i coefficienti a^{ij}, b^i, c appartengano a $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, con

$$\max\big(\sup_y |a^{ij}(y)|, \sup_y |b^i(y)|, \sup_y |c(y)|, \sup_y |a^{ij}_{\xi_h}(y)|, \\ \sup_y |a^{ij}_{\xi_h\xi_k}(y)|, \sup_y |b^i_{\xi_h}(y)|\big) < +\infty\,.$$

Allora si sa che la più piccola estensione chiusa $-\tilde{A}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ di $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfo in $L^2(\mathbb{R}^n)$, denotato con $\exp[-tA]$, tale che $\|\exp[-tA]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\exp[\beta t]$, $t>0$, (cfr. [17], p. 417).

Denotiamo con $f(\tau)$ l'applicazione $(x_1, \ldots, x_n) \to f(\tau, x_1, \ldots, x_n)$, con $u(t, \tau)$ l'applicazione

$$(x_1, \ldots, x_n) \to u(t, \tau; x_1, \ldots, x_n) = \big(u(t, \tau)\big)(x_1, \ldots, x_n)\,, \qquad \tau \in \mathbb{R}\,, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Poichè $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ è isomorfo a $L^2(\mathbb{R}^2; L^2(\mathbb{R}^n))$ e $C^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ è denso in $L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$, non è restrittivo supporre che l'applicazione $\tau \to f(\tau)$ appartenga a $C^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Poniamo $-b = \lambda$, $x_0 = \tau$.

Invece di studiare (18), consideriamo il problema, in $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\text{(19)} \quad \begin{cases} \partial u(t, \tau, x_1, \ldots, x_n)/\partial t + \lambda\, \partial u(t, \tau, x_1, \ldots, x_n)/\partial \tau = \\ \qquad\qquad = -Au(t, \tau, x_1, \ldots, x_n)\,, \qquad t > 0\,, \\ \lim\limits_{t\to 0+} \|u(t, \tau, \cdot) - f(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0\,. \end{cases}$$

(19) può considerarsi come corrispondente concreto del problema astratto

$$\text{(20)} \quad \begin{cases} \partial u(t, \tau)/\partial t + \lambda\, \partial u(t, \tau)/\partial \tau = -Au(t, \tau)\,, \qquad t > 0\,, \ \tau \in \mathbb{R}\,, \\ u(0, \tau) = f(\tau)\,. \qquad \tau \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

posto in $X = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Poichè A è un operatore di tipo (ϕ, M, β), ϕ, M, β opportuni, (cfr. [17]), si può applicare la Proposizione 1 per ottenere una affermazione sulla esistenza ed unicità della soluzione stretta del problema astratto (20).

Si ha, cioè, che

$$u(t, \tau) = \exp[-tA] f(\tau - \lambda t)\,, \qquad t > 0\,, \quad \tau \in \mathbb{R}\,,$$

è l'unica soluzione di (20).

D'altra parte, mostriamo che la « funzione »

$$(\tau, x_1, \ldots, x_n) \to \big(\exp[-tA] f(\tau - \lambda t)\big)(x_1, \ldots, x_n)$$

è, in effetti, un elemento di $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |(\exp[-tA]f(\tau-\lambda t))(x_1, \dots, x_u)|^2 \, d\tau \, dx_1 \dots dx_u \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \|\exp[-tA\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \|f(\tau-\lambda t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \exp[2\beta t] \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\tau-\lambda t, x_1, \dots, x_n)|^2 \, dx_1 . \dots dx_n \Big) d\tau =$$

$$= \exp[2\beta t] \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} .$$

LEMMA. *Sia A di tipo $(\phi, M, 0)$ in $X = L^p(\Omega_1)$, Ω_1 aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia poi $Y = L^p(\Omega \times \Omega_1)$, Ω aperto di $\mathbb{R}$ e si supponga che $f \in Y$ dia luogo, mediante la posizione*

$$\big(f(\tau)\big)(x) = f(\tau, x)$$

a una funzione, che denotiamo ancora con f, da Ω^* a $L^p(\Omega_1)$ di classe $C^{(1)}$, dove Ω^* è un aperto di $\mathbb{R}$ contenente

$$\{\xi \in \mathbb{R} | \xi = \tau - \lambda t, \, t \in [0, T[, \, \tau \in \Omega\} \qquad (T \textit{ può essere anche } = +\infty) .$$

Sia $u(t, \tau) = \exp[-tA]f(\tau - \lambda t]$, $\tau \in \Omega$, *e si ponga*

$$u(t, \tau, x) = \big(u(t, \tau)\big)(x) , \qquad \tau \in \Omega , \quad x \in \Omega_1 .$$

Allora

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t, \cdot) - f\|_{L^p(\Omega \times \Omega_1)} = 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. Vale

$$\|u(t, \cdot) - f\|_{L^p(\Omega \times \Omega_1)} = \Big(\int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega_1} |\big(u(t, \tau)\big)(x) - \big(f(\tau)\big)(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega_1} |(\exp[-tA]f(\tau - \lambda t) - \exp[-tA]f(\tau))(x)|^p \, dx \Big) d\tau \Big)^{1/p} +$$

$$+ \Big(\int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega_1} |(\exp[-tA]f(\tau) - f(\tau))(x)|^p \, dx \Big) d\tau \Big)^{1/p} = \text{(i)} + \text{(ii)} .$$

Ora (i) $\xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, poichè

$$\text{(i)} \leqslant C\Big(\iint_{\Omega\times\Omega_1} |f(\tau-\lambda t, x) - f(\tau, x)|^p\, dx\, d\tau\Big)^{1/p} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0\,.$$

Poichè A è di tipo $(\phi, M, 0)$ in $L^p(\Omega_1)$:

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\Omega_1} |(\exp[-tA]f(\tau) - f(\tau))(x)|^p\, dx = 0\,, \qquad \forall \tau \in \Omega\,.$$

Sia $F_t(\tau) = \int_{\Omega_1} |(\exp[-tA]f(\tau) - f(\tau)((x)|^p\, dx.$

Allora si ha

$$(F_t(\tau)) \leqslant \Big(\int_{\Omega_1} |(\exp[-tA]f(\tau))(x)|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_{\Omega_1} |(f(\tau))(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|\exp[-tA]\|_{L^p(\Omega_1)\to L^p(\Omega_1)} \Big(\int_{\Omega_1} |(f(\tau))(x)|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_{\Omega_1} |(f(\tau))(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (C+1)\Big(\int_{\Omega_1} |(f(\tau))(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Poichè $f \in L^p(\Omega \times \Omega_1)$, per il Teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\Omega} \Big(\int_{\Omega_1} |(\exp[-tA]f(\tau) - f(\tau))(x)|^p\, dx\Big) d\tau = 0\,.$$

Quindi, (ii) $\xrightarrow[t\to 0+]{} 0$ e ciò chiude la prova del Lemma.

Ritorniamo all'esempio in questione. Poichè A è di tipo (ϕ, M, β) allora esiste A_0 di tipo $(\phi, M, 0) = (\phi, M)$ tale che

$$A = A_0 - \beta I\,,$$

$$\Big(A_0 u(y) = -a^{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(y) + b^i(y)\frac{\partial}{\partial x_i} u(y) + \big(c(y) + \beta\big) u(y)\Big)\,.$$

Dal Lemma segue allora che

$$\omega(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \big(\exp[-tA_0] f(x_0 - \lambda t)\big)(x_1, \ldots, x_n)$$

può considerarsi la sola soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial w(t, x_0, \dots, x_n)/\partial t = \left(-A_0 - \lambda \dfrac{\partial}{\partial x_0}\right) w(t, x_0, \dots, x_n)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0\,,\ x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \\ \|w(t, \cdot) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0\,. \end{cases}$$

D'altra parte,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|(\exp[-tA]f(\tau - \lambda t))(x) - (f(\tau))(x)\right|^2 d\tau\, dx\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp[2\beta t]\left|(\exp[-tA_0]f(\tau - \lambda t)])(x) - (f(\tau))(x)\right|^2 d\tau\, dx\right)^{\frac12} +$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|\exp[\beta t]\,(f(\tau))(x) - (f(\tau))(x)\right|^2 d\tau\, dx\right)^{\frac12} = \exp[\beta t]\|\omega(t, \cdot) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} +$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left|\exp[\beta t](f(\tau))(x) - (f(\tau))(x)\right|^2 d\tau\, dx\right)^{\frac12} = \text{(i)} + \text{(ii)}\,.$$

Ma (i) $\xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, (ii) $\xrightarrow[t\to 0+]{} 0$.

Si può quindi supporre che la u definita da

$$u(t_0, x_0, x_1, \dots, x_u) = (\exp[-tA]f(x_0 + bt))(x_1, \dots, x_n)$$

sia soluzione, in senso classico, del problema (18).

Sia ora B un operatore soddisfacente le condizioni o del Teorema 2 o del Teorema 3, con $X = L^2(\mathbb{R})$, per esempio, A sia l'operatore introdotto sopra e f abbia la proprietà di prolungamento stabilita in quei Teoremi.

Con gli stessi procedimenti usati prima, si riconosce che la u definita da

$$u(t, \tau, x) = (u(t, \tau))(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\lambda - B)^{-1} \exp[-tA] f(\tau - \lambda t)\, d\lambda\right)(x)$$

può considerarsi soluzione classica del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + B\dfrac{\partial}{\partial \tau} u = -Au\,, \qquad t \in\,]0, T[\,,\ (\tau, x) \in \mathbb{R}^2\,, \\ \lim\limits_{t\to 0+} \|u(t, \cdot) - f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0\,. \end{cases}$$

Mostriamo che $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Si ha

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - B)^{-1} \exp[-tA] f(\tau - \lambda t)\, d\lambda \right\|_X^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \|(\lambda - B)^{-1}\|_{X \to X} \, \|\exp[-tA] f((\tau - \lambda t)\|_X \, |d\lambda| \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1(t) \left(\int_{\Gamma_1} \|f(\tau - \lambda t)\|_X \, |d\lambda| \right)^2$$

e quindi

$$\left(\int_{\mathbf{R}^2} \left| \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - B)^{-1} \exp[-tA] f(\tau - \lambda t)\, d\lambda \right)(x) \right|^2 d\tau\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2(t) \left(\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\Gamma_1} \|f(\tau - \lambda t)\|_X \, |d\lambda| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2(t) (\operatorname{mis} \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(\tau - \lambda t, x)|^2 \, dx \right) d\tau \right) |d\lambda| \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2(t) (\operatorname{mis} \Gamma_1) \, \|f_1\|_{L^2(\Omega_1 \times \mathbf{R})} ,$$

dove Ω_1 è l'insieme di $\mathbf{C}$ descritto, ad esempio, nel Teorema 2.

Di qui l'affermazione. Che valga

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t, \cdot) - f\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 0 ,$$

è conseguenza del Teorema di Lebesgue e della disuguaglianza di Hölder.

Notiamo che il Teorema 3 consente di trattare problemi del tipo sopra considerato, dove l'operatore B è definito da $Bu(x) = (\partial/\partial x) u(x)$, purchè si scelga D_B opportunamente.

A questo proposito, menzionamo che come D_B possiamo prendere gli spazi di Gelfand-Shilov (cfr. [3]) oppure gli spazi $D(A^\infty; M_k)$ di Lions-Magenes (cfr. [13], p. 147).

Un problema che possiamo risolvere è, quindi,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial \tau} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi , & t > 0 , \ \tau \in \Omega , \\ \lim\limits_{t \to 0+} \|u(t, \cdot) - f\|_{L^p(\Omega \times \mathbf{R})} = 0 . \end{cases}$$

sotto ipotesi di regolarità su f nella variabile x e di prolungabilità di f come funzione olomorfa da un aperto Ω_1 di $\mathbb{C}$ a uno spazio di tipo W_M, S_α, ..., ecc.

Notiamo che se $\Omega = \mathbb{R}$, un problema come (21) è immediatamente risolubile in questi tipi di spazi relativi a due variabili.

Sia ora Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $A(x, D)$ un operatore uniformemente fortemente ellittico su Ω. Assumiamo che $\partial\Omega$ sia di classe $C^{(2)}$ (cfr. [2]).

Per semplicità, supponiamo $n = 1$, $\Omega =]0, 1[$. Di qui,

$$A(x, D)u(x) = a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x) + c(x)u(x) \,,$$

a, b, c funzioni da $\bar{\Omega}$ a $\mathbb{C}$ sufficientemente regolari (cfr. [2], p. 72 e p. 101).

Si sa (cfr. [2], p. 101) che l'operatore $A + kI$ è di tipo (ϕ, M) in $L^2(\Omega)$ con $D_A = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ per $k > 0$ sufficientemente grande. Sia $B = A + kI$. Allora $-B$ è generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfo in $L^2(\Omega)$.

Sia ora $J = [0, T_0]$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e poniamo

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}u + B(x, D)u + \lambda\frac{\partial}{\partial \tau}u \,.$$

Se $Q_T = \{(t, y)|0 < t < T, y \in \mathring{J}\times\Omega, y = (\tau, x)\}$, $S_T = \{(t, y)|y \in \partial(J\times\Omega), 0 < t < T\}$, $\Theta_S = \{(s, y)|y = (\tau, x) \in \mathring{J}\times\Omega\}$, allora si pone il problema di studiare esistenza ed unicità di soluzioni classiche del sistema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } Q_T \cup \Theta_T \,, \\ u = 0 & \text{in } S_T \,, \\ u(0, y) = 0 & \text{in } \Theta_0 \,. \end{cases}$$

Ebbene, anche questo problema può essere risolto con un procedimento analogo a quello usato per (18) ed è chiaro, infine, che se i coefficienti di B dipendono da t e da τ in modo che l'operatore $A(t, \tau)$ del Teorema 1 soddisfi le ipotesi là fatte, le considerazioni sopra si estendono a problemi con coefficienti variabili (cfr. [11]).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, Tome 2, ed. Gauthier-Villars, 1968.

[2] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations*, ed. Holt-Rinehart and Winston, 1969.

[3] I. M. GELFAND - G. E. SHILOV, *Generalized functions 1-2-3*, ed. Academic Press, 1964-67-68.

[4] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes I*, J. reine u. ang. Mathematik, **162** (1953).

[5] M. R. HESTENES, *Calculus of variations and optimal control theory*, ed. J. Wiley, 1966.

[6] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semigroups*, ed. AMS, 1957.

[7] F. JOHN, *Partial differential equations*, ed. Springer, 1971.

[8] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer, 1966.

[9] T. KATO - H. TANABE, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J., **14** (1962), pp. 107-133.

[10] T. KATO - H. TANABE, *On the analyticity of solution of evolution equations*, Osaka J. Math., **4** (1967), pp. 1-4.

[11] H. KOMATSU, *Abstract analyticity in time and unique continuation property of solution of a parabolic equation*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, **9** (1961), pp. 1-11.

[12] J. L. LIONS, *Sur certaines équations différentielles a coefficients opérateurs non bornés*, J. Analyse Math. Israel, **6** (1958), pp. 333-355.

[13] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 3, ed. Dunod, 1970.

[14] E. R. LORCH, *Spectral theory*, ed. Oxford, 1962.

[15] M. N. ROSCULET, *Contributi allo studio di una equazione alle derivate parziali di tipo parabolico I*, Studii si cercetari Matematice, no 2, Tom 11 (1960), pp. 337-373.

[16] V. S. VLADIMIROV - JU. N. DROŽŽINOV, *Generalized Cauchy problem for an ultraparabolic equation*, Izv. Akad. Nauk., **31** (1967).

[17] K. YOSIDA, *Functional analysis*, ed. Springer, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 settembre 1973.