FRANCESCO ODETTI

Sulla proprietà di estensione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 51 (1974), p. 179-195

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__179_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 51 (1974)

Sulla proprietà di estensione.

Francesco Odetti (*)

Introduzione.

In un lavoro di M. Baldassarri (**) sono stati detti spazi anulati soddisfacenti la proprietà di estensione (PE) quelli in cui ogni sezione ammissibile (definità cioè su di un aperto complementare di un chiuso di codimensione maggiore di 1) è restrizione di una sezione globale.

C. Margaglio ha dato in un suo lavoro ([7]) una caratterizzazione algebrica particolarmente semplice e utile nelle applicazioni della PE per lo schema affine di un dominio d'integrità:
Si ha cioè che lo schema affine di un dominio d'integrità A soddisfa la PE se e solo se per ogni elemento $\omega \in Q$ (corpo delle frazioni di A) tale che l'altezza di $\mathfrak{J}_\omega$ (l'ideale costituito dagli elementi $f \in A$ tali che $f\omega \in A$) sia maggiore di 1, si ha $\omega \in A$.(0)

Poichè è noto (cfr. [5] I, 8.5.1.) che, se un anello A è integro tutte le sezioni sugli aperti del suo schema affine hanno come « ambiente » il corpo delle frazioni di A, la dimostrazione del fatto che quella data da Margaglio è una caratterizzazione algebrica della PE risulta in questo caso abbastanza semplice.

Poichè la PE si può definire per spazi anulati qualunque, scopo di questo lavoro è stato quello di fornire una caratterizzazione algebrica della PE per lo schema affine di anelli non necessariamente integri, che coincida con quella data da Margaglio nel caso integro.

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(**) M. Baldassarri, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci,* Atti del Convegno Internazionale di Geometria algebrica, Torino, 1961.

Nel caso non integro non esiste però in generale un « ambiente » in cui trovare tutte le sezioni dello schema affine di un anello; in questo lavoro viene però provato (prop. 2.7) che basta che un anello sia (S_1) perchè il suo anello totale delle frazioni contenga almeno tutte le sezioni ammissibili del suo schema affine. Usando questo fatto si è potuto dimostrare (teor. 3.5) che la (0) è ancora valida per anelli (S_1) sostituendo a Q l'anello totale delle frazioni di A. Si è inoltre provato con un esempio (oss. al teor. 4.5) che detta caratterizzazione non è valida in generale per altri anelli.

Grazie alla definizione algebrica della PE e ad una sua caratterizzazione in termini di A-successioni (prop. 4.12) che estende quella data da Margaglio in [8] si sono potuti provare alcuni dei teoremi già dati da Margaglio solo per anelli integri.

Si è infine dimostrato che la PE è una proprietà locale (prop. 4.14) e che essa coincide con la proprietà (S_2) per anelli (S_1) (oss. 4.18). Nella preparazione del presente lavoro è stata ancora molto utile la conoscenza della $Z^{(2)}$-chiusura e della parafattorialità quali definite da Grothendieck ([5] IV, 5 e IV, 21.13) che presentano notevoli analogie con la PE definita da Baldassarri.

1. Richiamiamo qui alcune nozioni di algebra commutativa che serviranno in seguito.

Nel corso del presente lavoro la parola anello significherà sempre anello commutativo con identità e noetheriano. Diremo omomorfismi di anelli solo quelli in cui l'immagine dell'identità è l'identità.

Se A è un anello, denoteremo con A_0 il suo anello totale delle frazioni e supporremo sempre $A \subseteq A_0$.

DEFINIZIONE 1.1. Sia A un anello e sia $\omega \in A_0$. Denoteremo con $\mathfrak{J}_\omega$ l'ideale formato dagli elementi $f \in A$ tali che $f\omega \in A$.

Si verifica immediatamente che se $\omega, \omega' \in A_0$ si hanno le inclusioni:

$$\mathfrak{J}_{\omega\cdot\omega'} \supseteq \mathfrak{J}_\omega \cdot \mathfrak{J}_{\omega'} \qquad \mathfrak{J}_{\omega-\omega'} \supseteq \mathfrak{J}_\omega \cdot \mathfrak{J}_{\omega'} .$$

Richiamiamo le seguenti definizioni e i seguenti fatti noti per un anello A (v. per es. [4], [11] n. 5, [12] App. 6).

— Una successione di elementi di A, $(a_1, \dots, a_n)$ si dice A-*successione* se a_1 non è divisore di 0 e se per ogni i, $i = 2, \dots, n$ si ha:

$$a_1A + \dots + a_{i-1}A : a_1 = a_1A + \dots + a_{i-1}A.$$

— Tutte le A-successioni massimali contenute in un ideale $\mathfrak{a}$ hanno la stessa lunghezza n che vien detta grado di $\mathfrak{a}$ e denotata gr $(\mathfrak{a})$.

— Per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A si ha: $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}) \leqslant h(\mathfrak{a})$.

— A si dice di Macaulay se ogni ideale generato da una A-successione è puro (se cioè ogni ideale primo ad esso associato ha la stessa altezza).

Richiamiamo ora la definizione di proprietà (S_n) e una sua ovvia caratterizzazione (cfr. [3] 4.6):

DEFINIZIONE 1.2. Si dice che un anello A verifica la *proprietà* (S_n) se per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A si ha:

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \geqslant \min(h(\mathfrak{p}), n) .$$

PROPOSIZIONE 1.3. *A soddisfa la proprietà (S_n) se e solo se per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A si ha*:

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \geqslant n \ \textit{ se } \dim(A_{\mathfrak{p}}) \geqslant n \ \textit{ e } A \textit{ è di Macaulay se } \dim(A_{\mathfrak{p}}) = n.$$

In seguito, per semplicità, diremo A è (S_n) anzichè A verifica la proprietà (S_n).

Ricordiamo il seguente fatto noto:

PROPOSIZIONE 1.4. *Sono equivalenti per un anello A*:

(i) *A è (S_1).*

(ii) *L'ideale (0) è puro in A.*

PROPOSIZIONE 1.5. *Se A è un anello (S_1), la decomposizione primaria irridondante di (0) e unica.*

DIM. È un corollario di [1] 4.11.

Sono particolari anelli (S_1) gli anelli ridotti, cioè quelli nei quali l'unico elemento nilpotente è lo 0 (cfr. p. es. [3], 4.5).

Negli anelli (S_1) l'anello totale delle frazioni ha una struttura particolarmente semplice:

LEMMA 1.6. *Sia A anello (S_1), sia $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = (0)$ la decomposizione* *primaria irridondante di* (0) *e sia per ogni* $i=1,\dots,n$, $\mathfrak{p}_i=\sqrt{\mathfrak{q}_i}$, *allora esiste per ogni* $i=1,\dots,n$ *un elemento* $t_i\in\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$, $t_i\notin\mathfrak{p}_i$.

DIM. Se $\mathfrak{p}_i$ contenesse $\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$ si avrebbe $\mathfrak{p}_i\supseteq\mathfrak{q}_j$ per un indice $j\neq i$ (v. [1] teor. 1.11), cioè $\mathfrak{p}_i\supseteq\mathfrak{p}_j$ con $i\neq j$ contro l'ipotesi che tutti i primi associati a (0) siano minimali. Da ciò l'esistenza dei t_i.

PROPOSIZIONE 1.7. *Sia* A *anello* (S_1), *allora* $A_0\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}A_{\mathfrak{p}_i}$ *dove i* $\mathfrak{p}_i$ $i=1,\dots,n$ *sono i primi minimali di* A.

DIM. Definiamo $\varphi\colon A_0\to\bigoplus_{i=1}^{n}A_{\mathfrak{p}_i}$ come $\varphi(a/s)=(a/s,\dots,a/s)$. Se s non divide 0, $s\notin\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ e φ è ben definita; φ è evidentemente omomorfismo e $\operatorname{Ker}\varphi=(0)$. Infatti da $\varphi(a/s)=0$ segue $as_i=0$ con $s_i\notin\mathfrak{p}_i$, $i=1,\dots,n$, da ciò $a\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i=(0)$ dove $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i=(0)$ è la decomposizione primaria di (0).

Se inoltre $(a_1/s_1,\dots,a_n/s_n)\in\bigoplus_{i=1}^{n}A_{\mathfrak{p}_i}$, siano t_i definiti come in lemma 1.6. Allora

$$\frac{a_1t_1+\dots+a_nt_n}{s_1t_1+\dots+s_nt_n}\in A_0$$

(infatti dalle proprietà dei t_i si deduce immediatamente che $s_1t_1+\dots+s_nt_n$ non divide 0). Inoltre

$$\varphi\left(\frac{a_1t_1+\dots+a_nt_n}{s_1t_1+\dots+s_nt_n}\right)=\left(\frac{a_1}{s_1},\dots,\frac{a_n}{s_n}\right)$$

come risulta da semplice verifica.

OSSERVAZIONE 1.8. Se A è ridotto, gli $A_{\mathfrak{p}_i}$ sono dei corpi in quanto anelli locali regolari di dimensione 0 (cfr. [3] prop. 4.5 pag. 73).

2. In questo numero richiamiamo alcune nozioni geometriche e diamo la dimostrazione del fatto che tutte le sezioni ammissibili dello schema affine di un anello (S_1) sono contenute nel suo anello totale delle frazioni.

Useremo in seguito le nozioni di spettro primo di un anello commutativo come spazio topologico, di prefascio e di fascio su uno spazio topologico X con tutte le loro proprietà elementari.

Per una più ampia trattazione vedi per es. [2] Ch. 2 § 4, [6] Ch. 1-6, [5] I. A questi testi si riferiscono pure le notazioni e la terminogia che useremo nel seguito.

Richiamiamo qui brevemente solo alcune nozioni che ci saranno utili in seguito e un teorema che consente di immergere nell'anello totale delle frazioni l'anello delle sezioni su un aperto ammissibile nello schema affine di un anello (S_1).

DEFINIZIONE 2.1. Sia X spazio topologico e sia H un chiuso irriducibile di X. Si dice *codimensione* combinatoria *di H in X* e la si denota con $\mathrm{codim}_X(H)$ l'estremo superiore delle lunghezze delle catene $H \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n$ di chiusi irriducibili contenenti H.

Se H non è irriducibile, la codimensione di X è definita come l'estremo inferiore delle codimensioni delle componenti irriducibili di H.

La definizione precedente è particolarmente significativa se X è lo spettro primo di un anello:

PROPOSIZIONE 2.2. *Se $X = \operatorname{Spec} A$ e H è un chiuso di X si ha:*

$$\mathrm{codim}_X(H) = h(\mathfrak{J}(H))$$

DIM. vedi p. es. [5] IV, 5.1.1.3.

DEFINIZIONE 2.3. Diremo che un aperto U di uno spazio topologico X è *ammissibile* se $\mathrm{codim}_X(\mathcal{C}_X(U)) > 1$.

Riassumiamo brevemente la costruzione dello schema affine di un anello:

DEFINIZIONE 2.4. Sia A un anello. Si dice *schema affine* di A la coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ costituita dallo spazio topologico $X = \operatorname{Spec} A$ e dal fascio di anelli su X definito come $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varprojlim A_f$ dove il limite inverso è fatto sugli $f \in A$ tali che $D(f) \subseteq U$, se U è un aperto di X.

Per la dimostrazione del fatto che $\mathcal{O}_X$ è un fascio e per tutte le sue prime proprietà rinviamo a [6] ch. 5.

LEMMA 2.5. *Sia A anello (S_1). Se $f \in A$ e $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ sono i primi minimali di A che non contengono f, allora esiste $\varphi_f \colon A_f \to \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$ immersione canonica di anelli.*

Se in particolare f non divide 0 si ha l'inclusione $A_f \subseteq A_0$.

DIM. Sia $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = (0)$ la decomposizione primaria irridondante dell'ideale (0) e sia per ogni $i = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Per ipotesi $f \in \bigcap_{i=r+1}^{n} \mathfrak{p}_i$, $f \notin \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$.

Se f è nilpotente, allora $A_f = (0)$ e $\bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i} = (0)$ per cui l'immersione è ovvia.

Se f non è nilpotente definiamo $\varphi_f(a/f^n) = (a/f^n, \ldots, a/f^n)$; poichè $f \notin \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$ si ha effettivamente $a/f^n \in A_{\mathfrak{p}_i}$.

Si verifica facilmente che φ_f è ben definito, che è omomorfismo di anelli e che $\varphi_f(1) = 1$.

Sia ora $a/f^n \in \operatorname{Ker}(\varphi_f)$, allora $a/f^n = 0$ in $A_{\mathfrak{p}_i}$, $i = 1, \ldots, r$, cioè $as_i = 0$ con $s_i \notin \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$. Ma $s_i \notin \mathfrak{p}_i \Rightarrow a \in \mathfrak{p}_i$. Inoltre, per un $m \in \boldsymbol{N}$, $f^m \in \mathfrak{q}_j$, $j = r+1, \ldots, n$. Dunque $f^m a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = (0)$, quindi $a/f^n = 0$ in A_f.

LEMMA 2.6. *Sia A anello (S_1). Sia $X = \operatorname{Spec}(A)$ e sia $U \subseteq X$ aperto ammissibile. Allora se $f \in A$ è tale che $D(f) \subseteq U$, esiste $g \in A$, g non divisore di 0 tale che $D(f) \subseteq D(g) \subseteq U$.*

DIM. Se f non divide 0 non c'è niente da dimostrare.

In caso contrario sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}(\mathcal{C}_X(U))$; si verifica che $D(f) \subseteq U$ se e solo se $f \in \mathfrak{a}$. Per ipotesi $h(\mathfrak{a}) > 1$ (prop. 2.2), dunque poichè A è (S_1), esiste almeno un $x \in \mathfrak{a}$ non divisore di 0.

Sia poi $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ la decomposizione primaria irridondante di (0) in A, con $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ e siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ i primi minimali di A non contenenti f. Poichè $f \in \mathfrak{p}_i$, $i = r+1, \ldots, n$, esiste $k \in \boldsymbol{N}$ tale che $f^k \in \mathfrak{q}_i$ $i = r+1, \ldots, n$. Consideriamo $t = t_{r+1} + \ldots + t_n$ dove i t_i sono quelli definiti in lemma 1.6. Sia allora $g = f^k + tx$. Allora g verifica le condizioni richieste; infatti:

1) $D(g) \subseteq U$ in quanto $f \in \mathfrak{a}$, $x \in \mathfrak{a} \Rightarrow g \in \mathfrak{a}$ cioè $D(g) \subseteq U$

2) $D(f) \subseteq D(g)$. Infatti $f^k \in \mathfrak{q}_{r+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ da cui $f^k t \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = (0)$ cioè $f^k t = 0$. Allora $f^{2k} = f^{2k} + f^k tx = f^k(f^k + tx)$ cioè $f \in \sqrt{gA}$, quindi $D(f) \subseteq D(g)$ (cfr. [6] 3.4).

3) g non divide 0. Se infatti $(f^k + tx)u = 0$, allora $f^k u = -txu \in \bigcap_{1=i}^{n} \mathfrak{q}_i = (0)$, cioè $txu = 0$, quindi $tu = 0 = f^k u$. Poichè $t \notin \mathfrak{p}_i$ $i = r+1, \ldots, n$ e $f^k \notin \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$ si ha $u = 0$.

PROPOSIZIONE 2.7. *Siano A anello (S_1) e $(X, \mathcal{O}_X)$ il suo schema affine. Se allora $U \subseteq X$ è un aperto ammissibile, esiste l'immersione canonica $i\colon \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to A_0$.*

DIM. Siano $f, g \in A$ tali che $D(f) \subseteq D(g) \subseteq U$. Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ i primi minimali di A. Poichè $f^m = ug$ per un $m \in \boldsymbol{N}$, se $g \in \mathfrak{p}_i$ per un indice i, allora $f \in \mathfrak{p}_i$. Siano allora $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ i primi minimali di A non contenenti f e $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r+h}$ quelli non contenenti g.

Consideriamo l'omomorfismo canonico $r_{gf}\colon A_g \to A_f$ e le immersioni $\varphi_g\colon A_g \to \bigoplus_{i=1}^{r+h} A_{\mathfrak{p}_i}$, $\varphi_f\colon A_f \to \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$ esistenti per lemma 2.5.

La proiezione canonica $\varrho_{gf}\colon \bigoplus_{i=1}^{r+h} A_{\mathfrak{p}_i} \to \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$ è tale che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A_g & \xrightarrow{\varphi_g} & \bigoplus_{i=1}^{r+h} A_{\mathfrak{p}_i} \\ \downarrow{\scriptstyle r_{gf}} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_{gf}} \\ A_f & \xrightarrow{\varphi_f} & \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i} \end{array}$$

sia commutativo.

Dunque le $\varphi_f\colon A_f \to \bigoplus_{i=1}^{r+h} A_{\mathfrak{p}_i}$ costituiscono un sistema inverso di omomorfismi iniettivi. Si può pertanto passare al limite inverso

$$i = \varprojlim_{D(f) \subseteq U} \varphi_f\colon \varprojlim_{D(f) \subseteq U} A_f \to \varprojlim_{D(f) \subseteq U} \bigoplus_{i=1}^{r+h} A_{\mathfrak{p}_i}$$

e la i è iniettiva (*). Rimane da provare che $\varprojlim_{D(f) \subseteq U} \bigoplus_{i=1}^{r+h} A_{\mathfrak{p}_i} = A_0$.

Sia $x \in A_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}_i}$ e sia $f \in A$ tale che $D(f) \subseteq U$. Se f non è divisore di 0, in corrispondenza di f possiamo prendere $x \in \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}_i}$ (lemma 2.5). In caso contrario sia g non divisore di 0 tale che $D(f) \subseteq \subseteq D(g) \subseteq U$ (lemma 2.6) e prendiamo in corrispondenza di f $\varrho_{gf}(x) \in \in \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$ dove $\varrho_{gf}\colon \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}_i} \to \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$.

Allora $\{\varrho_{gf}(x)\}_{D(f) \subseteq U} \in \varprojlim \bigoplus_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$ come si può facilmente verificare, anche in quanto $\varrho_{gf}(x)$ non dipende dal particolare g scelto. Con pochi passaggi segue immediatamente la tesi.

(*) Cfr. p. es. N. BOURBAKI, *Theorie des Ensembles*, ch. 3, § 7, n. 2, Corollario alla Prop. 2 (edizione 1963).

Nel caso particolare che l'anello sia integro è noto che l'inclusione $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow A_0$ vale per ogni aperto U di $X = \operatorname{Spec} A$ e anzi si ha $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \cap A_\mathfrak{p}$ dove l'intersezione è fatta tra i primi di U (cfr. [5] I, 8.5.1.).

Osservazione 2.8. Si può ancora osservare che ogni volta che esiste l'inclusione $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow A_0$, essa è canonica (anche se U non è ammissibile), nel senso che, se $U \subseteq V$ sono due aperti per i quali esiste detta inclusione, la restrizione $r: \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ fattorizza l'inclusione, cioè è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "i"'] & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "j"] \\ & A_0 \end{tikzcd}$$

3. In questo numero definiamo la proprietà di estensione per spazi anulati e ne diamo la caratterizzazione algebrica per schemi affini di anelli (S_1).

Definizione 3.1. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ spazio anulato. Diremo che $\mathcal{O}_X$ soddisfa la *proprietà* di *estensione* (PE), se per ogni sezione $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ dove U è un aperto ammissibile di X, esiste $\omega' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ di cui ω sia restrizione. In altre parole se la $r: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è surgettiva per ogni U aperto ammissibile.

Definizione 3.2. Si dice che un anello A soddisfa la PE se il suo schema affine $(X, \mathcal{O}_X)$ dove $X = \operatorname{Spec} A$ la soddisfa.

Definizione 3.3. Se A è un anello e $\omega \in A_0$, diremo che ω è *A-ammissibile* se $h(\mathfrak{I}_\omega) > 1$. (vedi def. 1.1.).

La definizione è giustificata, per anelli (S_1) dai seguenti teoremi:

Teorema 3.4. *Sia A anello (S_1), $(X, \mathcal{O}_X)$ il suo schema affine, $\omega \in A_0$. Allora ω è A-ammissibile se e solo se $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ dove U è un aperto ammissibile di X.*

Dim. Supponiamo $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, U ammissibile e dimostriamo che $h(\mathfrak{I}_\omega) > 1$. Sia $f \in A$ tale che $D(f) \subseteq U$ e consideriamo $\sigma_f: \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to A_f$. Sia $a/f^n = \sigma_f(\omega)$; si può inoltre supporre, ricordando osservazione 2.8 $\sigma_f(f) = f$. Allora $\sigma_f(\omega \cdot f^n) = \sigma_f(\omega) \cdot \sigma_f(f^n) = a \in A$. Cioè $\sigma_f(\omega \cdot f^n) \in A$. Dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\sigma_f"] & A_f \\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A \arrow[u, "\sigma_{X,U}"] \arrow[ur, "\sigma_{X,f}"'] & \end{tikzcd}$$

si deduce che, se $\sigma_f(\omega \cdot f^n) \in A$, esiste $a \in A$ tale che $\sigma_{X,f}(a) = \sigma_f(\omega \cdot f^n)$, quindi per l'iniettività di $\sigma_{X,U}$, $\omega \cdot f^n \in A$.

Allora per ogni $f \in A$ tale che $D(f) \subseteq U$, cioè tale che $f \in \mathfrak{J}(\mathcal{C}_x(U)) = \mathfrak{a}$ si ha $f^n \in \mathfrak{J}_\omega$, cioè $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}_\omega$ e poichè per ipotesi $h(\mathfrak{a}) > 1$ (prop. 2.2) anche $h(\mathfrak{J}_\omega) > 1$.

Viceversa, sia $h(\mathfrak{J}_\omega) > 1$, consideriamo $H = V(\mathfrak{J}_\omega)$, allora $U = \mathcal{C}_X(H)$ è ammissibile. Sia $f \in A$ tale che $D(f) \subseteq U$ allora si verifica immediatamente che $f \in \mathfrak{J}(H) = \sqrt{\mathfrak{J}_\omega}$, cioè $f^n \in \mathfrak{J}_\omega$, quindi $f^n \omega = a_f \in A$. Allora

$$\omega' = \left\{\frac{a_f}{f^n}\right\}_{D(f) \subseteq U} \in \varprojlim_{D(f) \subseteq U} A_f$$

come si verifica facilmente.

Scegliamo in particolare f non divisore di 0 tale che $D(f) \subseteq U$.

Dal diagramma commutativo di omomorfismi iniettivi:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\sigma_f"] \arrow[dr, "i"'] & A_f \arrow[d, "i_U"] \\ & A_0 \end{tikzcd}$$

si deduce immediatamente $i(\omega') = \varphi_f \sigma_f(\omega') = \varphi_f(a_f/f^n) = \omega$, cioè $\omega = \omega' \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

Teorema 3.5. *Sia A anello (S_1). Sono allora equivalenti:*

(i) *A soddisfa la* PE

(ii) *Per ogni $\omega \in A_0$ A-ammissibile, $\omega \in A$*

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) Per teorema 3.4 $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ con U ammissibile per cui esiste $\omega' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tale che $r_X^U(\omega') = \omega$. Dalla commutatività del diagramma di omomorfismi iniettivi

$$\begin{tikzcd} A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "r_X^U"] \arrow[dr, "i_X"'] & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "i_U"] \\ & A_0 \end{tikzcd}$$

si ha immediatamente $i_X(\omega') = i_U(r_X^U(\omega')) = i_U(\omega) = \omega$ da cui $\omega = \omega' \in A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) ovvia del teorema precedente.

Dunque per un anello A (S_1) la definizione di PE può essere data nel seguente modo:

« A soddisfa la PE se per ogni $\omega \in A_0$ A-ammissibile $\omega \in A$ ».

Qesta è la definizione di PE che useremo in seguito poichè tratteremo solo anelli (S_1).
Osserviamo che se A non è (S_1) il teorema (3.5) non è valido.

Sia per esempio $A = \{k[X, Y, Z]/(X^2Y, XY^2, X^2Z, XZ^2, XYZ)\}_{\mathfrak{m}} = k[x, y, z]_{\mathfrak{m}}$ dove $\mathfrak{m}$ è l'ideale (x, y, z).

Allora A non soddisfa la PE in quanto, se $U = \operatorname{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}\}$ si può verificare che $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) = k[X, Z]_{(Y.Z)} \oplus k(X)$, per cui l'applicazione di restrizione $r\colon A \to k[Y, Z]_{(Y.Z)} \oplus k(X)$ non è surgettiva (l'elemento $(1, 0)$ non appartiene all'immagine di r), mentre A verifica la (ii) di teorema 3.5 in quanto coincide col suo anello totale delle frazioni

Esistono tuttavia anelli non (S_1) per i quali vale il teorema 3.5.

Sia per esempio $A = k[x, y, z]_{\mathfrak{m}} = \{k[X, Y, Z]/(X^2, XY, XZ)\}_{\mathfrak{m}}$ dove $\mathfrak{m} = (x, y, z)\cdot A$ soddisfa la PE in quanto si può verificare che tutti gli aperti ammissibili U di $\operatorname{Spec} A$ non contengono il massimale di A, per cui $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = k[Y, Z]_{(Y.Z)}$ e le restrizioni $r\colon A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ sono surgettive. A inoltre verifica la (ii) di teorema 3.5 in quanto coincidente col suo anello totale delle frazioni.

Si può congetturare che il 3.5 volga ancora per anelli non (S_1) in cui i primi associati allo (0) non minimali contengano un sol primo minimale.

4. In questo numero vengono dati diversi teoremi concernenti gli anelli soddisfacenti la PE usando la definizione data in teorema 3.5. Viene poi completato lo studio della PE provandone il carattere locale e infine viene messa in relazione con la proprietà (S_2).

PROPOSIZIONE 4.1. *L'insieme degli elementi A-ammissibili dell'anello totale delle frazioni di un anello A è un sopraanello di A.*

DIM. È una diretta conseguenza del fatto che se ω e ω' sono elementi di A_0, $\mathfrak{J}_{\omega\cdot\omega'} \supseteq \mathfrak{J}_\omega \cdot \mathfrak{J}_{\omega'}$ e $\mathfrak{J}_{\omega-\omega'} \supseteq \mathfrak{J}_\omega \cdot \mathfrak{J}_{\omega'}$.

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia A un anello e sia $\omega \in A_0$ un elemento A-ammissibile. Se allora $\mathfrak{J}_\omega$ contiene un elemento a non unitario e non divisore di 0 che generi un ideale aA puro, $\omega \in A$.*

DIM. Poichè tutti i primi associati ad aA hanno altezza 1, mentre $h(\mathfrak{J}_\omega) > 1$, allora $\mathfrak{J}_\omega$ non è contenuto in nessuno di essi e quindi neppure nella loro unione.

Sia allora $c \in \mathfrak{J}_\omega$, c non appartenente ad alcuno dei primi associati ad aA; allora $aA : cA = aA$. Se poniamo $\omega = b/a$ si ha $c\omega = c(b/a) = d \in A$; $cb = da$ e $b \in aA : cA = aA$; $b = fa$, $f \in A$. Cioè $\omega = f \in A$.

TEOREMA 4.3. *Sia A un anello (S_1) in cui ogni ideale principale generato da un elemento non unitario e non divisore di 0 sia puro. Allora A soddisfa la* PE.

DIM. Sia $\omega = b/a$ A-ammissibile. Se a è unitario si ha subito $\omega \in A$. In caso contrario a non è divisore di 0 e $a \in \mathfrak{J}_\omega$ per cui dal teorema precedente $\omega \in A$.

COROLLARIO 4.4. *Ogni anello di Macaulay soddisfa la* PE.

DIM. Infatti un anello di Macaulay è (S_1) e in esso ogni ideale principale è puro.

TEOREMA 4.5. *Sia A un anello integralmente chiuso nel suo anello totale delle frazioni A_0. Sia poi $a \in A$, a non unitario e non divisore di 0. Allora aA è puro.*

DIM. Vedi p. es. [10] teor. 7 pg. 73.

COROLLARIO 4.6. *Ogni anello (S_1) integralmente chiuso nel suo anello totale delle frazioni soddisfa la* PE.

Si possono già dare alcuni esempi notevoli di anelli che soddisfano la PE:

1) Tutti gli anelli di dimensione 1 soddisfano la PE anche se non sono (S_1) (in quanto non esistono aperti ammissibili nel loro spettro).

2) Tutti gli anelli delle coordinate di ipersuperfici, cioè i $k[X_1, \dots, X_n]/f(X_1, \dots, X_n)$ soddisfano la PE essendo di Macaulay (cfr. [4] es. 1 pg. 25 e prop. 5.1))

3) Un esempio di anello non (S_1), ma soddisfacente la PE è $A = k[X, Y, Z]/(X^2, XY, XZ) = k[x, y, z]$. Si può infatti verificare che, se U è un aperto ammissibile di $\operatorname{Spec} A$ allora $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) = A$ se l'ideale massimale $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ appartiene a U e $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) = k[Y, Z]$ in caso contrario per cui le restrizioni risultano sempre surgettive.

Dimostriamo ora sotto quali ipotesi gli elementi A-ammissibili sono interi:

Proposizione 4.7. *Se la chiusura integrale $\bar{A}$ di A in A_0 è un anello noetheriano biequidimensionale* (*) *e se $\omega \in A_0$ è A-ammissibile, allora $\omega \in \bar{A}$.*

Dim. Sia $\bar{\mathfrak{I}}_\omega$ l'ideale associato a ω in $\bar{A}$. Sia $\bar{\mathfrak{p}}$ ideale primo di $\bar{A}$, $\bar{\mathfrak{p}} \supseteq \bar{\mathfrak{I}}_\omega$. Poichè sia in A che in $\bar{A}$ tutte le catene massimali di ideali primi hanno la stessa lunghezza n (cfr. [9] 10.10 pg. 30), allora ogni catena di ideali primi che inizi con $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cap A$ ha al massimo $n-2$ elementi in quanto, come si può verificare facilmente, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{I}_\omega$ e per ipotesi $h(\mathfrak{p}) > 1$. Dunque per i teoremi «lying-over» e «going-up» (cfr. [9] 1.8 e 10.9) ogni catena di ideali primi di A che inizi con $\bar{\mathfrak{p}}$ ha al massimo lunghezza $n-2$ e per l'ipotesi di biequidimensionalità segue $h(\bar{\mathfrak{I}}_\omega) > 1$. Allora la tesi segue da corollario 4.6.

Osservazione 4.8. (1) Se $\bar{A}$ non è biequidimensionale, la proposizione 4.7 è falsa.

Sia ad esempio $A = k[x, y, z] = k[X, Y, Z]/(XY, XZ)$. Allora $\bar{A} = k[X] \oplus k[Y, Z]$ che non è evidentemente biequidimensionale.

L'elemento $\omega = x/(x^2 - y) \in A_0$ è A-ammissibile (infatti $\mathfrak{I}_\omega = (x, y, z)$ che ha altezza 2), ma $\omega \notin \bar{A}$.

(2) Anche se $\bar{A}$ è biequidimensionale possono esistere elementi $\omega \in \bar{A}$ non A-ammissibili.

Per esempio, se $\omega = x/y$ in $k[x, y, z] = k[X, Y, Z]/(X^2 - Y^3)$ ω è intero ma non A-ammissibile (infatti $\mathfrak{I}_\omega = (x, y)$ che ha altezza 1 in A).

(*) Ricordiamo che un anello si dice biequidimensionale se tutte le catene massimali di ideali primi di A hanno la stessa lunghezza.

(3) Se $A \subseteq B \subsetneq A_0 = B_0$ e $\omega \in A_0$ è B-ammissibile non è detto che ω sia A-ammissibile.

Siano ad esempio
$A = k[(X^2-1), X(X^2-1), Y]$, $\quad B = k[(X^2-1), X(X^2-1), XY, Y]$;
allora $\omega = X \in A_0$ è B-ammissibile; infatti $X\cdot(X^2-1) \in B$, $X^2(X^2-1) = (X^2-1)^2 + (X^2-1) \in B$, $X^2Y = (X^2-1)Y + Y \in B$ e $X\cdot Y \in B$, cioè $\mathfrak{J}_\omega \supseteq (X^2-1, X(X^2-1), XY, Y)$ che è massimale di altezza 2 in B.

Però ω non è A-ammissibile. Infatti $A = k[X, Y, Z]/(X^2 - Z^3)$ soddisfa la PE essendo di Macaulay, dunque poichè $\omega \notin A$, ω non è A-ammissibile.

L'anello B di osservazione 4.8 (3) fornisce anche il primo esempio di anello integro che non soddisfa la PE.

Infatti $\omega = X(X^2-1)/(X^2-1) \in B_0$ è B-ammissibile, ma $\omega \notin B$ come si può facilmente verificare.

Colleghiamo ora la PE con il concetto di A-successione:

PROPOSIZIONE 4.9. *Siano A un anello e ω un elemento di A_0. Se $gr(\mathfrak{J}_\omega) > 1$, allora $\omega \in A$.*

DIM. Sia (a, b) A-successione di elementi di $\mathfrak{J}_\omega$. Allora $a\omega = r \in A$ $b\omega = s \in A$, da cui $br = as$. Ne segue:
$r \in aA : bA = aA$; $r = r'a$, $\quad$ da cui $\quad \omega = r/a = r'a/a = r' \in A$.

LEMMA 4.10. *Siano A anello e $a, b_0, b_1 \in A$ tali che (a, b_0), (a, b_1) siano A-successioni. Allora (a, b_0b_1) è A-successione.*

DIM. Sia $x \in aA : b_0b_1A$. Allora $(xb_0)b_1 \in aA$, da cui $xb_0 \in aA : b_1A = aA$, da cui $x \in aA : b_0A = aA$ e $x \in aA$.

COROLLARIO 4.11. *Siano A anello e $a, b_0, b_1, \ldots, b_n \in A$ tali che $(a, b_0), \ldots, (a, b_n)$ siano A successioni. Siano poi $m_0, \ldots, m_n \in \boldsymbol{N}$. Allora $(a, b_0^{m_0} b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n})$ è una A-successione.*

DIM. Per semplice induzione dal lemma precedente.

PROPOSIZIONE 4.12. *Sia A un anello (S_1). Sono allora equivalenti le seguenti condizioni:*

(i) *A soddisfa la* PE

(ii) *Ogni ideale di A di altezza 2, ha grado 2*

(iii) *Ogni ideale primo di A di altezza 2 ha grado 2.*

DIM. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $\mathfrak{a}$ ideale di A di altezza 2. Allora poichè A è (S_1), esiste un $a \in A$ non divisore di 0, dunque $\operatorname{gr}(\mathfrak{a}) \geqslant 1$.

Supponiamo $\operatorname{gr}(\mathfrak{a}) = 1$ e dimostriamo che in tale caso esiste $\omega \in A_0$ A-ammissibile, $\omega \notin A$. Sia dunque $b \in \mathfrak{a}$, b non appartenente a nessuno dei primi minimali associati ad aA (detto b esiste in quanto, per il teorema dell'ideale principale di Krull ([1], 11.17 pag. 73) tutti i primi minimali di A hanno altezza 1 e poichè $h(\mathfrak{a}) = 2$, $\mathfrak{a}$ non è contenuto in nessuno di essi e quindi neppure nella loro unione).

Per come è stato scelto b, si deduce subito che $h(aA + bA) = 2$. Per l'ipotesi fatta però $aA : bA \neq aA$. Sia dunque $h_1 \notin aA$ tale che $h_1 b = h_2 a$ per un $h_2 \in A$. Poniamo $\omega = h_1/a \in A_0$. Si ha evidentemente $aA + bA \subseteq \mathfrak{J}_\omega$ quindi ω è A-ammissibile. Però $\omega \notin A$, altrimenti $h_1/a = r \in A$ e $h_1 = ar$ contro l'ipotesi.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ovvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sia $\omega = b/a \in A_0$ e supponiamo $h(\mathfrak{J}_\omega) > 1$.

Sia $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = \mathfrak{J}_\omega$ una decomposizione primaria irridondante di $\mathfrak{J}_\omega$ e sia per ogni i, $i = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$.

Per ipotesi $\operatorname{gr}(\mathfrak{p}_i) \geqslant 2$ e poichè tutte le A-successioni massimali in un ideale hanno lo stesso numero di elementi, per ogni i esiste $b_i \in \mathfrak{p}_i$ tale che (a, b_i) sia A-successione. Inoltre per ogni i, $b_i^{m_i} \in \mathfrak{q}_i$ per un $m_i \in \boldsymbol{N}$. Ora $b = b_1^{m_1}, \ldots, b_n^{m_n} \in \mathfrak{J}_\omega$ e per corollario 4.11, (a, b) è A-successione in $\mathfrak{J}_\omega$. Dunque $\operatorname{gr}(\mathfrak{J}_\omega) > 1$ e per la 4.9 $\omega \in A$.

Le due seguenti proposizioni provano che, per anelli (S_1) la PE è una proprietà locale.

PROPOSIZIONE 4.13. *Sia A anello (S_1) soddisfacente la* PE. *Se allora S è una parte moltiplicativa di A, $S^{-1}A$ soddisfa la* PE.

DIM. Se infatti $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di altezza 2 in $S^{-1}A$ allora $\psi^{-1}(\mathfrak{p})$ in $\psi : A \to S^{-1}A$ ha altezza 2. Dunque per prop. 4.12 $\operatorname{gr}(\psi^{-1}(\mathfrak{p})) = 2$ e, poichè le A-successioni permangono negli anelli di frazioni come si può facilmente verificare, anche $\operatorname{gr}(\mathfrak{p}) = 2$. La conclusione segue sempre da prop. 4.12.

PROPOSIZIONE 4.14. *Sia A anello (S_1). Sono allora equivalenti*:

(i) *A soddisfa* la PE

(ii) *$A_\mathfrak{p}$ soddisfa la* PE *per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A*

(iii) *$A_\mathfrak{m}$ soddisfa la* PE *per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.*

DIM. Resta da dimostrare che (iii) $\Rightarrow$ (i).

Sia $\mathfrak{p}$ ideale primo di altezza 2 in A. Basterà per prop. 4.9 dimostrare che $\mathrm{gr}(\mathfrak{p}) = 2$. Poichè A è (S_1), esiste certamente $a \in \mathfrak{p}$ non divisore di 0. Se b è un elemento di $\mathfrak{p}$ tale che $aA : bA \neq aA$, allora $b \in \mathfrak{q}$ con $\mathfrak{q}$ ideale primo associato ad aA. Siano $\mathfrak{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$ i primi associati ad aA. Se, per ogni $b \in \mathfrak{p}$, (a, b) non fosse A-successione si avrebbe per quanto detto $\mathfrak{p} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$, cioè $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_i$ per un indice i. Sia $\mathfrak{m}$ ideale massimale contenente $\mathfrak{q}_i$. Allora $\mathfrak{q}_i \cdot A_\mathfrak{m}$ è associato a $(a/1)A_\mathfrak{m}$ (cfr. 4.9 di [1]), per cui per ogni $b/s \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{q}_i \cdot A_\mathfrak{m}$ si ha $(a/1)A_\mathfrak{m} : (b/s)A_\mathfrak{m} \neq$ $\neq (a/1)A_\mathfrak{m}$ cioè $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{m}$ pur avendo altezza 2 non contiene $A_\mathfrak{m}$-successioni di lunghezza 2, contro l'ipotesi che $A_\mathfrak{m}$ soddisfi la PE.

Usando la proposizione 4.14 si può facilmente provare l'equivalenza tra PE e (S_2) per anelli (S_1):

TEOREMA 4.15. *In un anello si verifichi la proprietà* (S_2) *ogni ideale principale generato da un elemento non unitario e non divisore di* 0 *è puro.*

DIM. Siano A un anello (S_2) e x un suo elemento come da enunciato. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di altezza maggiore di 1 tale che $\mathfrak{p} \supseteq xA$. Proviamo che $\mathfrak{p}$ non è associato ad xA. Infatti $\mathrm{gr}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \geqslant \min(2, h(\mathfrak{p})) = 2$. Allora possiamo trovare in $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ un elemento $y/1$ (il denominatore si può supporre uguale ad 1) tale che $(x/1, y/1)$ sia una $A_\mathfrak{p}$-successione; dunque $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ non è associato ad $(x/1)A_\mathfrak{p}$ per cui $\mathfrak{p}$ non è associato ad xA ([1] prop. 4.9).

Si ottiene quindi il seguente risultato:

COROLLARIO 4.16. *Se un anello* A *soddisfa la proprietà* (S_2), *allora* A *soddisfa la* PE.

DIM. Segue da teor. 4.3 e teor. 4.15.

Il corollario precedente si può invertire per anelli (S_1):

TEOREMA 4.17. *Sia* A *un anello* (S_1). *Se allora* A *soddisfa la* PE, A *soddisfa la* (S_2).

DIM. Per prop. 4.12 se A verifica la PE ogni ideale di A di altezza 2 ha grado 2.

Sia ora $\mathfrak{p}$ primo in A e dimostriamo che:

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \geqslant \min(2, h(\mathfrak{p})) . \qquad (*)$$

Se $h(\mathfrak{p}) \geqslant 2$, allora gr $(\mathfrak{p}) \geqslant 2$ per cui gr $(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \geqslant 2$ e la (*) è verificata.

Se $h(\mathfrak{p}) = 1$ basta provare che $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ contiene un elemento che non divide 0. Ma poichè A è (S_1) esiste $x \in \mathfrak{p}$, x non divisore di 0 e $x/1 \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ non divide 0.

Se $h(\mathfrak{p}) = 0$ non c'è niente da provare.

Osservazione 4.18. Poichè un anello che verifichi la (S_2) verifica la (S_1) si ha la seguente equivalenza:

« Un anello A soddisfa la (S_2) se e solo se A soddisfa la (S_1) e la PE ». Cioò la PE è « ciò che manca » a un anello (S_1) per essere (S_2).

Va comunque osservato che esistono anelli che verificano la PE e non la (S_1). Vedi l'esempio 3) dopo il corollario 4.6.

È facile dare esempi di anelli (S_1) che non verificano la PE se si prescinde dall'ipotesi di integrità:

Esempio 1. $A = k[X, Y, Z]/(XY, XZ) = k[x, y, z]$ La sezione $\omega = x/(x-y)$ è A-ammissibile in quanto $\mathfrak{I}_\omega = (x, y, z)$, ma $\omega \notin A$ come si può facilmente verificare. Geometricamente $x/(x-y) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ dove $U = \operatorname{Spec} A - \{\mathfrak{m}\}$, $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ e si può interpretare come una funzione che assume il valore 0 sui primi di $\operatorname{Spec} A$ contenenti (x), e il valore 1 su quelli contenenti (y, z) e che pertanto non può essere definita su (x, y, z) che è l'unico primo di $\operatorname{Spec} A$ contenente sia (x) che (y, z).

Esempio 2. $A = k[X, Y, Z, T]/(XZ, XT, YZ, YT) = k[x, y, z, t]$. La sezione $\omega = x/(x+z)$ è A-ammissibile $\big(\mathfrak{I}_\omega = (x, y, z, t)\big)$, ma $\omega \notin A$. Geometricamente il significato è simile a quello dell'esempio 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. Atiyah - I. G. MacDonald, *Introduction to commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, ch. 1 e 2, Hermann, Paris, 1961.

[3] J. Dieudonné, *Topics in local algebra*, University of Notre Dame, Math. Press. 1967.

[4] S. Greco - P. Salmon, *Anelli di Macaulay*, Pubbl. Istituto Matematico Università di Genova.

[5] A. Grothendieck - J. Dieudonné, *Eléments de Geometrie Algebrique*: I, Springer-Verlag, 1971; IV, I.H.E.S., 1964.

[6] I. G. MacDonald, *Algebraic Geometry*, W. A. Benjamin Inc., 1968.

[7] C. MARGAGLIO, *Anelli che soddisfano la proprietà di estensione* (manoscritto).
[8] C. MARGAGLIO, *Alcune proprietà delle R-coppie in un dominio d'integrità*, Rend. Sem. Mat. Padova, **39** (1967), pp. 389.
[9] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience Tracts, no 13 (1962).
[10] D. G. NORTHCOTT, *Ideal Theory*, Cambridge Tracts, 1953.
[11] D. G. NORTHCOTT, *Lessons on rings, modules, multeplicities*, Cambridge Univ. Press, 1968.
[12] O. ZARISKI - P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, voll. I e II, Van Nostrand, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 agosto 1973.