

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIO ANDREA ZANZOTTO

Nuclei ed operatori markoviani. Versioni regolari di operatori di speranza condizionale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 51 (1974), p. 113-129

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__51__113_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Nuclei ed operatori markoviani. Versioni regolari di operatori di speranza condizionale.

PIO ANDREA ZANZOTTO (*)

Nel presente lavoro si studiano i concetti di *nucleo* N relativo ad una coppia (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) di spazi misurabili, di *operatore markoviano* M relativo alla coppia di spazi $(E, \mathcal{E}, \lambda)$, (F, \mathcal{F}, μ) e le relazioni intercorrenti tra di essi.

Diamo a questo proposito un criterio di compatibilità tra M ed N ((3.1)). Da tale criterio ed essenzialmente solo dal teorema che assicura la convergenza quasi certa di una martingala discreta, chiusa in L^1 , discende poi il teorema (3.4) che fa delle ipotesi sugli spazi (F, \mathcal{F}) ed (E, \mathcal{E}) per garantire, in relazione ad ogni operatore markoviano, l'esistenza di un nucleo con esso compatibile.

Si studia poi una classe speciale di operatori markoviani particolarmente importante dal punto di vista del calcolo delle probabilità: gli operatori cosiddetti « *di speranza condizionale* ». Per tali operatori la condizione di compatibilità tra nucleo N ed operatore M si dimostra ((4.6)) equivalere all'esistenza di una *disintegrazione* della misura μ rispetto all'applicazione misurabile p di (F, \mathcal{F}_μ) in (E, \mathcal{E}) (con il simbolo \mathcal{F}_μ si designa il completamento della tribù \mathcal{F} rispetto alla misura μ).

Dal confronto dei risultati (3.4) e (4.6) discende così, in ipotesi

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Scienze dell'Informazione, Corso Italia 56100 Pisa.

Lavoro effettuato nell'ambito dell'attività dei gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

L'Autore ringrazia il Prof. G. Letta che lo ha seguito durante lo svolgimento della presente ricerca.

più generali di quelle considerate in [8] e utilizzando strumenti del tutto diversi, un teorema di esistenza di una disintegrazione della misura μ .

0. Notazioni e terminologia.

Nel seguito, per *spazio misurabile* si intenderà una coppia (F, \mathcal{F}) costituita da un insieme F e da una tribù (o σ -algebra) \mathcal{F} di parti di F .

Per *misura* sullo spazio misurabile (F, \mathcal{F}) si intenderà una funzione reale μ numerabilmente additiva su \mathcal{F} . Si denoterà con $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$ l'insieme di tutte le misure su (F, \mathcal{F}) , considerato come *reticolo di Banach* (rispetto all'usuale ordinamento e alla norma definita da $\|\mu\| = |\mu|(F)$). Si denoterà invece con $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$ l'insieme di tutte le funzioni reali, limitate e misurabili su (F, \mathcal{F}) , considerato anch'esso come reticolo di Banach (rispetto all'usuale ordinamento ed alla norma uniforme). Per ogni elemento μ di $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$ e ogni elemento g di $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$, si porrà:

$$\langle \mu, g \rangle = \int g d\mu.$$

La forma bilineare $(\mu, g) \mapsto \langle \mu, g \rangle$ così definita mette in dualità separante i due spazi vettoriali $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$, $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$.

Assegnata una misura positiva μ su (F, \mathcal{F}) , considereremo gli spazi $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ e $\mathcal{L}^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$ (definiti al solito modo) ed i rispettivi quozienti $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$, $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$. Considereremo questi ultimi come *reticoli di Banach* (rispetto all'usuale ordinamento e alle usuali norme). Inoltre considereremo $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ e $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$ come messi in dualità (separante) dalla forma bilineare $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_\mu$ definita da

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int fg d\mu.$$

(Questa dualità permette notoriamente di identificare L^∞ al duale di L^1).

Per ogni elemento f di $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ denoteremo con $f \cdot \mu$ la misura di *base* μ e di *densità* f . Per ogni elemento g di $\mathcal{L}^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$, denoteremo con \tilde{g} la sua classe di equivalenza in $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$.

Designeremo con \mathcal{F}_μ il completamento della tribù \mathcal{F} rispetto alla misura μ , con $\hat{\mu}$ il completamento della misura μ , e identificheremo lo spazio $L^1(F, \mathcal{F}_\mu, \hat{\mu})$ con lo spazio $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ (e così pure $L^\infty(F, \mathcal{F}_\mu, \hat{\mu})$ con $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$).

Siano (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) spazi misurabili e, per ogni elemento x di E , sia ν_x una misura su (F, \mathcal{F}) , positiva e di norma ≤ 1 . Diremo che la famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ è scalarmente \mathcal{E} -misurabile se, per ogni elemento g di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$, la funzione $x \mapsto \langle \nu_x, g \rangle$ è misurabile su (E, \mathcal{E}) (*).

In tal caso, se λ è una misura positiva su (E, \mathcal{E}) , la formula

$$\mu(B) = \int \lambda(dx) \nu_x(B) \quad \text{per ogni } B \in \mathcal{F},$$

definisce una misura positiva μ su (F, \mathcal{F}) , rispetto alla quale l'integrale di un qualsiasi elemento g di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$ è dato da

$$(0.1) \quad \langle \mu, g \rangle = \int \lambda(dx) \langle \nu_x, g \rangle.$$

La misura μ sarà detta *l'integrale*, fatto rispetto alla misura λ , della famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$, e sarà denotata col simbolo $\int \lambda(dx) \nu_x$.

Nel seguito, avremo bisogno del lemma seguente (immediata conseguenza del teorema che assicura la convergenza quasi certa di una martingala discreta, chiusa in L^1):

(0.2) LEMMA. *Sia λ una misura positiva sullo spazio misurabile (E, \mathcal{E}) , e si supponga che la tribù \mathcal{E} sia di tipo numerabile.*

È allora possibile associare ad ogni punto x di E una successione $(f_{x,n})_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$, positivi e di norma ≤ 1 , in modo tale che, per ogni elemento g di $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$, si abbia

$$g(x) = \lim_n \int f_{x,n} g d\lambda$$

per λ -quasi ogni x .

DIM. Sia $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di partizioni finite di E , di finezza crescente, tale che la tribù \mathcal{E} coincida con la tribù generata da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

(*) La classe costituita dagli elementi g di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$ per i quali la funzione $x \mapsto \langle \nu_x, g \rangle$ è misurabile su (E, \mathcal{E}) , è, in ogni caso, uno spazio vettoriale « monotono » (cioè stabile rispetto al passaggio al limite puntuale su successioni monotone equilimitate): pertanto, se \mathcal{K} è una parte di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$ tale che il minimo sotto-spazio vettoriale monotono di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$ contenente \mathcal{K} coincida con $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$, allora affinché la famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ sia scalarmente \mathcal{E} -misurabile, è sufficiente che la misurabilità di $x \mapsto \langle \nu_x, g \rangle$ sia assicurata per ogni elemento g di \mathcal{K} . (In particolare, è sufficiente che, per ogni elemento B di \mathcal{F} , sia misurabile la funzione $x \mapsto \nu_x(B)$).

Per ogni elemento x di E , e per ogni intero n , si ponga:

$$f_{x,n} = \sum_{A \in \mathfrak{F}_n, \lambda(A) > 0} \frac{I_A(x)}{\lambda(A)} I_A.$$

Per ogni elemento g di $\mathcal{L}^\infty(E, \mathfrak{E}, \lambda)$, si ha allora:

$$\int f_{x,n} g \, d\lambda = \sum_{A \in \mathfrak{F}_n, \lambda(A) > 0} \frac{I_A(x)}{\lambda(A)} \int_A g \, d\lambda,$$

talchè la funzione g_n definita da:

$$g_n(x) = \int f_{x,n} g \, d\lambda$$

è una versione della speranza condizionale di g rispetto alla sotto-tribù di \mathfrak{E} generata da \mathfrak{F}_n .

Ne segue che la successione (g_n) converge quasi dappertutto verso g .

1. Nuclei e probabilità di transizione.

Chiameremo *nucleo*, relativo alla coppia $(E, \mathfrak{E}), (F, \mathfrak{F})$ di spazi misurabili, una coppia $N = (.N, N.)$ costituita da un'applicazione di $\mathfrak{M}(E, \mathfrak{E})$ in $\mathfrak{M}(F, \mathfrak{F})$ (denotata con $\lambda \mapsto \lambda N$) e da un'applicazione di $\mathfrak{B}(F, \mathfrak{F})$ in $\mathfrak{B}(E, \mathfrak{E})$ (denotata con $g \mapsto Ng$), le quali siano: lineari, positive (cioè isotone), di norma ≤ 1 , e tra loro *coniugate*, nel senso che risulti

$$\langle \lambda N, g \rangle = \langle \lambda, Ng \rangle$$

per ogni elemento λ di $\mathfrak{M}(E, \mathfrak{E})$ ed ogni elemento g di $\mathfrak{B}(F, \mathfrak{F})$. (È facile vedere che le due applicazioni hanno allora la stessa norma: questa si dirà la norma del nucleo N).

Evidentemente un nucleo N è individuato dalla sola sua « parte sinistra » (cioè dall'applicazione $\lambda \mapsto \lambda N$) o dalla sola sua « parte destra » (cioè dall'applicazione $g \mapsto Ng$): ed affinchè un'applicazione di

$\mathfrak{M}(E, \mathfrak{E})$ in $\mathfrak{M}(F, \mathfrak{F})$ (risp. di $\mathfrak{B}(F, \mathfrak{F})$ in $\mathfrak{B}(E, \mathfrak{E})$), lineare, positiva e di norma ≤ 1 , si possa considerare come la parte sinistra (risp. destra) di un nucleo, occorre e basta che essa sia debolmente continua.

Sono immediate le due proposizioni seguenti.

(1.1) PROPOSIZIONE. *a) Sia N un nucleo, relativo alla coppia (E, \mathfrak{E}) , (F, \mathfrak{F}) di spazi misurabili. Se, per ogni elemento x di E , si pone*

$$(1.2) \quad \nu_x = \varepsilon_x N$$

(dove ε_x denota la misura di Dirac su (E, \mathfrak{E}) definita da una massa unitaria concentrata nel punto x), allora $(\nu_x)_{x \in E}$ è una famiglia di elementi di $\mathfrak{M}(F, \mathfrak{F})$, positivi e di norma ≤ 1 , scalarmente \mathfrak{E} -misurabile e verificante la relazione

$$(1.3) \quad \lambda N = \int \lambda(dx) \nu_x$$

per ogni elemento λ di $\mathfrak{M}(E, \mathfrak{E})$.

b) Inversamente, se $(\nu_x)_{x \in E}$ è un'arbitraria famiglia di elementi di $\mathfrak{M}(F, \mathfrak{F})$, positivi e di norma ≤ 1 , scalarmente \mathfrak{E} -misurabile, esiste uno (ed un sol) nucleo N verificante la relazione (1.2) (per ogni elemento x di E).

(1.4) PROPOSIZIONE. *a) Sia N un nucleo, relativo alla coppia (E, \mathfrak{E}) , (F, \mathfrak{F}) , di spazi misurabili. Se, per ogni elemento B di \mathfrak{F} , si pone*

$$(1.5) \quad n_B = N I_B$$

(dove I_B denota la funzione indicatrice di B in F), allora $(n_B)_{B \in \mathfrak{F}}$ è una famiglia di elementi di $\mathfrak{B}(E, \mathfrak{E})$, positivi e di norma ≤ 1 , dotata della seguente proprietà:

(1.6) *Per ogni elemento x di E , la funzione $B \mapsto n_B(x)$ è una misura su (F, \mathfrak{F}) .*

Inoltre, per ogni elemento g di $\mathfrak{B}(F, \mathfrak{F})$ ed ogni elemento x di E , il numero $(Ng)(x)$ è eguale all'integrale della funzione g , fatto rispetto alla misura $B \mapsto n_B(x)$.

b) Inversamente, se $(n_B)_{B \in \mathcal{F}}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{B}(E, \mathcal{E})$, positivi e di norma ≤ 1 , dotata della proprietà (1.6), esiste uno (ed un sol) nucleo N verificante la relazione (1.5) (per ogni elemento B di \mathcal{F}).

Se N è un nucleo, relativo alla coppia (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) e se si pone $v_x = \varepsilon_x N$ (per $x \in E$), $n_B = NI_B$ (per $B \in \mathcal{F}$), allora la funzione P definita da

$$P(x, B) = v_x(B) = n_B(x)$$

è una *sotto-probabilità di transizione*, relativa alla coppia (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) : ossia un'applicazione di $E \times \mathcal{F}$ in $[0, 1]$, dotata delle due seguenti proprietà:

- i) Per ogni elemento x di E , la funzione parziale $P(x, \cdot)$ è una misura su (F, \mathcal{F}) ;
- ii) Per ogni elemento B di \mathcal{F} , la funzione parziale $P(\cdot, B)$ è misurabile su (E, \mathcal{E}) .

Inversamente è chiaro che, se P è una sotto-probabilità di transizione, relativa alla coppia (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) , allora la famiglia $(v_x)_{x \in E}$ definita da $v_x = P(x, \cdot)$ gode delle proprietà precisate in (1.1), *b)*, mentre la famiglia $(n_B)_{B \in \mathcal{F}}$ definita da $n_B = P(\cdot, B)$ gode della proprietà precisate in (1.4), *b)*.

Si vede dunque che il concetto di nucleo è equivalente a quello di sotto-probabilità di transizione.

Un altro modo per caratterizzare un nucleo (o, meglio, la parte destra di un nucleo) è fornito dalla proposizione seguente.

(1.7) PROPOSIZIONE. *Affinchè un'applicazione lineare $g \mapsto Ng$ di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$ in $\mathcal{B}(E, \mathcal{E})$, positiva e di norma ≤ 1 , sia continua rispetto alle topologie deboli $\sigma(\mathcal{B}(F, \mathcal{F}), \mathfrak{M}(F, \mathcal{F}))$, $\sigma(\mathcal{B}(E, \mathcal{E}), \mathfrak{M}(E, \mathcal{E}))$ (ossia coincida con la parte destra di un nucleo), occorre e basta che valga per essa la proprietà del « passaggio al limite sulle successioni monotone », nel senso che risulti $\inf_n Ng_n = 0$ per ogni successione decrescente (g_n) di elementi di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$ con $\inf_n g_n = 0$.*

Infine la proposizione seguente caratterizza i nuclei aventi norma unitaria.

(1.8) PROPOSIZIONE. *Affinchè un nucleo N abbia norma eguale ad 1, ciascuna delle seguenti condizioni è necessaria e sufficiente:*

- (a) $N1 = 1$;
- (b) per ogni elemento λ di $\mathfrak{M}(E, \mathcal{E})$, risulta $\langle \lambda N, 1 \rangle = \langle \lambda, 1 \rangle$;
- (c) per ogni elemento x di E la misura $\nu_x = \varepsilon_x N$ è normalizzata.

2. Operatori markoviani.

In questo paragrafo, e nei successivi, λ e μ denotano due fissate misure positive sugli spazi misurabili (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) rispettivamente.

La definizione di *operatore markoviano* relativo alla coppia $(E, \mathcal{E}, \lambda)$, (F, \mathcal{F}, μ) si può dare in modo del tutto analogo a quella di nucleo, relativo alla coppia (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) . Basta sostituire, in quest'ultima definizione, le dualità vettoriali $\langle \mathfrak{M}(E, \mathcal{E}), \mathfrak{B}(E, \mathcal{E}) \rangle$ e $\langle \mathfrak{M}(F, \mathcal{F}), \mathfrak{B}(F, \mathcal{F}) \rangle$ con le dualità vettoriali $\langle L^1(E, \mathcal{E}, \lambda), L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda) \rangle$ e $\langle L^1(F, \mathcal{F}, \mu), L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu) \rangle$, rispettivamente.

Un operatore markoviano, relativo alla coppia $(E, \mathcal{E}, \lambda)$, (F, \mathcal{F}, μ) , sarà dunque una coppia $M = (.M, M.)$ costituita da un'applicazione di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ in $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ (denotata con $f \mapsto fM$) e da un'applicazione di $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$ in $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$ (denotata con $g \mapsto Mg$), le quali siano: lineari, positive, di norma ≤ 1 e tra loro « coniugate », nel senso che risulti

$$(2.1) \quad \langle fM, g \rangle_\mu = \langle f, Mg \rangle_\lambda$$

per ogni elemento f di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ ed ogni elemento g di $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$. (Le due applicazioni hanno allora la medesima norma, detta la norma dell'operatore markoviano M).

Nel seguito, quando parleremo di un operatore markoviano, intenderemo sempre riferirci ad un operatore markoviano *relativo alla fissata coppia* $(E, \mathcal{E}, \lambda)$, (F, \mathcal{F}, μ) . (Così pure, i nuclei considerati saranno tutti relativi alla coppia (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F})).

Assegnare un operatore markoviano equivale, naturalmente, ad assegnarne la sola parte sinistra (risp. destra), ossia ad assegnare un'applicazione di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ in $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ (risp. di $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$ in $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$), la quale sia lineare, positiva, di norma ≤ 1 e debolmente continua.

Per quanto riguarda la parte sinistra, si può del resto osservare che l'ultima condizione (continuità debole) è superflua: infatti, poichè L^∞ si può identificare con il duale di L^1 , un'applicazione lineare di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ in $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$, che abbia norma ≤ 1 , è continua rispetto alle topologie delle norme, e quindi anche rispetto alle topologie deboli $\sigma(L^1(E, \mathcal{E}, \lambda), L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda))$ e $\sigma(L^1(F, \mathcal{F}, \mu), L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu))$.

Per quanto riguarda invece la parte destra di un operatore markoviano, se ne può dare una caratterizzazione analoga a quella fornita dalla proposizione (1.7) per la parte destra di un nucleo:

(2.2) PROPOSIZIONE. *Affinchè un'applicazione lineare $g \mapsto Mg$ di $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$ in $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$, positiva e di norma ≤ 1 , sia continua rispetto alle topologie deboli $\sigma(L^\infty, L^1)$ (cioè coincida con la parte destra di un operatore markoviano), occorre e basta che valga per essa la proprietà di passaggio al limite sulle successioni monotone, nel senso che risulti $\inf_n Mg_n = 0$ per ogni successione decrescente (g_n) di elementi di $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$ con $\inf_n g_n = 0$.*

Infine la proposizione seguente caratterizza gli operatori markoviani aventi norma unitaria (*).

(2.3) PROPOSIZIONE. *Affinchè un operatore markoviano M abbia norma eguale ad 1, ciascuna delle seguenti condizioni è necessaria e sufficiente:*

- (a) $M1 = 1$ (dove 1 denota la classe di equivalenza individuata in L^∞ dalla costante 1);
- (b) per ogni elemento f di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$, risulta $\langle fM, 1 \rangle_\mu = \langle f, 1 \rangle_\lambda$ ossia:

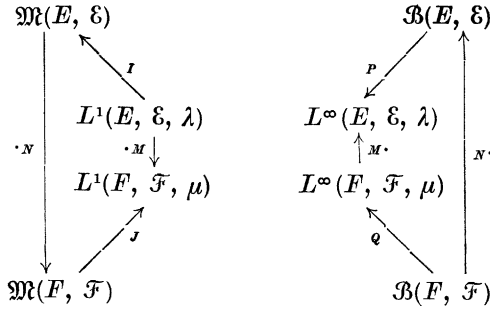
$$\int (fM) d\mu = \int f d\lambda.$$

3. Operatore markoviano indotto da un nucleo.

Siano M un operatore markoviano, relativo alla coppia $(E, \mathcal{E}, \lambda)$, (F, \mathcal{F}, μ) , N un nucleo, relativo alla coppia $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$.

(*) È a questi operatori che viene riservato il termine « operatore markoviano » da alcuni autori, i quali preferiscono usare, nel caso generale (in cui la norma sia ≤ 1), la locuzione « operatore sotto-markoviano ».

Diremo che M ed N sono tra loro *compatibili*, o che M è *indotto* da N , se il diagramma seguente è commutativo (per il che basta, evidentemente, che tale sia la metà sinistra o la metà destra del digramma).



In questo diagramma, I denota l'iniezione canonica $f \mapsto f \cdot \lambda$ di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ in $\mathfrak{M}(E, \mathcal{E})$ (e J l'analoga iniezione di $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ in $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$), mentre P denota la proiezione $g \mapsto \tilde{g}$ di $\mathfrak{B}(E, \mathcal{E})$ su $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$ (e Q l'analoga proiezione di $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$ su $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$).

È chiaro che, assegnato un nucleo N , affinché questo induca un operatore markoviano, occorre e basta che la parte sinistra di N trasformi misure di base λ in misure di base μ , o — equivalentemente — che la parte destra di N trasformi funzioni μ -trascurabili in funzioni λ -trascurabili. In tal caso, l'operatore markoviano indotto da N è unico: la sua parte sinistra si può considerare come ottenuta « restringendo » la parte sinistra del nucleo N alle sole misure di base λ , mentre la sua parte destra è ottenuta « passando al quoziente » sulla parte destra del nucleo N .

Sappiamo (cfr. (1.1)) che un nucleo è individuato dalla famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ definita da $\nu_x = \varepsilon_x N$. La condizione di compatibilità tra il nucleo N e l'operatore markoviano M deve dunque potersi esprimere per mezzo della sola famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$. Sussiste, in effetti, la proposizione seguente:

(3.1) PROPOSIZIONE. *Siano M un operatore markoviano, $(\nu_x)_{x \in E}$ una famiglia di elementi di $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$, positivi e di norma ≤ 1 , \mathcal{K} una parte di $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$, tale che il minimo sotto-spazio vettoriale monotono di $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$ contenente \mathcal{K} coincida con $\mathfrak{B}(F, \mathcal{F})$.*

Le condizioni seguenti sono allora equivalenti:

- (a) *esiste un nucleo N , (necessariamente unico), compatibile con l'operatore markoviano M , tale che sia $\nu_x = \varepsilon_x N$ per ogni elemento x di E ;*

(b) la famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ è scalarmente \mathcal{E} -misurabile e tale che si abbia

$$\int \lambda(dx) f(x) \langle \nu_x, g \rangle = \langle \tilde{f}M, \tilde{g} \rangle_\mu = \langle \tilde{f}, M\tilde{g} \rangle_\lambda$$

per ogni elemento f di $\mathcal{B}(E, \mathcal{E})$ ed ogni elemento g di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$;

(c) per ogni elemento g di \mathcal{C} , la funzione $x \mapsto \langle \nu_x, g \rangle$ è misurabile su (E, \mathcal{E}) , e la classe di equivalenza da essa individuata in $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$ coincide con $M\tilde{g}$.

DIM. L'equivalenza delle condizioni (a), (b) è una conseguenza diretta della definizione di compatibilità e della proposizione (1.1).

L'equivalenza tra le condizioni (b) e (c) si ottiene immediatamente osservando che la classe costituita dalle funzioni g , appartenenti a $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$, per le quali la funzione $x \mapsto \langle \nu_x, g \rangle$ gode della proprietà descritta in (c), è uno spazio vettoriale monotono.

(3.2) COROLLARIO. Sia M un operatore markoviano e sia N un nucleo con esso compatibile. Affinchè la norma di M sia eguale ad 1, occorre e basta che, per λ -quasi ogni x , la misura $\nu_x = \varepsilon_x N$ abbia norma eguale ad 1 (cioè sia una misura di probabilità).

DIM. Basta prendere come funzione g , nella condizione (c) della proposizione precedente, la costante 1 (e tener presente la proposizione (2.3)).

(3.3) COROLLARIO. Sia M un operatore markoviano e sia N un nucleo con esso compatibile. Affinchè un assegnato nucleo N' sia anch'esso compatibile con M , è sufficiente che, per λ -quasi ogni x , la misura $\nu'_x = \varepsilon_x N'$ coincida con la misura $\nu_x = \varepsilon_x N$. Questa condizione è anche necessaria nel caso in cui la tribù \mathcal{F} sia di tipo numerabile.

(3.4) TEOREMA. Si supponga che F sia munito di una topologia separata, localmente compatta e dotata di base numerabile, e che \mathcal{F} coincida con la tribù di Borel relativa a questa topologia. Si supponga inoltre che la tribù \mathcal{E} sia di tipo numerabile.

In queste ipotesi, per ogni operatore markoviano M esiste almeno un nucleo con esso compatibile.

DIM. Sia \mathcal{K} un insieme numerabile di funzioni reali continue su F , positive ed a supporto compatto, tale che ogni funzione continua, positiva ed a supporto compatto su F sia l'inviluppo superiore di una successione crescente di elementi di \mathcal{K} (cfr. [8], (0.1)).

Sia inoltre $(f_{x,n})_{x \in E, n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di elementi di $\Omega^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ godente della proprietà descritta nel lemma (0.2). Per ogni elemento g di \mathcal{K} , per ogni elemento x di E e per ogni intero n , si ponga

$$P_n(x, g) = \langle \tilde{f}_{x,n}, M\tilde{g} \rangle_\lambda = \langle \tilde{f}_{x,n}M, \tilde{g} \rangle_\mu = \langle \nu_{x,n}, g \rangle,$$

dove $\nu_{x,n}$ denota la misura $(\tilde{f}_{x,n}M) \cdot \mu$ (misura di base μ e di densità $\tilde{f}_{x,n}M$).

Grazie alle proprietà della famiglia $(f_{x,n})$, comunque si fissi g , la successione $(P_n(\cdot, g))$ converge quasi dappertutto verso una funzione \mathcal{E} -misurabile $P(\cdot, g)$, la cui classe di equivalenza in $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$ coincide con $M\tilde{g}$.

Sia Z un insieme λ -trascurabile, tale che la relazione

$$P(x, g) = \lim_n P_n(x, g)$$

sia vera per ogni elemento x di $E - Z$ e per ogni elemento g di \mathcal{K} .

Per ogni elemento x di $E - Z$, la successione $(\nu_{x,n})$ di misure su (F, \mathcal{F}) (positive e di norma ≤ 1) verifica allora la relazione

$$\lim \langle \nu_{x,n}, g \rangle = P(x, g) \quad \text{per } g \in \mathcal{K},$$

e pertanto (cfr. [4], (7.2.8)) converge vagamente verso una misura ν_x (positiva e di norma ≤ 1), godente della proprietà:

$$\langle \nu_x, g \rangle = P(x, g) \quad \text{per } g \in \mathcal{K}.$$

Posto $\nu_x = 0$ per $x \in Z$, la famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ soddisfa alla condizione (c) della proposizione (3.1) (è chiaro che lo spazio vettoriale monotono generato da \mathcal{K} coincide con $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$). Ciò prova la tesi.

(3.5) OSSERVAZIONE. È appena il caso di osservare che, nel lemma (0.2) (e quindi nel teorema (3.4)), l'ipotesi che \mathcal{E} sia di tipo numerabile può essere sostituita con l'ipotesi più generale che esista un insieme Z , appartenente ad \mathcal{E} e λ -trascurabile, tale che la tribù traccia di \mathcal{E} su $E - Z$ sia di tipo numerabile.

4. Operatori di speranza condizionale e loro versioni regolari. Disintegrazione di una misura.

Vogliamo ora occuparci di un tipo particolare di operatori markoviani: gli operatori cosiddetti « di speranza condizionale ».

Consideriamo, a questo scopo, un'applicazione p di F in E , misurabile rispetto alle tribù \mathcal{E} e \mathcal{F}_μ , e supponiamo che la misura λ coincida con l'immagine, mediante p , della misura $\hat{\mu}$.

In queste ipotesi, se f è una funzione appartenente a $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ la funzione $f \circ p$ appartiene a $L^1(F, \mathcal{F}_\mu, \hat{\mu})$, e si ha:

$$\int (f \circ p) d\hat{\mu} = \int f d\lambda.$$

L'applicazione $f \mapsto f \circ p$ è dunque un'applicazione lineare, positiva di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ in $L^1(F, \mathcal{F}_\mu, \hat{\mu})$, la quale conserva le seminorme. Essa passa al quoziente e definisce un'applicazione lineare positiva di $L^1(E, \mathcal{E}, \lambda)$ in $L^1(F, \mathcal{F}, \mu)$ conservante le norme: ossia un operatore markoviano M , di norma unitaria.

Questo operatore gode evidentemente delle proprietà seguenti:

- (4.1) $1M = 1$ (dove 1 denota la classe di equivalenza determinata, in L^1 , dalla costante 1).
- (4.2) $\langle \tilde{f}_1 M, \tilde{f}_2 M \rangle = \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle$, per ogni coppia f_1, f_2 di elementi di $\mathcal{B}(E, \mathcal{E})$.
- (4.3) $M(\tilde{f}M) = \tilde{f}$, per ogni elemento f di $\mathcal{B}(E, \mathcal{E})$.

È interessante esaminare il comportamento della « parte destra » dell'operatore M .

Fissato un elemento g di $\mathcal{B}(F, \mathcal{F})$, l'elemento $M\tilde{g}$ (di $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$) è caratterizzato dalla relazione:

$$\langle \tilde{h}, M\tilde{g} \rangle_\lambda = \langle \tilde{h}M, \tilde{g} \rangle_\mu \quad \text{per ogni } h \in \mathcal{B}(E, \mathcal{E}).$$

In altri termini: un elemento f di $\mathcal{B}(E, \mathcal{E})$ appartiene alla classe di equivalenza $M\tilde{g}$, se e solo se verifica la relazione:

$$(4.4) \quad \int hf d\lambda = \int (h \circ p)g d\hat{\mu} \quad \text{per ogni } h \in \mathcal{B}(E, \mathcal{E}),$$

relazione che può scriversi:

$$(4.5) \quad \int (h \circ p)(f \circ p) d\hat{\mu} = \int (h \circ p)g d\hat{\mu} \quad \text{per ogni } h \in \mathfrak{B}(E, \mathfrak{E}).$$

Nel caso in cui μ (e quindi λ) sia una misura di probabilità, la proprietà di f espressa dalle relazioni (4.4), (4.5) si può enunciare dicendo che « f è una versione della speranza condizionale di g (sullo spazio probabilizzato $(F, \mathcal{F}_\mu, \hat{\mu})$), rispetto all'applicazione misurabile p di (F, \mathcal{F}_μ) in (E, \mathfrak{E}) », oppure dicendo che « $f \circ p$ è una versione della speranza condizionale di g (sullo spazio probabilizzato $(F, \mathcal{F}_\mu, \hat{\mu})$), rispetto alla sotto-tribù $p^{-1}(\mathfrak{E})$ della tribù \mathcal{F}_μ ».

Per questa ragione, l'operatore markoviano M si chiama un operatore di *speranza condizionale*: e, quando esista un nucleo con esso compatibile, si suol dire che M ammette una *versione regolare*.

La proposizione seguente fornisce un'utile caratterizzazione dei nuclei compatibili con un operatore di speranza condizionale.

(4.6) PROPOSIZIONE. *Sia M l'operatore di speranza condizionale sopra definito, e sia N un nucleo. Posto $\nu_x = \varepsilon_x N$ per ogni x di E , le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (a) N è compatibile con M ;
- (b) risulta $\mu = \int \lambda(dx) \nu_x$, e inoltre, fissato comunque un elemento A di \mathfrak{E} , si ha che, per λ -quasi ogni x di A , la misura ν_x è portata dall'insieme $p^{-1}(A)$ (nel senso che il complementare di questo insieme è contenuto in un insieme appartenente alla tribù \mathcal{F} e ν_x -trascurabile).

Alla proposizione è utile premettere il seguente lemma.

(4.7) LEMMA. *Siano M, M' due operatori markoviani, tali che si abbia:*

- (a) $1M = 1$;
- (b) $1M' = 1$;
- (c) $M'(\tilde{I}_A M) = \tilde{I}_A$ per ogni elemento A di \mathfrak{E} .

Allora M ed M' coincidono.

DIM. del lemma.

Basta provare che risulta

$$(4.8) \quad \langle \tilde{I}_A, Mg \rangle_\lambda = \langle \tilde{I}_A, M'g \rangle_\lambda$$

per ogni elemento A di \mathcal{E} ed ogni elemento g di $L^\infty(F, \mathcal{F}, \mu)$.

Ora, sfruttando l'ipotesi (b), il primo membro della relazione da dimostrare si può manipolare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}_A, Mg \rangle_\lambda &= \langle \tilde{I}_A M, g \rangle_\mu = \langle 1, g(\tilde{I}_A M) \rangle_\mu = \\ &= \langle 1 M', g(\tilde{I}_A M) \rangle_\mu = \langle 1, M'(g(\tilde{I}_A M)) \rangle_\lambda = \\ &= \langle \tilde{I}_A, M'(g(\tilde{I}_A M)) \rangle_\lambda + \langle \tilde{I}_{A^c}, M'(g(\tilde{I}_A M)) \rangle_\lambda. \end{aligned}$$

Dall'ipotesi (c) segue d'altra parte $|M'(g(\tilde{I}_A M))| \leq \|g\| M'(\tilde{I}_A M) = \|g\| \tilde{I}_A$, e quindi:

$$(4.9) \quad \langle \tilde{I}_{A^c}, M'(g(\tilde{I}_A M)) \rangle_\lambda = 0.$$

Alla differenza tra il secondo ed il primo membro di (4.8) si può dunque dare, tenendo conto dell'ipotesi (a), l'espressione seguente:

$$\langle \tilde{I}_A, M'g \rangle_\lambda - \langle \tilde{I}_A, M'(g(\tilde{I}_A M)) \rangle_\lambda = \langle \tilde{I}_A, M'(g(\tilde{I}_{A^c} M)) \rangle_\lambda.$$

Da questa risulta che la differenza di questione è nulla (ciò si può vedere sostituendo, nella relazione (4.9), l'insieme A con il suo complementare).

Passiamo ora a dimostrare la proposizione (4.6).

(a) \Rightarrow (b). Si supponga N compatibile con M . La relazione $\mu = \int \lambda(dx) \nu_x$ (che si può scrivere anche $\mu = \lambda N$) è allora una conseguenza della proprietà (4.1) dell'operatore M . Rimane da provare che, fissato un elemento A di \mathcal{E} , per λ -quasi ogni x di A la misura ν_x è portata dall'insieme $p^{-1}(A)$.

A questo scopo, si scelga un insieme B , appartenente alla tribù \mathcal{F} , il quale contenga l'insieme $p^{-1}(A^c)$ e ne differisca per un insieme $\hat{\mu}$ -trascurabile. La funzione I_B differisce allora dalla funzione $I_{A^c} \circ p$ per una funzione $\hat{\mu}$ -trascurabile, talchè risulta $\tilde{I}_B = \tilde{I}_{A^c} M$, e quindi (in virtù

di (4.3))

$$M\tilde{I}_B = M(\tilde{I}_{A^c}M) = \tilde{I}_{A^c}.$$

Ne segue (cfr. (3.1), (c))

$$\nu_x(B) = I_{A^c}(x) \quad \text{per } \lambda\text{-quasi ogni } x.$$

In particolare, per λ -quasi ogni x di A , risulta $\nu_x(B) = 0$: per ciascuno di questi elementi x di A , la misura ν_x è dunque portata dall'insieme $p^{-1}(A)$.

(b) \Rightarrow (a). Si supponga soddisfatta la condizione (b). Il nucleo N trasforma allora la misura λ nella misura μ , e quindi induce un operatore markoviano M' . Occorre provare che M' coincide con M : e per questo basta provare che è soddisfatta la condizione (c) del lemma precedente. Fissato l'elemento A di \mathcal{E} , siano B_1, B_2 due elementi di \mathcal{F} verificanti le relazioni

$$B_1 \subset p^{-1}(A) \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0.$$

Risulta allora

$$\tilde{I}_A M = \tilde{I}_{B_1} = \tilde{I}_{B_2},$$

mentre l'elemento $M'\tilde{I}_{B_1} = M'\tilde{I}_{B_2}$ coincide con la classe di equivalenza individuata, in $L^\infty(E, \mathcal{E}, \lambda)$, da ciascuna delle due funzioni $x \mapsto \nu_x(B_1), x \mapsto \nu_x(B_2)$ (cfr. (3.1), (c)).

Dimostrare la relazione $M'(\tilde{I}_A M) = \tilde{I}_A$ equivale dunque a provare che è

$$\nu_x(B_1) = \nu_x(B_2) = I_A(x) \quad \text{per } \lambda\text{-quasi ogni } x.$$

Ora, per λ -quasi ogni x di A^c , la misura ν_x è portata da $p^{-1}(A^c)$, talchè risulta

$$\nu_x(B_1) \leq \hat{\nu}_x(p^{-1}(A)) = 0;$$

così pure, per λ -quasi ogni x di A , la misura ν_x è normalizzata e portata da $p^{-1}(A)$, talchè risulta

$$0 \leq 1 - \nu_x(B_2) = \nu_x(B_2^c) \leq \hat{\nu}_x(p^{-1}(A^c)) = 0.$$

Ciò prova la tesi.

Dalla proposizione precedente risulta (ove si tenga presente (1.1)) che, per l'operatore di speranza condizionale M , l'esistenza di una versione regolare equivale all'esistenza di una famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ di elementi di $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$, positivi e di norma ≤ 1 , la quale sia scalarmente \mathfrak{E} -misurabile e verifichi la condizione (b) della proposizione precedente. Una tale famiglia si suol chiamare una *disintegrazione* della misura μ , rispetto all'applicazione misurabile p di (F, \mathcal{F}_μ) in (E, \mathfrak{E}) .

Questa terminologia (introdotta da N. Bourbaki, cfr. [3], § 3, n° 1, Th. 1) appare particolarmente espressiva nel caso speciale in cui la tribù \mathfrak{E} goda della proprietà seguente:

(4.10) Esiste una parte numerabile \mathfrak{G} di \mathfrak{E} , tale che ogni atomo (*) di \mathfrak{E} sia l'intersezione degli elementi di \mathfrak{G} che lo contengono.

In tal caso, infatti, è facile vedere che, affinché una famiglia $(\nu_x)_{x \in E}$ di elementi di $\mathfrak{M}(F, \mathcal{F})$, positivi e di norma ≤ 1 , scalarmente \mathfrak{E} -misurabile e verificante la relazione $\mu = \int \lambda(dx) \nu_x$, sia una disintegrazione di μ rispetto a p , occorre e basta che, per λ -quasi ogni x , la misura ν_x sia portata dall'insieme $p^{-1}(A(x))$, dove $A(x)$ denota l'atomo di \mathfrak{E} al quale appartiene x .

Infine, dal confronto dei risultati (3.4) e (4.6) discende il seguente teorema di esistenza di una disintegrazione:

(4.11) TEOREMA. *Nelle stesse ipotesi di (3.4), per ogni misura μ su F esiste una sua disintegrazione rispetto all'applicazione misurabile p di (F, \mathcal{F}_μ) in (E, \mathfrak{E}) .*

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. 1, 2, 3, 4, deuxième édition (1965).
- [2] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. 5 (Intégration des mesures) (1956).
- [3] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. 6 (Intégration vectorielle) (1959).

(*) Per atomo della tribù \mathfrak{E} intendiamo qui l'intersezione di tutti gli elementi di \mathfrak{E} contenenti un punto.

- [4] G. LETTA, *Théorie élémentaire de l'Intégration*, Corso di lezioni tenuto all'Università di Paris VII (Maitrise 1970-71, n. 323-324). Note ciclostilate.
- [5] M. METIVIER, *Limites projectives de mesures - Martingales - Applications*, *Annali di Matematica* (1963), pp. 225-352.
- [6] P.-A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann (1966).
- [7] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des probabilités*, Masson et C-ie (1964).
- [8] P. A. ZANZOTTO, *Sulla disintegrazione delle misure negli spazi localmente compatti*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, vol. 48 (1973), pp. 127-136.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 giugno 1973.