RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIE CLAUDE PÉLISSIER

Sur l'approximation des équations de Schrödinger non-linéaires par une méthode de décomposition

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 59-93

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__59_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Sur l'approximation des équations de Schrödinger non-linéaires par une méthode de décomposition.

MARIE CLAUDE PÉLISSIER (*)

Introduction.

L'objet de ce travail est de démontrer la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires appliquée à certaines équations de Schrödinger non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \sqrt{-1} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + Bu = f\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

où l'opérateur A est linéaire et l'opérateur B non linéaire monotone.

Ces problèmes ont été étudiés par Bardos et Brézis qui précisent une réalisation de l'opérateur ci-dessus et démontrent l'exostence et l'unicité d'une solution dans ce cadre; cf. [2]. D'autres résultats théoriques sur les équations de Schrödinger linéaires ou non linéaires figurent dans les travaux de Pozzi [10].

La méthode des pas fractionnaires [3], [4], [5] est particulièrement intéressante pour approcher le problème (E): elle permet en effet de séparer, dans le schéma semi-discret auquel elle conduit, le terme non linéaire B du terme linéaire $\sqrt{-1}A$ (que l'on peut éventuellement décomposer). Les problèmes stationnaires obtenus à chaque pas de

(*) Indirizzo dell'A.: Université de Paris-Sud, Département de Mathématique - Batiment 425 - 91-Orsay, Francia.

temps sont particulièrement simples à résoudre ainsi que leurs analogues discrets.

Ce n'est que pour démontrer la convergence des solutions approchées que l'on réintroduit le cadre de Bardos-Brézis; en effet les techniques de Temam [5] permettent d'obtenir les estimations a priori classiques pour le problème de Schrödinger, mais ces estimations sont insuffisantes pour passer à la limite. Il faut alors faire appel aux méthodes de [2] pour aboutir au résultat de convergence.

On a préféré, dans une première partie, exposer les idées de base sur le problème semi-discret avant d'aborder la discrétisation en les variables d'espace.

REMARQUE. Le Professeur E. Magenes, que je remercie de s'être intéressé à ce travail, nous a posé le problème de l'approximation des équations de la forme

$$\sqrt{-1}\,\frac{du}{dt} = Au + Bu \tag{E'}$$

avec A linéaire et B non linéaire monotone. Une difficulté supplémentaire apparaît: dans ce cas il n'y a même plus d'estimation a priori sur le terme non linéaire.

Il n'existe pas à notre connaissance de résultats d'existence pour l'équation (E') avec B monotone. Le cas où B est lipschitzien a été étudié par Pozzi [10].

Je tiens tout particulièrement à remercier le Professeur R. Temam de m'avoir proposé ce sujet de recherche et encouragée jusqu'à son aboutissement.

1. Le problème exact.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$, Ω situé localement d'un seul côté de sa frontière, $T > 0$, $Q = \Omega \times]0, T[$.

Soit W l'espace de Banach (sur $\mathbb{C}$) $L^p(0, T; W_0^{M,q}(\Omega))$ (*) avec

(*) $W^{M,q}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de $L^q(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre M inclus sont dans $L^q(\Omega)$, $W_0^{M,q}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{M,q}(\Omega)$. $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, $H_0^s(\Omega) = W_0^{s,2}(\Omega)$.

$2 \leqslant p < \infty$, $2 \leqslant q$, $0 \leqslant M$, W' son dual, et B un opérateur non linéaire de W dans W' vérifiant les hypothèses suivantes:

(1) B est strictement monotone:

$$\operatorname{Re}\langle Bu - Bv, u - v\rangle > 0 \qquad \forall u,\ v \in W,\ u \neq v .$$

(2) B est hémicontinu: $\forall (u, v) \in W \times W$, l'application

$$t \mapsto B[tu + (1-t)v]$$

est continue de $[01]$ dans W faible.

(3) B est borné

(4) B est coercif: $\lim\limits_{\|v\| \to +\infty} \langle Bv, v\rangle / \|v\| = +\infty$.

On montre comme dans [1] que sous les hypothèses (1) (2) B est de type M, c'est-à-dire que

(5) Si $u_i \rightharpoonup u$ dans W faible, et si $Bu_i \rightharpoonup \eta$ dans W' faible, $Bu = \eta$ dès que $\limsup \operatorname{Re}\langle Bu_i, u_i\rangle \leqslant \operatorname{Re}\langle \eta, u\rangle$.

Soit d'autre part $A(t)$ l'opérateur non borné dans $L^2(Q)$ de domaine

(6)
$$\left\{\begin{array}{l} D(A(t)) = \{u \in L^2(Q);\ u \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))\} , \\ A(t)u \ = \sqrt{-1}\left(-\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x,t)\,u\right) \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et c sont des fonctions réelles de classe C^1 sur $\bar{Q}$ vérifiant:

(i) $$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \qquad \forall i, j ,$$

(ii) $$c(x,t) \geqslant 0 ,$$

(iii) il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de x et t telle que pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ de $\mathbf{R}^n$ on ait

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_i \xi_i^2 .$$

On note avec Bardos et Brézis [2] Λ la fermeture dans $L^2(Q)$ de l'opérateur $d/dt + A(t)$ au sens suivant: Posant

$$\Phi(\Lambda) = \Big\{u \in L^2(Q);\ pp \text{ en t } \big(u(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big),$$
$$t \mapsto A(t)u(t) \text{ et } t \mapsto \frac{du}{dt} \in L^2(Q)\Big\}, \quad D(\mathring{\Lambda}) = \{u \in \Phi(\Lambda);\ u(0) = 0\},$$

l'opérateur de domaine $D(\mathring{\Lambda})$ défini par $u \to (du/dt + A(t)u)$ est fermable.

Soit Λ sa fermeture (de domaine $D(\Lambda)$). L'adjoint Λ^* de Λ (de domaine $D(\Lambda^*)$) coincide alors avec la fermeture de l'opérateur $u \to (-du/dt - A(t)u)$ de domaine $D(\mathring{\Lambda}^*) = \{u \in \Phi(\Lambda);\ u(T) = 0\}$.

Dans [2] il est montré de plus que l'opérateur Λ restreint à $D(\Lambda) \cap W$ et considéré comme opérateur non borné de W dans W' est également fermable de fermeture notée Λ_W (domaine $D(\Lambda_W)$), et que Λ_W coïncide avec $(\Lambda^*_{/W})^*$ sorte que, pour $f \in W'$, la proposition

$$\begin{cases} \langle u, \Lambda^* v\rangle = \langle f, v\rangle & \forall v \in D(\Lambda^*) \cap W, \\ u \in W, \end{cases}$$

est équivalente à

$$\begin{cases} u \in D(\Lambda_W), \\ \Lambda_W u = f \quad \text{dans } W'. \end{cases}$$

Dans ce même article Bardos et Brézis démontrent le théorème:

THÉORÈME 1. *Soit B un opérateur non linéaire de W dans W' vérifiant les hypothèses* (1) (2) (3) (4). *Soit $A(t)$ un opérateur non borné dans $L^2(Q)$ vérifiant* (6), *Λ la fermeture dans $L^2(Q)$ de l'opérateur $d/dt + A(t)$, Λ^* l'adjoint de Λ. Alors pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et pour tout $f \in W'$ il existe un u unique dans W vérifiant:*

$$(7) \quad \langle u, \Lambda^* v\rangle + \langle Bu, v\rangle = \langle f, v\rangle + (u_0, v(0)) \quad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap W.$$

De plus $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$ et $u(0) = u_0$.

REMARQUE 1. u est donc une solution faible du problème de Schrödinger

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \sqrt{-1}\left(-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x, t)u\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

REMARQUE 2. Choisissant $W = L^p(Q)$ on peut considérer le cas où $Bu = |u|^{p-2}u$, et, pour $W = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ le cas

$$Bu = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{Re} u\right|^{p-2}\frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial x_i}\right].$$

REMARQUE 3. Remplaçant éventuellement f par $f - B0$ on peut supposer que $B0 = 0$ et ainsi l'hypothèse (1) entraîne

$$(1') \qquad \operatorname{Re}\langle Bu, u\rangle > 0 \quad \forall u \in W,\ u \neq 0\,.$$

Dans la suite on fera sur B l'hypothèse plus forte

$$(1'') \qquad \operatorname{Re}\langle B(t)u, u\rangle > 0 \quad \forall u \in W_0^{M,q}(\Omega),\ u \neq 0\,,\ ppt \in [0T]\,.$$

2. Le problème approché semi-discret.

Pour simplifier l'exposé nous supposerons dans ce paragraphe et le suivant que $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ et $c = 0$. Nous noterons $a_{ii} = a_i$.

L'intervalle $[0T]$ est divisé en $(N+1)$ intervalles de longueur k destinée à tendre vers zéro. On remplace d/dt par un quotient différentiel et l'on utilise la décomposition «naturelle» de $A(t)$ en n opérateurs

$$A_i(t) = -\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

On définit alors $m = n + 1$ fonctions approchées $u_{i,k}$ par la méthode des pas fractionnaires ([3], [4], [5]).

$$(\text{II}.1) \qquad u_{i,k}(t) = u_k^{r+i/m} = \mathrm{C^{te}} \quad \text{sur } [rk, (r+1)k[\,,$$

$u_k^{r+i/m}$ étant défini par récurrence à partir de $u_k^0 = u_0$ par les équations:

pour $i = 1 \dots n$

$$(\text{II}.2.i) \qquad \begin{cases} \dfrac{u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}}{k} + A_k^{r+i/m} u_k^{r+i/m} = 0\,, \\ u_k^{r+i/m} \in D(A_i)\,, \end{cases}$$

pour $i = n+1$

$$\text{(II.2.}n+1\text{)} \qquad \begin{cases} \dfrac{u_k^{r+1} - u_k^{r+n/m}}{k} + B_k^{r+1} u_k^{r+1} = f_k^{r+1}, \\ u_k^{r+1} \in W_0^{M,q}(\Omega), \end{cases}$$

où $A_k^{r+i/m}$ désigne l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$ de domaine

$$\text{(II.3)} \qquad \left| \begin{array}{l} D(A_i) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \right. \\ \qquad\qquad \left. \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega),\ u \cos(\nu, x_i) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \\ \nu \text{ normale extérieure à } \Omega, \\ A_k^{r+i/m} u = -\dfrac{\sqrt{-1}}{k} \displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dt, \end{array} \right.$$

$$\text{(II.4)} \qquad \left| \begin{array}{l} B_k^{r+1} u = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} B(t) u(t)\, dt, \\ f_k^{r+1} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} f(t)\, dt, \end{array} \right.$$

On supposera de plus que:

$$\text{(II.5)} \qquad \begin{cases} f \in L^2(Q), \\ \operatorname{Re} \langle B(t)u, u \rangle + \mu |u|^p_{L^2(\Omega)} \geqslant \beta \|u\|^p_{W^0_{M,q}(\Omega)} \qquad \text{p.p. } t \in [0T], \\ \mu \geqslant 0,\ \beta > 0. \end{cases}$$

Comme $-A_k^{r+i/m}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contraction dans $L^2(\Omega)$ (II.2.i) a bien une unique solution pour tout i, $i = 1 \dots n$.

D'autre part il résulte des hypothèses faites sur B (hypothèses (1), (2), (3), (4), II.5)) que (II.2.$n+1$) admet également une unique solution.

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses du théorème* 1, *si* k *tend vers zéro pour* $i = 1 \dots n+1$

$$u_{i,k} \rightharpoonup u \quad \textit{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \textit{ faible}^*$$

$$u_{n+1,k} \rightharpoonup u \quad \textit{dans } W \textit{ faible}.$$

La démonstration du théorème se fait à l'aide de lemmes:

Obtention des estimations a priori.

LEMME 1. On a les majorations suivantes:

$$|u_k^{r+i/m}|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \qquad \text{pour } i = 1 \dots n+1 \tag{II.6}$$

$$\|u_{n+1,k}\|_W^p = k \sum_{r=0}^{N} \|u_k^{r+1}\|^p_{W_0^{M,q}(\Omega)} \leqslant C' \tag{II.7}$$

$$\|Bu_{n+1,k}\|_{W'} \leqslant C'' \tag{II.8}$$

C, C', C'' désignant des constantes indépendantes de k.

DÉMONSTRATION. Pour $i = 1 \dots n+1$ on multiplie (II.2.i) par $u_k^{r+i/m}$ et on prend la partie réelle. Il vient: pour $i = 1 \dots n$

$$|u_k^{r+i/m}|^2 - |u_k^{r+(i-1)/m}|^2 + |u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}|^2 = 0 \tag{II.9.i}$$

$$\begin{aligned} &|u_k^{r+1}|^2 - |u_k^{r+n/m}|^2 + |u_k^{r+1} - u_k^{r+n/m}|^2 + \\ &\qquad + 2k \operatorname{Re} \langle B_k^{r+1} u_k^{r+1}, u_k^{r+1} \rangle = 2k \operatorname{Re} (f_k^{r+1}, u_k^{r+1}) . \end{aligned} \tag{II.9.$n+1$}$$

En utilisant la monotonie de B, (II.9.$n+1$) devient

$$|u_k^{r+1}|^2 - |u_k^{r+n/m}|^2 + |u_k^{r+1} - u_k^{r+n/m}|^2 \leqslant 2kT |f_k^{r+1}|^2 + \frac{k}{2T} |u_k^{r+1}|^2 \tag{II.10}$$

et l'on déduit de (II.9.i) et (II.10) la majoration

$$|u_k^{q+j/m}|^2 \leqslant \exp(m)\Big(|u_0|^2 + 2kT \sum_{r=0}^{N} |f_k^{r+1}|^2\Big) \tag{II.11}$$

valable pour $q = 0 \dots N$, $j = 1 \dots m$.

De l'inégelité de Schwartz découle

$$(\text{II}.12)\qquad k\sum_{r=0}^{N}|f_k^{r+1}|^2\leqslant\int_0^T|f(t)|^2dt$$

d'où l'inégalité (II.6) avec

$$C=\exp(m)\left(|u_0|^2+2T\int_0^T|f(t)|^2dt\right).$$

Reste à montrer (II.7):

Pour cela on ajoute membre à membre les égalités (II.9.i) pour $i=1\ldots n+1$, $r=0\ldots N$.

Il vient:

$$(\text{II}.13)\qquad |u_k^{N+1}|^2+\sum_{i=2}^{m}\sum_{r=0}^{N}|u_k^{r+i/m}-u_k^{r+(i-1)/m}|^2+$$
$$+2k\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{N}\langle B_k^{r+1}u_k^{r+1},u_k^{r+1}\rangle=|u_0|^2+2k\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{N}\langle f_k^{r+1},u_k^{r+1}\rangle$$

qui avec l'hypothèse (II.5) donne

$$(\text{II}.14)\qquad 2k\beta\sum_{r=0}^{N}\|u_k^{r+1}\|^p\leqslant|u_0|^2+\frac{k}{2T}\sum_{r=0}^{N}|u_k^{r+1}|^2+2k\mu\sum_{r=0}^{N}|u_k^{r+1}|^p+$$
$$+2kT\sum_{r=0}^{N}|f_k^{r+1}|^2.$$

Utilisant (II.6) et (II.12) on obtient enfin

$$2k\beta\sum_{r=0}^{N}\|u_k^{r+1}\|^p\leqslant|u_0|^2+\frac{1}{2}\exp m\left(|u_0|^2+2T\int_0^T|f(t)|^2dt\right)+$$
$$+2\mu\left[\exp m\left(|u_0|^2+2T\int_0^T|f(t)|^2dt\right)\right]^{p/2}+2T\int_0^T|f(t)|^2dt$$

c'est-à-dire l'inégalité (II.7) cherchée puisque par définition de $u_{n+1,k}$

il est immédiat que

$$\|u_{n+1,k}\|_W^p = k \sum_{r=0}^{N} \|u_k^{r+1}\|^p_{W_0^{M,q}(\Omega)} .$$

De (II.7) et de l'hypothèse (3) sur B résulte alors (II.8). ∎

LEMME 2. Pour tout $i = 2 \dots n+1$

(II.5) $$(u_{i,k} - u_{i-1,k}) \to 0 \quad \text{dans } L^2(Q) \text{ fort} .$$

DÉMONSTRATION. Reprenant l'inégalité (II.13) on en déduit

$$\sum_{i=2}^{m} \sum_{r=0}^{N} |u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}|^2 \leqslant |u_0|^2 + 2T\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{2}\exp m \left(|u_0|^2 + 2T\int_0^T |f(t)|^2 dt\right) .$$

Donc

$$\sum_{i=2}^{m} \int_0^T |u_{i,k}(t) - u_{i-1,k}(t)|^2 dt = k\sum_{i=2}^{m} \sum_{r=0}^{N} |u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}|^2 \to 0 \\ \text{quand } k \to 0 .$$

Des lemmes 1 et 2 résulte l'existence d'une fonction

$$u^* \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; W_0^{M,q}(\Omega)) ,$$

d'une fonction $\eta \in L^{p'}(0, T; W^{-M,q'}(\Omega))$ et d'une sous-suite k', telles que, pour $i = 1 \dots m$

(II.16) $$\begin{cases} u_{i,k} \rightharpoonup u^* & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible * ,} \\ u_{n+1,k} \rightharpoonup u^* & \text{dans } W \text{ faible ,} \end{cases}$$

(II.17) $$Bu_{n+1,k} \rightharpoonup \eta \quad \text{dans } W' \text{ faible .}$$ ∎

La difficulté essentielle sera par la suite de prouver que $\eta = Bu^*$.

Passage à la limite.

LEMME 3. u^* est solution dans W de l'équation

(II.18) $$\langle u^*, \Lambda^* v\rangle = \langle f - \eta, v\rangle + (u_0, v(0)) \quad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap W .$$

Démonstration. Elle nécessitera plusieurs lemmes intermédiaires. Nous poserons $E = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap W_0^{M,q}(\Omega)$.

Lemme 3.1. u^* est presque partout égale à une fonction (toujours notée u^*) continue de $[0T]$ dans E' et vérifiant

$$\text{(II.19)} \qquad \begin{cases} u^*(0) = u_0 \,, \\ u'_* + Au_* + \eta = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[; E') \,. \end{cases}$$

Démonstration du lemme 3.1. Soit t fixé. Multiplions les équations (II.2.i) par $v \in E$ et sommons pour $r = 0 \ldots q = E(t/k)$, $i = 1 \ldots n+1$.

Il vient:

$$\left(u_{n+1,k}(t), v\right) = (u_0, v) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{(q+1)k} \sqrt{-1}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i}\right) \bar{v}\, dx\, ds - \\ - \int_0^{(q+1)k} \langle B u_{n+1,k}, v\rangle\, ds + \int_0^{(q+1)k} (f, v)\, ds \,.$$

Soit, puisque $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset D(A_\iota)$

$$\left(u_{n+1,k}(t), v\right) = (u_0, v) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{(q+1)k} \sqrt{-1}\, u_{i,k}\, \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)}\, dx\, ds - \\ - \int_0^{(q+1)k} \langle B u_{n+1,k}, v\rangle\, ds + \int_0^{(q+1)k} (f, v)\, ds$$

et passant à la limite sur la suite k', le second membre a une limite, donc le premier aussi, soit $g(t)$ (voir [5] p. 213, lemme 6.2.)

$$\text{(II.20)} \qquad g(t) = (u_0, v) + \int_0^t \left(u^*(s), A(s)v\right) ds - \int_0^t \langle \eta(s), v\rangle\, ds + \int_0^t \left(f(s), v\right) ds$$

Donc pour tout $t \in [0T]$ $\left(u_{n+1}(t), v\right) \to g(t)$ et d'après (II.6) l'application $t \to g(t)$ est essentiellement borné sur $[0T]$ indépendamment de k.

Soit alors $\varphi \in \mathfrak{D}[0, T]$. D'après le théorème de Lebesgue

$$\int_0^T \big(u_{n+1,k}(t), v\big)\varphi(t)\, dt \to \int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt .$$

Or

$$u_{n+1,k} \rightharpoonup u^* \ L^\infty\big(0, T; L^2(\Omega)\big) \quad \text{faible} *$$

on peut donc affirmer que

$$\int_0^T \big(u_{n+1,k}(t), v\big)\varphi(t)\, dt \to \int_0^T \big(u^*(t), v\big)\varphi(t)\, dt .$$

Donc

$$\int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt = \int_0^T \big(u^*(t), v\big)\, \varphi(t) dt, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}[0T]$$

et

$$g(t) = \big(u^*(t), v\big) \text{ p.p.}$$

(II.20) devient donc:

$$\text{(II.21)} \quad \big(u^*(t), v\big) + \int_0^t \big(u^*(s), -A(s)v\big)\, ds + \int_0^t \langle \eta(s), v\rangle\, ds =$$

$$= (u_0, v) + \int_0^t \big(f(s), v\big)\, ds \qquad \forall v \in E .$$

Or, par définition du prolongement de $A(s)$, si $u^*(s) \in L^2(\Omega)$ et $v \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

$$\big(u^*(s), A(s)v\big) = -\langle A(s)u^*(s), v\rangle_{D(A),(D(A))'} .$$

D'où finalement

$$u^*(t) + \int_0^t A(s)u^*(s)\, ds + \int_0^t \eta(s)\, ds = u_0 + \int_0^t f(s)\, ds \qquad \text{pp. } t \in [0T] .$$

Donc u^* est presque partout égale à une fonction continue de $[0T]$ dans E' vérifiant

$$u^*(0) = u_0 .$$

Dérivant dans $\mathcal{D}'(0, T; E')$ on obtient:

$$u'^*(t) + A(t)u^*(t) + \eta(t) = f(t)$$

d'où le lemme 3.1. ∎

On note $D(\mathring{A}^*) = \{u \in \Phi(A); u(T) = 0\}$.

Lemme 3.2. Si $w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $w' \in L^2(0, T; E')$.
Si $v \in D(\mathring{A}^*) \cap W$

$$\int_0^T (w', v)\,dt = -\int_0^T (w, v')\,dt - \big(w(0), v(0)\big). \tag{II.22}$$

Remarque 3.2 (voir [6]). Sous les hypothèses du lemme 3.2.

$$w \in C\big([0, T]; [L^2(\Omega), E']_{\frac{1}{2}}\big)$$
$$v \in C\big([0, T]; [E, L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}\big)$$

donc tous les produits scalaires écrits dans (II.22) ont un sens.

Démonstration du lemme 3.2. D'après [6] on sait que

$$\mathcal{D}\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)$$

est dense dans $\{w; w \in L^2(Q), w' \in L^2(E')\}$ puisque $L^2(\Omega) \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} E'$.

De plus l'application trace $w \mapsto w(0)$ est linéaire continue à valeurs dans $[L^2(\Omega), E']_{\frac{1}{2}}$.

De même

$\mathcal{D}\big([0T]; E\big)$ est dense dans $\Phi(A) \cap W$ et les applications traces $v \mapsto v(0)$ et $v \mapsto v(T)$ sont linéaires continues de $\Phi(A)$ dans $[E, L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}$. Donc $\{v; v \in \mathcal{D}\big([0T]; E\big), v(T) = 0\}$ est dense dans $D(\mathring{A}^*) \cap W$.

(II.22) se déduit alors immédiatement par densité de la formule analogue où

$$v \in \mathcal{D}\big([0T]; L^2(\Omega)\big) \quad \text{et} \quad w \in \mathcal{D}\big([0T]; E\big), w(T) = 0. \qquad ∎$$

Démonstration du lemme 3. Reprenons (II.19):

$$f \in W', \quad \eta \in W', \quad u^* \in L^2(Q) \quad \text{donc } Au^* \in L^2\big((D(A))'\big)$$

d'où $u'^* \in L^2(0, T; E')$ et l'égalité (II.19) est une égalité dans $L^2(0, T; E')$.

Multiplions scalairement (II.19) par v tel que

$$v(t) = \varphi(t)k\,, \qquad \varphi \in \mathcal{D}[0T], \varphi(T) = 0\,, \qquad k \in E$$

et intégrons de 0 à T. Il vient:

$$\text{(II.23)} \qquad \int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) u^*(t), v\right) dt = \langle f - \eta, v\rangle$$

et par densité (II.23) est vrai $\forall v \in D(\mathring{\Lambda}^*) \cap W$.

Appliquant alors le lemme 3.2. on en déduit:

$$\text{(II.24)} \quad \int_0^T \left(u^*, \left(-\frac{d}{dt} - A(t)\right) v\right) dt = \langle f - \eta, v\rangle + \big(u_0, v(0)\big) \qquad \forall v \in D(\mathring{\Lambda}^*) \cap W\,.$$

Λ^* est la fermeture de l'opérateur $-(d/dt) - A(t)$ considéré comme opérateur non borné dans H de domaine $D(\mathring{\Lambda}^*)$.

De (II.24) on déduit donc immédiatement, par fermeture (II.18). ∎

Lemme 4.

$$\text{(II.25)} \qquad u^* \in C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)\,.$$

Ce lemme découle immédiatement de deux lemmes démontrés par Bardos-Brézis [2].

Lemme 4.1.

$$\text{(II.26)} \qquad D(\Lambda_W) \subset C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)\,.$$

Lemme 4.2. Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ il existe un couple $\{h, g\} \in W \times W'$ tel que

$$\text{(II.27)} \qquad \langle h, \Lambda^* v\rangle + \langle g, v\rangle = \big(u_0, v(0)\big) \qquad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap W\,.$$

De plus $h \in C\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)$ et $h(0) = u_0$.

Nous rappelons brièvement la construction de h qui nous sera utile dans la suite:

De la densité de la trace de $\Phi(\Lambda) \cap W$ en 0 dans $L^2(\Omega)$ on déduit qu'il existe une suite

$$u_M \in \Phi(\Lambda) \cap W, \qquad u_M(0) \to u_0 \quad L^2(\Omega) \text{ fort} \tag{II.27.1}$$

Soit alors J l'application de dualité de $W \to W'$ (J existe car W' est uniformément convexe). J vérifie les hypothèses (1), (2), (3), (4). D'autre part $A(t)u_M + u'_M \in W'$.

Donc d'après le théorème 1 il existe w_M unique dans W tel que

$$\langle w_M, \Lambda^* v\rangle + \langle (w_M + u_M), v\rangle = \langle A(t)u_M + u'_M, v\rangle \qquad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap W$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} w_M \in D(\Lambda_W), \\ \Lambda_W w_M = -J(w_M + u_M) - A(t)u_M - u'_M. \end{cases} \tag{II.27.2}$$

On obtient alors h comme limite dans W faible de la suite

$$u_M + w_M. \tag{II.27.3}$$

Démonstration du lemme 4. Utilisant le lemme 4.2. on voit que $u^* - h$ est solution de

$$\begin{cases} u^* - h \in W, \\ \langle u^* - h, \Lambda^* v\rangle = \langle f + g - \eta, v\rangle \qquad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap W. \end{cases} \tag{II.28}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} u^* - h \in D(\Lambda_W), \\ \Lambda_W(u^* - h) = f + g - \eta. \end{cases} \tag{II.29}$$

D'où d'après (II.26) $u^* - h \in C([0, T]; L^2(\Omega))$; et du lemme (4.2.) on conclue

$$u^* \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \qquad \blacksquare$$

DÉMONSTRATION DE $\eta = Bu^*$.

LEMME 5. u^* vérifie l'inégalité:

$$\text{(II.30)}\quad \limsup \operatorname{Re}\int_0^T \langle Bu_{n+1,k}, u_{n+1,k}\rangle\, dt \leqslant \operatorname{Re}\int_0^T (\eta, v)\, dt + \operatorname{Re}\int_0^T (f, u^* - v)\, dt + \frac{1}{2}|u_0 - v(0)|^2 - \operatorname{Re}\int_0^T \langle Av + v', u^* - v\rangle\, dt \qquad \forall v \in \Phi(\Lambda) \cap W .$$

Pour démontrer ce lemme, nous avons besoin de deux lemmes préliminaires:

LEMME 5.1. Si $v_k^{r+i/m} \in E \;\; \forall i = 1 \dots n+1, \; \forall r = 0 \dots N$ on a l'inégalité

$$\text{(II.31)}\quad \operatorname{Re}\sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^N (u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) + \tfrac{1}{2}|u_0 - v_0|^2 \geqslant \operatorname{Re}\sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^N (v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) .$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m} = \varphi_k^{r+i/m}$$

(II.31) s'écrit alors

$$\operatorname{Re}\sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^N (\varphi_k^{r+i/m} - \varphi_k^{r+(i-1)/m}, \varphi_k^{r+i/m}) + \tfrac{1}{2}|\varphi^0|^2 \geqslant 0 .$$

Or

$$2 \operatorname{Re}\sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^N (\varphi_k^{r+i/m} - \varphi_k^{r+(i-1)/m}, \varphi_k^{r+i/m}) = |\varphi^{N+1}|^2 + \sum_{i=2}^m \sum_{r=0}^N |\varphi_k^{r+i/m} - \varphi_k^{r+(i-1)/m}|^2 - |\varphi^0|^2$$

d'où immédiatement (II.31). ∎

LEMME 5.2. Si l'on prend

$$v_k^{r+i/m} = \left(\frac{i}{m}\right) \psi((r+1)k)w + \left(\frac{m-i}{m}\right)\psi(rk)w$$

avec $\psi \in \mathcal{D}[0T]$ et $w \in E$ alors:

$$\text{(II.32)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) = 0(k) + \\ & + \operatorname{Re}\int_0^T \left(\psi'(t)w, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{ik}(t) - \psi(t)w\right) dt\,. \end{aligned} \right.$$

DÉMONSTRATION. Pour ce choix de $v_k^{r+i/m}$

$$v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m} = \frac{1}{m}\left[\left(\psi(r+1)k - \psi(rk)\right)w\right].$$

Alors

$$\text{(II.33)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m}) = \\ & = \operatorname{Re}\sum_{r=0}^{N} \left[\left(\psi(r+1)k - \psi(rk)\right) w, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_k^{r+i/m}\right] = \\ & \qquad = \operatorname{Re}\int_0^T \left(\psi'(t)\,w, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{ik}(t)\right) dt\,, \end{aligned} \right.$$

$$\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m}, v_k^{r+i/m}) =$$

$$= \frac{1}{m}\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{N}\left(\left(\psi(r+1)k - \psi(rk)\right) w, \left(\frac{m+1}{2}\psi(r+1)k + \frac{m-1}{2}\psi(rk)\right) w\right) =$$

$$= \int_0^T \left(\psi'(t)\,w, \psi(t)\,w\right) dt + \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{N} |\left(\psi(r+1)\,k - \psi(rk)\right) w|^2\,.$$

Or $|\psi((r+1)k) - \psi(rk)| \leqslant k \sup_{t\in[0T]} |\psi'(t)|$ et puisque $(N+1)k = T$ on obtient:

$$\text{(II.34)} \quad \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m}, v_k^{r+i/m}) = \int_0^T \left(\psi'(t)\,w, \psi(t)\,w\right) dt + 0(k)\,.$$

Retranchant alors (II.34) de (II.33) on obtient (II.32). ■

DÉMONSTRATION DU LEMME 5. Elle découle alors des lemmes 5.1. et 5.2. Pour $i = 1 \dots n + 1$ on multiplie (II.3.i) par $u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}$ où $v_k^{r+i/m}$ est défini comme au lemme 5.2. Il vient:

$$i = 1 \dots n$$

$$\text{(II.35.}i\text{)} \qquad (u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) + \\ + k(A_k^{r+i/m} u_k^{r+i/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) = 0$$

$i = n + 1$

$$\text{(II.35.}n+1\text{)} \quad (u_k^{r+i/m} - u_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) + \\ + k(B_k^{r+1} u_k^{r+1}, u^{r+1} - v_k^{r+1}) = k(f_k^{r+1}, u_k^{r+1} - v_k^{r+1}) .$$

Prenant la partie réelle de (II.35.i) on somme pour $i = 1 \dots n + 1$, $r = 0 \dots N$. En utilisant la positivité de $A_k^{r+i/m}$ et le lemme 5.1. il vient:

$$\text{(II.36)} \qquad \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_k^{r+i/m} - v_k^{r+(i-1)/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) + \\ + k \operatorname{Re} \sum_{r=0}^{N} (B_k^{r+1} u_k^{r+1}, u_k^{r+1} - v_k^{r+1}) + k \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} \cdot \\ \cdot (A_k^{r+i/m} v_k^{r+i/m}, u_k^{r+i/m} - v_k^{r+i/m}) \leqslant \tfrac{1}{2} |u_0 - v^0|^2 + k \operatorname{Re} \sum_{r=0}^{N} (f_k^{r+1}, u_k^{r+1} - v_k^{r+1}) .$$

Puis on passe à la limite supérieure dans (II.36) en utilisant le lemme 5.2., (II.16) et (II.17). On obtient alors (II.30) pour tous les v de la forme $v = \varphi \otimes w$ où $\varphi \in \mathcal{D}[0T]$ et $w \in E$, sous-ensemble dense de $\Phi(A) \cap W$.

Le lemme 5 en découle donc par densité. ∎

LEMME 6.

$$\text{(II.37)} \qquad \eta = Bu^* .$$

L'idée de la démonstration est de faire tendre dans (II.30) v vers u^*. On utilise pour cela le lemme 4.2.:

Soit u_M défini par (II.27.1).

On peut choisir dans (II.30) v de la forme

$$\text{(II.38)} \qquad \begin{cases} v_M = u_M + y_M\,, \\ y_M \in \Phi(\Lambda) \cap W\,, \\ y_M(0) = 0\,. \end{cases}$$

Par définition de Λ_W, (II.30) reste valable en remplaçant $Av_M + v'_M$ par $\Lambda_W y_M + Au_M + u'_M$, c'est à dire en remplaçant (II.38) par:

$$\text{(II.39)} \qquad \begin{cases} v_M = u_M + y_M\,, \\ u_M \text{ défini par (II.27.1)}\,, \\ y_M \in D(\Lambda_W)\,. \end{cases}$$

On considère alors h défini par (II.27) et l'on pose $\xi = u^* - h$. Alors d'après (II.29) $\xi \in D(\Lambda_W)$. On peut donc dans (II.39) prendre

$$\text{(II.40)} \qquad \begin{cases} y_M = \xi + w_M\,, \\ \xi \;= u^* - h\,, \\ w_M \text{ défini par (II.27.2)}\,. \end{cases}$$

(II.30) s'écrit alors:

$$\text{(II.41)} \qquad \begin{cases} \limsup \operatorname{Re}\displaystyle\int_0^T \langle Bu_{n+1,k}, u_{n+1,k}\rangle\, dt \leqslant \\ \qquad \leqslant \operatorname{Re}\displaystyle\int_0^T (\eta, v_M)\, dt + \operatorname{Re}\int_0^T (f, u^* - v_M)\, dt + \\ + \dfrac{1}{2}\,|u_0 - u_M(0)|^2 - \operatorname{Re}\displaystyle\int_0^T (\Lambda_W(w_M + \xi) + Au_M + u'_M, u^* - v_M)\, dt\,, \\ u_M,\ v_M,\ w_M,\ \xi \text{ définis par (II.39), (II.40)}\,. \end{cases}$$

Or d'après (II.27.2)

$$\text{(II.42)} \qquad \Lambda_W w_M + Au_M + u'_M = -J(w_M + u_M)$$

et la monotonie de J entraîne

$$\text{(II.43)} \qquad \operatorname{Re}\big(J(w_M+u_M),\, h-(u_M+w_M)\big) \leqslant \operatorname{Re}\big(J(h),\, h-(u_M+w_M)\big)$$

Grâce à (II.42) et (II.43), (II.41) devient:

$$\text{(II.44)} \qquad \limsup \operatorname{Re}\int_0^T \langle Bu_{n+1,k},\, u_{n+1,k}\rangle\, dt <$$
$$< \operatorname{Re}\int_0^T (\eta,\, v_M)\, dt + \operatorname{Re}\int_0^T (f,\, u^* - v_M)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2}|u_0 - u_M(0)|^2 - \operatorname{Re}\int_0^T (\Lambda_W\xi - J(h),\, u^* - v_M)\, dt\,.$$

On peut alors dans (II.44) passer à la limite sur la suite v_M:

En effet de (II.27.3) il résulte que $v_M \rightharpoonup u^*$ dans W faible et de (II.27.1) que $u_M(0) \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

On obtient ainsi

$$\text{(II.45)} \qquad \limsup \operatorname{Re}\int_0^T \langle Bu_{n+1,k},\, u_{n+1,k}\rangle\, dt \leqslant \operatorname{Re}\int_0^T (\eta,\, u^*)\, dt\,.$$

D'où (II.37) puisque B est de type M et que $u_{n+1,k} \rightharpoonup u^*$ dans W faible et $Bu_{n+1,k} \rightharpoonup \eta$ dans W' faible. ∎

De (II.18) et (II.37) on déduit donc que u^* est solution de (8). L'unicité de la solution dans W de (8) nous prouve alors que $u^* = u$, et que dans (II.6) il y a convergence des suites $u_{i,k}$ tout entières.

On a ainsi démontré le théorème 2.

Remarque. La méthode de semi-discrétisation nous a permis de redémontrer le théorème 1, l'unicité exceptée.

Théorème 3. *Soit u la solution du problème* (7), *où l'opérateur linéaire B vérifie les hypothèses* (1″), (2), (3), (4), (II.5). *Si de plus il existe* *une application* $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *strictement croissante, avec* $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r) = +\infty$, *telle que pour tout couple* $(u, v) \in W \times W$ *on ait*

$$\text{(II.46)}\qquad \operatorname{Re}\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geqslant \big(\varphi(\|u\|) - \varphi(\|v\|)(\|u\| - \|v\|)\big)$$

alors

$$\text{(II.47)}\qquad \begin{cases} u_{n+1,k} \to u & W \textit{ fort}, \\ u_{i,k}(t) \to u(t) & L^2(\Omega) \textit{ fort} \text{ p.p. } t \qquad \forall i = 1 \dots n+1 . \end{cases}$$

Démonstration. Elle découle immédiatement d'un lemme de Brézis-Sibony [9].

Lemme 7. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $r_\lambda \in \mathbb{R}_+$ $\forall \lambda \geqslant 0$. Soit φ une application croissante de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\text{(II.48)}\qquad \big(\varphi(r_\lambda) - \varphi(r)\big)(r_\lambda - r) \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Alors $r_\lambda \to r$ quand $\lambda \to 0$.

De (II.46) il découle

$$0 \leqslant \big(\varphi(\|u_{n+1,k}\|) - \varphi(\|u\|)\big)(\|u_{n+1,k}\| - \|u\|) \leqslant \operatorname{Re}\langle Bu_{n+1,k} - Bu, u_{n+1,k} - u\rangle$$

Utilisant alors (II.45) et la convergence faible de $u_{n+1,k}$ vers u on en déduit

$$\big((\varphi(\|u_{n+1,k}\|) - \varphi(\|u\|)\big)(\|u_{n+1,k}\| - \|u\|) \overset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et grâce au lemme 7, $\|u_{n+1,k}\| \to \|u\|$.

L'espace $W = L^p(0, T; W_0^{M,q}(\Omega))$ étant uniformément convexe ceci entraîne

$$u_{n+1,k} \to u \qquad W \text{ fort} \qquad (\text{et } L^2(Q) \text{ fort})$$

donc $u_{n+1,k}(t) \to u(t)$ $\quad L^2(\Omega)$ fort $\quad$ p.p. t et du lemme 2 on déduit

$$u_{i,k} \to u \qquad L^2(Q) \text{ fort}$$

$$u_{i,k}(t) \to u(t) \qquad L^2(\Omega) \text{ fort} \qquad \text{p.p. } t .$$

D'où le théorème 3. ∎

3. Le problème approché discret.

On emploie ici des méthodes analogues à celles du II ci-dessus, mais l'on discrétise en plus sur les variables d'espace.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE. Soit $g_i \in L^2(\Omega)$. On sait montrer l'existence et l'unicité de la solution dans $D(A_i)$ du problème

$$\text{(III.1.}i\text{)}\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 U^i}{\partial x_i^2} = g_i\,, \\ U^i \cos(\nu, x_i) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma\,. \end{cases}$$

Approximation d'espace.

Notons $\mathcal{H} = [0,1]^n$ et pour chaque $h \in \mathcal{H}$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ définissons comme dans [7] [8]

— $\mathcal{R}_h$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ de la forme $(j_1 h_1, \dots, j_n h_n)$ j_i entiers de signe quelconque,

— $\sigma_h(M)$ le pavé $\prod_{i=1}^{n} [\mu_i - h_i/2, \mu_i + h_i/2[$ de centre $M = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n$

— w_{hM} la fonction caractéristique de $\sigma_h(M)$,

$$\text{(III.2)}\qquad \begin{cases} \Omega_h^i = \left\{M \in \mathcal{R}_h;\ \sigma_h\left(M + \varepsilon\dfrac{h_i}{2}\right) \subset \Omega \qquad \varepsilon = \mp 1\right\} \qquad i = 1, \dots, n\,, \\ \Omega_h^{n+1} = \left\{M \in \mathcal{R}_h;\ \sigma_h(M) \subset \Omega\right\}\,. \end{cases}$$

— δ_i l'opérateur de différences finies

$$\delta_i \varphi(x) = \frac{1}{h_i}\left[\varphi\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - \varphi\left(x - \frac{h_i}{2}\right)\right] \qquad i = 1, \dots, n\,.$$

On introduit alors $(n+1)$ familles d'espaces vectoriels de dimension finie

$$\text{(III.3)}\qquad V_h^i = \{u_h;\ u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^i} u_h(M) w_{hM}(x) \qquad u_h(M) \in \mathbf{C}\}$$

et $(n+1)$ applications linéaires continues de $V_h^i \to L^\varrho(\Omega)$ $1 \leqslant \varrho < +\infty$, toutes notées q_h,

$$q_h v_h^i = v_{h/\Omega}^i \text{ (restriction de } v_h^i \text{ à } \Omega) . \tag{III.4}$$

Les V_h^i sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u_h^i, v_h^i)_h = (q_h u_h^i, q_h v_h^i) \quad \forall u_h^i, v_h^i \in V_h^i , \quad i = 1 \dots n+1 . \tag{III.5}$$

Lemme de consistance 8.1. Pour tout $u \in L^\varrho(\Omega)$ $1 \leqslant \varrho < +\infty$, pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $(n+1)$ fonctions $u_h^{*i} \in V_h^i$

$$q_h u_h^{*i} \to u \quad L^\varrho(\Omega) \text{ fort} \quad 1 \leqslant \varrho < +\infty , \quad i = 1 \dots n+1 . \tag{III.6.i.}$$

Démonstration. Elle est immédiate en procédant par exemple comme dans [8]. ■

Prenant $g_h^i \in V_h^i$ tel que $g_h^i(M) = (h_1 \dots h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M)} g_i(x)\, dx$ on démontre sans difficultés qu'il y a existence et unicité de $U_h^i \in V_h^i$ vérifiant

$$-\delta_i^2 U_h^i = g_h^i \quad i = 1 \dots n \tag{III.7.i}$$

et que, pour tout $i = 1 \dots n$, si U_i désigne la solution de (III.1.i)

$$\left\{\begin{array}{ll} q_h U_h^i \to U^i & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} , \\ q_h \delta_i U_h^i \to \dfrac{\partial U^i}{\partial x_i} & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} , \\ q_h \delta_i^2 U_h^i \to \dfrac{\partial^2 U^i}{\partial x_i^2} & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} . \end{array}\right. \tag{III.8.i}$$

Approximation de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Soit alors $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cdot v \in D(A_i)$ $\forall i = 1 \dots n$ et on peut donc lui associer n fonctions $v_h^{*i} \in V_h^i$ définies de la manière suivante pour $i = 1 \dots n$:

$$\left\{\begin{array}{l} v_h^{*i} \text{ est la solution dans } V_h^i \text{ du problème} , \\ -\delta_i^2 v_h^i = g_h^i , \end{array}\right. \tag{III.9.i}$$

où $g_h^i \in V_h^i$ et est défini par

$$\text{(III.10.}i\text{)} \qquad g_h^i(M) = -(h_1, \dots, h_n)^{-1} \int_{\sigma_h(M)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x)\,dx \qquad \forall M \in \Omega_h^i .$$

Lemme de consistance 8.2. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ il existe n fonctions $v_h^{*i} \in V_h^i$ $i = 1, \dots, n$ vérifiant

$$\text{(III.11.}i\text{)} \qquad q_h v_h^{*i} \to v \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \qquad i = 1, \dots, n ,$$

$$\text{(III.12.}i\text{)} \qquad q_h \delta_i v_h^{*i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \qquad i = 1, \dots, n ,$$

$$\text{(III.13.}i\text{)} \qquad q_h \delta_i^2 v_h^{*i} \to \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \qquad i = 1, \dots, n .$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de ce qui précède.

Corollaire. Soit $\alpha \in C^1(\bar{\Omega})$. Posant

$$\text{(III.14)} \qquad \left| \begin{array}{l} \Omega_h = \Big\{ M \in \mathfrak{R}_h ;\ \exists i \in (1, \dots, n)\ \exists p_i = \mp 1, \\ \qquad\qquad\qquad \sigma_h\left(M + p_i \dfrac{h_i}{2}\right) \cap \Omega \neq \emptyset \Big\} , \\ \alpha_h^* = \sum\limits_{M \in \Omega_h} \alpha(M) w_{hM} , \end{array} \right.$$

alors

$$\text{(III.15.}i\text{)} \qquad q_h \delta_i(\alpha_h^* \delta_i v_h^{*i}) \to \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \qquad \forall i,\ i = 1, \dots, n .$$

Démonstration. Il est bien connu (voir par exemple [8]) que

$$q_h \alpha_h^* \to \alpha \qquad L^2(\Omega) \text{ fort}$$

et

$$q_h \delta_i \alpha_h^* \to \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \qquad L^2(\Omega) \text{ fort} .$$

Il suffit alors de décomposer $(\partial/\partial x_i)(\alpha(\partial v/\partial x_i)) = (\partial\alpha/\partial x_i)(\partial v/\partial x_i) + \alpha(\partial^2 v/\partial x_i^2)$ pour obtenir le résultat cherché. ∎

Approximation des opérateurs.

Pour tout i, $i = 1, \ldots, n$, on posera pour u_h^i et $v_h^i \in V_h^i$

$$\text{(III.16)} \qquad a_h^{r+i/m}(u_h^i, v_h^i) = \frac{\sqrt{-1}}{k} \int_{rk}^{(r+1k)} \left(\int_\Omega a_{ih} \delta_i u_h^i \overline{\delta_i v_h^i}\, dx \right) dt\,,$$

où, pour tout t, $a_{ih}(t)$ est défini à partir de a_i par (III.14). On définit ainsi des opérateurs anti-autoadjoints

$$\text{(III.17)} \quad \begin{cases} A_h^{r+i/m} \in \mathcal{L}(V_h^i, V_h^i)\,, \\ (A_h^{r+i/m} u_h^i, v_h^i)_h = -(u_h^i, A_h^{r+i/m} v_h^i)_h = a_h^{r+i/m}(u_h^i, v_h^i) \\ \hfill \forall u_h^i\,,\ v_h^i \in V_h^i\,. \end{cases}$$

Pour simplifier l'exposé on fera sur B l'hypothèse supplémentaire (qui évite de discrétiser B en espace)

$$\text{(III.18)} \qquad M = 0\,,$$

La famille d'opérateurs B_h^{r+1} sera alors définie par

$$\text{(III.19)} \quad \begin{cases} (B_h^{r+1} u_h^m, v_h^m)_h = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} \langle B(t) q_h u_h^m, q_h v_h^m \rangle\, dt \qquad \forall u_h^m\,,\ v_h^m \in V_h^m\,, \\ B_h^{r+1} \in \mathcal{L}(V_h^m, V_h^m)\,. \end{cases}$$

Comme dans la partie II, on suppose de plus que

$$\text{(III.20)} \qquad f \in L^2(Q)$$

$$\text{(III.21)} \qquad \operatorname{Re} \langle B(t) u, u \rangle + \mu |u|^p \geqslant \beta \|u\|^p \qquad \text{p.p. } t \in [0T],\ \mu \geqslant 0,\ \beta > 0$$

et l'on décompose f sous la forme

$$\text{(III.22)} \qquad f = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \qquad f_i \in L^2(Q)\,.$$

Du lemme 8.1. résulte l'existence pour presque tout t, et pour

$i = 1, \ldots, n+1$ de fonctions $f^*_{ih} \in V^i_h$ telles que

(III.23) $\qquad q_h f^*_{ih}(t) \to f_i(t) \quad$ dans $L^2(\Omega)$ fort p.p. t.

On pose alors

(III.24)
$$\left\{\begin{array}{l} f_h^{r+i/m} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{rk}^{(r+1)k} f^*_{ih}(t)\,dt\,, \\ f_h^{r+i/m} \in V^i_h\,. \end{array}\right.$$

Les fonctions approchées.

On définit comme dans [5] les fonctions approchées $u_{i,h}$ $i = 1, \ldots, n+1$. Ces fonctions dépendent de h et k. Pour allèger les notations, seule la dépendance en h sera mise en évidence.

(III.25) $\qquad u_{i,h}(t) = u_h^{r+i/m} (\in V^i_h) \quad$ sur $[rk, (r+1)k[\,, \quad r = 0, \ldots, N$.

Les $u_h^{r+i/m}$ sont définis par récurrence à partir de

(III.26) $\qquad u_h^0 = u^*_{0h} \quad q_h u_h^0 \to u_0\, L^2(\Omega)$ fort

comme solutions de

pour $i = 1, \ldots, n$

(III.27.i)
$$\frac{u_h^{r+i/m} - \tilde{u}_h^{r+(i-1)/m}}{k} + A_h^{r+i/m} u_h^{r+i/m} = f_h^{r+i/m} \; (*)$$

pour $i = n+1$

(IIII.27.$n+1$)
$$\frac{u_h^{r+1} - \tilde{u}_h^{r+n/m}}{k} + B_h^{r+1} u_h^{r+1} = f_h^{r+1} \; (*)\,.$$

L'existence et l'unicité d'une solution de (III.27.i) $i = 1, \ldots, n$ est immédiate par le théorème des projections. (III.27.$n+1$) possède également une solution unique (voir par exemple [5]).

(*) Pour $i=0, \ldots, n$, $\tilde{u}_h^{r+i/m}$ désigne l'élément de $V_h^{i+1}: v_h^{i+1} \mapsto (q_h u_h^{r+i/m}, q_h v_h^{i+1})$.

THÉORÈME 4. *Soit u la solution du problème de Schrödinger* (7). *Si h et k tendent vers zéro ainsi que h^2/k*

$$\text{pour } i = 1, \dots, n+1 \quad u_{,h/\Omega} \rightharpoonup u \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *$$

$$u_{n+1,h/\Omega} \rightharpoonup u \quad W \text{ faible .}$$

La démonstration se conduit de manière analogue à celle du théorème 2.

Obtention des estimations a priori.

LEMME 9.

$$\text{Pour} \quad i = 1, \dots, n+1 \quad q_h u_{i,h} \quad \text{est } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\text{-stable}$$

$$q_h u_{n+1,h} \quad \text{est } W\text{-stable}$$

$$B q_h u_{n+1,h} \quad \text{reste dans un borné de } W' .$$

DÉMONSTRATION. – Multipliant (III.27.i) par $u_h^{r+i/m}$ pour $i = 1, \dots, n+1$ on obtient l'inégalité analogue à (II.11) $q = 0, \dots, N$, $j = 1, \dots, m$

$$|u_h^{q+j/m}|_h^2 \leqslant \exp(m)\Big(|u_h^0|_h^2 + 2hT \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} |f_h^{r+i/m}|_h^2\Big) . \tag{III.28}$$

D'après (III.26)

$$|u_h^0|_h^2 = |q_h u_h^0|^2 \leqslant C_1 |u_0|^2 \tag{III.29}$$

C_1 constante indépendante de h et k. D'autre part

$$|f_h^{r+i/m}|_h^2 = \frac{1}{k^2}\left| \int_{rk}^{(r+1)k} q_h f_{ih}^*(t)\, dt \right|^2$$

et d'après (III.21)

$$|f_h^{r+i/m}|_h^2 \leqslant \frac{C_2}{k^2}\left| \int_{rk}^{(r+1)k} f_i(t)\, dt \right|^2 \leqslant \frac{C_2}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} |f_i(t)|^2 dt , \tag{III.30}$$

C_2 constante indépendante de h et k.

Utilisant (III.29) et (III.30) l'inégalité (III.28) donne:

$$\text{(III.31)} \qquad |u_h^{q+j/m}|_h^2 \leqslant C\left[|u_0|^2 + 2T\sum_{i=1}^{m}\int_0^T |f_i(t)|^2 dt\right]$$

$$q = 0, \ldots, N\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,,$$

C constante indépendante de h et k, ce qui démontre que

$$|q_h u_{i,h}(t)|^2 \leqslant C\left[|u_0|^2 + 2T\sum_{i=1}^{m}\int_0^T |f_i(t)|^2 dt\right] \qquad i = 1, \ldots, n+1\,.$$

C'est la $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ stabilité des u_{ih}.

De même et par analogie avec (II.13) on obtient l'égalité:

$$\text{(III.32)} \qquad |u_h^{N+1}|_h^2 + \sum_{i=2}^{m}\sum_{r=0}^{N}|u_h^{r+i/m} - u_h^{r+(i-1)/m}|_h^2 +$$

$$+ 2k\,\mathrm{Re}\sum_{r=0}^{N}(B_h^{r+1}u_h^{r+1}, u_h^{r+1})_h = |u_h^0|_h^2 + 2k\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}(f_h^{r+i/m}, u_h^{r+i/m})_h\,.$$

De (III.18) et (III.19) découle

$$\text{(III.33)} \qquad (B_h^{r+1}u_h^{r+1}, u_h^{r+1})_h \geqslant \beta\|q_h u_h^{r+1}\|^p - \mu|q_h u_h^{r+1}|^p$$

et, reportant (III.33) dans (III.32) il vient avec (III.29) et (III.30)

$$\text{(III.34)} \qquad 2k\beta\sum_{r=0}^{N}\|q_h u_h^{r+1}\|^p \leqslant \frac{k}{2T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}|u_h^{r+i/m}|_h^2 + 2k\mu\sum_{r=0}^{N}|u_h^{r+1}|^2 +$$

$$+ C_1|u_0|^2 + 2C_2T\sum_{i=1}^{m}\int_0^T|f_i(t)|^2 dt$$

ce qui démontre, (III.31) étant acquis, que

$$\text{(III.35)} \qquad \|q_h u_{n+1,h}\|^p = k\sum_{r=0}^{N}\|q_h u_h^{r+1}\|^p \leqslant C'$$

C' constante indépendante de h et k.

C'est la W-stabilité de $u_{n+1,h}$.

(III.36) $$\|Bq_h u_{n+1,h}\|' \leqslant C''$$

puisque B est borné et qu'on a montré (III.35). Le lemme 9 est ainsi complètement démontré. ■

LEMME 10. Pour tout $i = 2, \ldots, n+1$

(III.37) $$(q_h u_{i,h} - q_h u_{i-1,h}) \to 0 \quad \text{dans } L^2(H) \text{ fort}.$$

DÉMONSTRATION. Analogue à celle du lemme 2. ■

Des lemmes 9 et 10 résulte l'existence d'une fonction $u^* \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap W$, d'une fonction $\eta \in L^{p'}(0, T; W^{-M,q'}(\Omega))$ et d'une sous-suite h', k', telles que

pour $i = 1, \ldots, n+1$

(III.38) $$\begin{cases} q_h u_{i,h'} \rightharpoonup u^* & L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *, \\ q_h u_{n+1,h'} \rightharpoonup u^* & W \text{ faible}, \end{cases}$$

(III.39) $$Bq_h u_{n+1,h'} \rightharpoonup \eta \qquad W' \text{ faible}.$$

On démontrera, comme dans le cas semi-discret, que $\eta = Bu^*$.

Passage à la limite.

LEMME 11. u^* est solution dans W de l'équation

(III.40) $$\langle u^*, A^* v\rangle = \langle f - \eta, v\rangle + (u_0, v(0)) \qquad \forall v \in D A^*) \cap W.$$

DÉMONSTRATION. Elle suit très exactement celle du lemme 3.

LEMME 11.1. u^* est presque partout égale à une fonction (toujours notée u^*) continue de $[0T]$ dans E' et vérifiant:

(III.41) $$\begin{cases} u^*(0) = u_0, \\ u'^* + Au^* + \eta = f & \text{dans } \mathfrak{D}'(0, T; E'). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 11.1. Soit t fixé. Multiplions les équations (III.27.i) par $v_h^i \in V_h^i$ et sommons pour $r = 0, \dots, q = E(t/k)$ $i = 1, \dots, n+1$.

Il vient en utilisant (III.17)

$$(u_h^{q+1}, v_h^m)_h + \sum_{r=0}^{q} \sum_{i=2}^{m} (u_h^{r+(i-1)/m}, v_h^{i-1} - v_h^i)_h + \sum_{r=1}^{q} (u_h^r, v_h^m - v_h^1)_h +$$
$$+ k \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=0}^{q} a_h^{r+i/m}(u_h^{r+i/m}, v_h^i) + k \sum_{r=0}^{q} (B_h^{r+1} u_h^{r+1}, v_h^m)_h =$$
$$= (u_h^0, v_h^1)_h + k \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{q} (f_h^{r+i/m}, v_h^i)_h$$

ce qui s'écrit:

$$(\text{III.42}) \quad \begin{cases} (q_h u_{m,h}(t), q_h v_h^m) = \displaystyle\sum_{i=2}^{m} \frac{1}{k} \int_0^{(q+1)k} (q_h u_{i-1,h}(s), q_h v_h^i - q_h v_h^{i-1})\, ds + \\ + \displaystyle\frac{1}{k} \int_0^{qk} (q_h u_{m,h}(s), q_h v_h^1 - q_h v_h^m) + (q_h u_{0h}^*, q_h v_h^1) + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{-1} \int_0^{(q+1)k} \int_\Omega q_h u_{i,h}(s)\, \overline{q_h \delta_i (a_{ih}(s) \delta_i v_h^i)}\, dx ds - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^{(q+1)k} \langle B(s) q_h u_{m,h}(s), q_h v_h^m \rangle\, ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(q+1)k} (q_h f_{ih}(s), q_h v_h^i)\, ds\,. \end{cases}$$

Soit alors $v \in E$.

D'après les lemmes 8.1. et 8.2., pour tout $i = 1, \dots, n+1$, il existe $v_h^{*i} \in V_h^i$ avec

$$q_h v_h^{*i} \to v \quad L^2(\Omega) \text{ fort} \quad i = 1, \dots, n\,,$$
$$q_h v_h^{*m} \to v \quad L^{\alpha'}(\Omega) \text{ fort et } L^2(\Omega) \text{ fort}\,,$$
$$q_h \delta_i (a_{ih} \delta_i v_h^{*i}) \to \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \quad L^2(\Omega) \text{ fort} \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Nous écrivons alors (III.42) avec $v_h^i = v_h^{*i}$ et passons à la limite sur la suite h', k'.

La seule difficulté supplémentaire, par rapport au lemme 3.1., est de passer à la limite dans les termes du type

$$\frac{1}{k'}\int_0^{(q+1)k'}\left(q_{h'}\,u_{i-1,h'}(s),\ q_{h'}v_{h'}^{*i}-q_{h'}v_{h'}^{*i-1}\right)ds\ .$$

Pour cela il faut supposer que $|q_{h'}v_{h'}^{*i}-v|\to 0$ quand $h'\to 0$ plus vite que $1/k'$.

Or si v est suffisamment régulière $|q_{h'}v_{h'}^{*i}-v|=0(h'^2)$. Quitte donc, à remplacer $v\in E$ par $v\in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})\cap W_0^{M,\alpha}(\Omega)|v_{/\Gamma}=0$, sous-ensemble dense de E, on est conduit à faire l'hypothèse supplémentaire, peu gênante techniquement:

$$\text{(III.43)}\qquad h^2/k\to 0\ .$$

Les termes « parasites » tendent alors vers zéro et il en découle l'égalité (analogue à (II.21)):

$$\left(u^*(t),v\right)+\int_0^t\left(u^*(s),-A(s)v\right)ds+\int_0^t\langle\eta(s),v\rangle\,ds=$$
$$=(u_0,v)+\int_0^t\langle f(s),v\rangle\,ds\qquad\forall v\in E\ .\ \blacksquare$$

On obtient alors le lemme 11 sans rien changer à la démonstration qui du lemme 3.1. conduit au lemme 3, puis le résultat:

LEMME 12.

$$\text{(II.44)}\qquad u^*\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\ .$$

DÉMONSTRATION. La même que celle du lemme 4. ■

DÉMONSTRATION DE $\eta=Bu^*$

LEMME 13. u^* vérifie l'inégalité

$$\text{(III.45)}\qquad \limsup \operatorname{Re}\int_0^T\langle Bq_h u_{m,h},u_{m,h}\rangle\,dt\leqslant \operatorname{Re}\int_0^T\langle\eta,v\rangle\,dt+$$
$$+\operatorname{Re}\int_0^T\langle f,u^*-v\rangle\,dt+\frac{1}{2}|u_0-v(0)|^2-\operatorname{Re}\int_0^T\langle Av+v',u^*-v\rangle\,dt$$
$$\forall v\in\Phi(\Lambda)\cap W\ .$$

DÉMONSTRATION. Elle est très proche de celle du lemme 5. On démontre les deux lemmes préliminaires analogues aux lemmes 5.1. et 5.2.

LEMME 13.1. Si

$$v_h^{r+i/m} \in V_h^i \qquad \forall i = 1, \dots, n+1 \qquad \forall r = 0, \dots, N$$

alors:

$$\text{(III.46)} \quad \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (u_h^{r+i/m} - u_h^{r+(i-1)/m}, u_h^{r+i/m} - v_h^{r+i/m})_h + \tfrac{1}{2}|u_h^0 - v_h^0|_h^2 \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_h^{r+i/m} - v_h^{r+(i-1)/m}, u_h^{r+i/m} - v_h^{r+i/m})_h \,.$$

Même démonstration que pour le lemme 5.1.

LEMME 13.2. Soit $w \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{M,q}(\Omega)$, $w_{/\Gamma} = 0$ et $\psi \in \mathfrak{D}([0T])$. Soit w_h^{*i} vérifiant les conclusions des lemmes 8.1. et 8.2. pour tout i, $i = 1 \dots, n+1$.

On pose

$$v_h^{r+i/m} = \left(\frac{i}{m} \psi((r+1)k) + \frac{m-i}{m} \psi(rk)\right) w_h^{*i} \,.$$

Alors

$$\text{(III.47)} \quad \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_h^{r+i/m} - v_h^{r+(i-1)/m}, u_h^{r+i/m} - v_h^{r+i/m})_h = \sum_{i=1}^{m} 0(|w_h^{*i} - w|) +$$

$$+ 0(k) + \sum_{i=1}^{m} 0\left(\frac{1}{k}|w_h^{*i} - w|\right) + \operatorname{Re} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \left(\psi'(t) w_h^{*i}, u_{ih}(t) - \psi(t) w_h^{*i}\right) dt \,.$$

DÉMONSTRATION. Elle est voisine de celle du lemme 5.2. On notera, pour alléger, $w_h^{*i} = w_i$, $\psi(rk) = \psi_r$. On obtient après calculs:

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{N} (v_h^{r+i/m} - v_h^{r+(i-1)/m}, u_h^{r+i/m}) = \operatorname{Re} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \left(\psi'(t) w_i, u_{ih}(t)\right) dt +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (i-1) \int_0^T \left(\psi'(t)(w_i - w_{i-1}), u_{i,h}(t)\right) dt +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k} \int_0^T \left(\psi(t)(w_i - w_{i-1}), u_{ih}(t)\right) dt$$

puis:

$$\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}(v_h^{r+i/m}-v_h^{r+(i-1)/m}, v_h^{r+i/m}) = \operatorname{Re}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\int_0^T\big(\psi'(t)w_i, \psi(t)w_i\big)\,dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\frac{i-\frac{1}{2}}{m}|(\psi_{r+1}-\psi_r)w_i|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}\cdot\left(\left(\frac{i-1}{m}\psi_{r+1}+\frac{m-i+1}{m}\psi_r\right)(w_i-w_{i-1}), \left(\frac{i}{m}\psi_{r+1}+\frac{m-i}{m}\psi_r\right)w_i\right).$$

Ajoutant ces deux égalité, il en découle (III.47). ∎

Multipliant alors les équations (III.27.i) par $u_h^{r+i/m}-v_h^{r+i/m}$ où $v_h^{r+i/m}$ est choisi comme au lemme 13.2., on prend la partie réelle et on somme pour $i=1, \ldots, n+1$, $r=0, \ldots, N$.

On utilise la positivité de $A_h^{r+i/m}$ et le lemme 13.1. pour obtenir (comparer à II.36):

$$(\mathrm{III}.48)\quad \left|\begin{aligned} &\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}(v_h^{r+i/m}-v_h^{r+(i-1)/m}, u_h^{r+i/m}-v_h^{r+i/m})_h + \\ &+k\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{N}(B_h^{r+1}u_h^{r+1}, u_h^{r+1}-v_h^{r+1})_h + \\ &+k\operatorname{Re}\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}(A_h^{r+i/m}v_h^{r+i/m}, u_h^{r+i/m}-v_h^{r+i/m}) \leqslant \\ &\qquad\leqslant \tfrac{1}{2}|u_h^0-v_h^0|_h^2 + k\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{N}(f_h^{r+i/m}, u_h^{r+i/m}-v_h^{r+i/m})_h .\end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite supérieure dans (III.48). On transforme tout d'abord le premier membre de l'inégalité grâce au lemme 13.2. Puis, avec l'hypothèse (III.43), les lemmes 8.1 et 8.2., les convergences (III.38) et (III.39) permettent le passage à la limite.

On obtient alors l'inégalité (III.45) cherchée pour tous les v de la forme $v=\psi\otimes w$ où $\psi\in\mathfrak{D}[0T]$ et $w\in\mathfrak{D}(\bar{\Omega})\cap W_0^{M,q}(\Omega)$, $w_{/\Gamma}=0$, c'est-à-dire pour tous les v d'un sous-espace dense de $\Phi(\Lambda)\cap W$. Le lemme 13 en découle donc par densité. ∎

A partir de là, la démonstration du théorème 4 reproduit très exactement celle du théorème 2: J, h, ξ et les suites u_M et v_M étant définies comme dans le lemme 6, on montre que l'on peut remplacer (III.45) par l'inégalité

$$\text{(III.49)} \qquad \limsup \operatorname{Re}\int_0^T (Bq_h u_{n+1,h}, u_{n+1,h})\,dt \leqslant \operatorname{Re}\int_0^T (\eta, v_M)\,dt + $$
$$+ \operatorname{Re}\int_0^T (f, u^* - v_M)\,dt + \tfrac{1}{2}|u_0 - u_M(0)|^2$$
$$- \operatorname{Re}\int_0^T \big(\Lambda_W \xi - J(h), u^* - v_M\big)\,dt$$

et puisque $v_M \rightharpoonup u^*$ W faible et que $u_M(0) \rightharpoonup u_0$ $L^2(\Omega)$ fort on obtient l'inégalité (analogue à (II.45)).

$$\text{(III.50)} \qquad \limsup \operatorname{Re}\int_0^T (Bq_h u_{n+1,h}, u_{n+1,h})\,dt \leqslant \operatorname{Re}\int_0^T (\eta, u^*)\,dt$$

qui grâce à (III.38) et (III.39) entraîne, puisque B est de type M, que

$$\text{(III.51)} \qquad \eta = Bu^*$$

(III.40) montre alors que u^* est solution de (8), et l'unicité de la solution de (8) donnée par le théorème 1 nous permet d'affirmer que

$$\text{(III.52)} \qquad u^* = u$$

et que dans (III.38) il y a convergence des suites $u_{\cdot,h}$ tout entières.

On a ainsi démontré le théorème 4, et retrouvé par la méthode de discrétisation la partie existence du théorème 1.

THÉORÈME 5. *Soit u la solution du problème* (7) *où l'opérateur non linéaire B vérifie les hypothèses* (1″) (2) (3) (4) (III.21). *Si de plus il existe une application φ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strictement croissante, avec $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = +\infty$, telle que pour tout couple $(u, v) \in W \times W$ on ait*

$$\text{(III.53)} \qquad \operatorname{Re}\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geqslant \big(\varphi(\|u\|) - \varphi(\|v\|)\big)(\|u\| - \|v\|)$$

alors

$$\text{(III.54)} \qquad \begin{cases} u_{n+1,h/\Omega} \to u & W \text{ fort} \\ u_{i,h/\Omega} \to u & L^2(Q) \text{ fort} \quad \forall i = 1, \dots, n+1\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Le même que celle du théorème 3 en remplaçant $u_{n+1,k}$ par $q_h u_{n+1,h}$:

REMARQUE 5. Les théorèmes 4 et 5 sont bien sur, valables dans le cas général ($M \neq 0$). Il suffit pour cela de remplacer V_h^m par une approximation stable et consistante de l'espace $W_0^{M,q}(\Omega)$, ce qui n'offre pas de difficulté. Le passage à la limite sera tout à fait analogue à celui du cas $M = 0$.

REMARQUE 6. La condition supplémentaire $h^2/k \to 0$ provient de ce que l'on n'a pas su construire une approximation « globale » de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Une condition de ce type est *obligatoire* si l'on introduit n espaces V_h^i différentes pour les n directions de décomposition de l'opérateur de Schrödinger.

Dans le cas où Ω est un *pavé*, cette condition, purement technique, disparait. En effet le réseau peut être choisi de manière à avoir ses points frontaliers à une distance comprise entre h et $3h/2$ du bord du pavé (la « croix d'ordre 1 » associée est alors intérieure à Ω, mais la « croix d'ordre 2 » rencontre le bord), ce qui permet de construire aisément une approximation externe stable et consistante de $H_0^1(\Omega) \cap \cap H^2(\Omega)$.

Il en est de même chaque fois que l'on est en mesure d'exhiber un espace V_h, une application p_h: $V_h \to L^2(\Omega)$, une application r_h: $\{v, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), v_{/\Gamma} = 0\} \to V_h$, et des opérateurs A_h^i: $V_h \to V_h$, $i = 1, \dots, n$ tels que:

— A_h^i est anti-autoadjoint

— si $u_h \in V_h$ et $p_h u_h \rightharpoonup u$ $\quad L^2(\Omega)$ faible, si $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et $v_{/\Gamma} = 0$, alors

$$(u_h, A_h^i r_h v)_h \to \left(u, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right) \qquad \forall i = 1, \dots, n .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'Institut Fourier, **18** (1968), 115-175.

[2] C. BARDOS - H. BREZIS, Journal of Differential Equations, **6**, no. 2, (September 1969).

[3] G. I. MARCHUK, *Méthodes Numériques en Météorologie*, Novossibirsk, 1966 (en russe) et Armand Colin, Paris, 1971 (en français).

[4] N. N. YANENKO, *Méthode à pas fractionnaires*, Novossibirsk, 1965 (en russe) et Armand Colin, Paris, 1968 (en français).

[5] R. TEMAM, *Sur la stabilite et la convergence de la méthode des pas fractionnaires*, Annali di Matematica pura ed applicata, (4), **89** (1968), 191-380.

[6] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogénes*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[7] J. CEA, *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Annales de l'Institut Fourier, **14** (1964), 345-444.

[8] P. A. RAVIART, *Sur l'appro imation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires*, Journal de Math. Pures et Appl., **46** (1967), 11-183.

[9] H. BREZIS - M. SIBONY, *Méthodes d'approximations et d'itérations pour les opérateurs monotones*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis, **28**, no. 1 (1968), 59-82.

[10] G. A. POZZI, *Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazioni di evoluzione del tipo di Schroedinger lineari e non lineari*, Annali di Matematica pura ed applicata, (4), vol. LXXVIII, pp. 197-258 et vol. LXXXI, pp. 205-248.

[11] M. C. PELISSIER, *Sur l'approximation des équations de Schrödinger par la méthode des pas fractionnaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, **272**, Sêrie A. pp. 1097-1100.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1 settembre 1972.