

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MARTINO

Elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 50 (1973), p. 345-354

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__345_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

Elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo.

ENRICO MARTINO (*)

Introduzione.

Ricordiamo che un sottogruppo N d'un gruppo G è *neutro* se, e, solo se, sono soddisfatte le condizioni

- 1) $N \cup (V_1 \cap V_2) = (N \cup V_1) \cap (N \cup V_2),$
- 2) $N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2),$

per ogni coppia V_1, V_2 di sottogruppi di G .

Chiameremo \cup -distributivo (\cap -distributivo) un sottogruppo N soddisfacente alla 1) (soddisfacente alla 2)), di guisa che N è neutro se, e solo se, è simultaneamente \cup -distributivo ed \cap -distributivo.

I sottogruppi \cup -distributivi, i sottogruppi \cap -distributivi e quelli neutri sono stati caratterizzati da Zappa nel caso d'un gruppo finito ([3] e [4]). Higman e Sato hanno caratterizzato i sottogruppi \cup -distributivi rispettivamente d'un gruppo periodico e di un gruppo non periodico [3].

Non si ha invece, a quanto risulta all'autore della presente nota una caratterizzazione dei sottogruppi \cap -distributivi d'un gruppo infinito qualsiasi.

(*) Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico Università - Via Belzoni 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del C.N.R.

In [1] si è provato che, nel caso d'un gruppo localmente nilpotente, le tre menzionate classi di sottogruppi, nonchè altre classi di sottogruppi a priori più generali di quelle, coincidono. In questa nota, prendendo le mosse dai citati teoremi di Higman e Sato, caratterizzeremo, entro certi limiti, i sottogruppi neutri d'un gruppo generico.

Elenco di alcuni simboli ed abbreviazioni.

$H \subseteq G$ H è un sottoinsieme del gruppo G ;

$H \leq G$ H è un sottogruppo del gruppo G ;

$H \trianglelefteq G$ H è un sottogruppo normale del gruppo G ;

$\omega(G)$ Insieme del numero 1 e dei numeri primi che dividono l'ordine di qualche elemento periodico di G ;

\cup -d. \cup -distributivo;

\cap -d. \cap -distributivo.

* * *

I. Elenchiamo alcune proprietà generali dei sottogruppi in questione che ci saranno utili in seguito.

Sono intanto immediate le seguenti proposizioni:

1.1 *Sia $H \leq N \leq G$, $H \trianglelefteq G$. Se N è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di G , N/H è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di G/H .*

1.2. *Siano $H, N \leq G$. Se N è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di G , allora $N \cap H$ è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di H .*

Si ha poi ([1] prop. 8):

1.3. *Siano $H, N \leq G$ con $H \trianglelefteq G$ ed $H \cap N = e$. Se N è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di G , allora NH/H è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di G/H .*

Dimostriamo infine la seguente proposizione che riduce il problema della determinazione dei sottogruppi neutri d'un gruppo G al caso in cui G sia finitamente generato:

1.4. PROPOSIZIONE. *Sia N un sottogruppo d'un gruppo G . N è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di G se, e solo se, per ogni sottogruppo finitamente generato H di G , $H \cap N$ è un sottogruppo \cup -d. (\cap -d.) di H .*

DIM. La necessità rientra nella 1.2.

Quanto alla sufficienza, sia $H \cap N$ un sottogruppo \cap -d. di H per ogni sottogruppo H finitamente generato di G . Detti V_1, V_2 due sottogruppi di G , proviamo che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2).$$

Allo scopo, basta verificare che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) \leq (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2),$$

l'inclusione inversa essendo ovvia.

Considerato dunque un $x \in N \cap (V_1 \cup V_2)$, lo si esprima nella forma

$$x = v_{11}v_{21} \dots v_{1n}v_{2n} \quad (v_{ij} \in V_i, i = 1, 2).$$

Posto allora

$$H = \langle v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1n}, v_{2n} \rangle, \\ V'_1 = \langle v_{11}, \dots, v_{1n} \rangle, \quad V'_2 = \langle v_{21}, \dots, v_{2n} \rangle,$$

si ha, per ipotesi,

$$N \cap (V'_1 \cup V'_2) = (N \cap V'_1) \cup (N \cap V'_2)$$

onde

$$x \in (N \cap V'_1) \cup (N \cap V'_2) \leq (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2).$$

Analogamente si ragiona nel caso di sottogruppi \cup -d.; donde l'asserto.

2. In questo numero caratterizzeremo i sottogruppi neutri d'un gruppo periodico.

2.1 LEMMA. *Siano N, M due sottogruppi normali del gruppo periodico G , con $\omega(N) \cap \omega(M) = 1$. Se NM/M è un sottogruppo \cap -d. di G/M , allora N è un sottogruppo \cap -d. di G .*

DIM. Per ogni sottogruppo $U \leq G$ si ha, nelle ipotesi poste,

$$(U \cap N) \cup M = (U \cup M) \cap (N \cup M).$$

Detti allora V_1, V_2 due sottogruppi di G , si ha

$$\begin{aligned} ((V_1 \cup V_2) \cap N) \cup M &= (V_1 \cup V_2 \cup M) \cap (N \cup M) = \\ &= (V_1 M \cap N M) \cup (V_2 M \cap N M) = (V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N) \cup M \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (V_1 \cup V_2) \cap N &\simeq \frac{((V_1 \cup V_2) \cap N) M}{M} = \\ &= \frac{(V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N) M}{M} \simeq (V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N) \end{aligned}$$

gli isomorfismi essendo quelli canonici, onde

$$(V_1 \cup V_2) \cap N = (V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N); \quad \text{c.v.d.}$$

2.2. TEOREMA. *Sia N un sottogruppo non banale del gruppo periodico G . N è un sottogruppo neutro di G se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- 1) $N \triangleleft G$
- 2) Detto N_p l'insieme dei p -elementi di N , per ogni $p \in \omega(G/N)$:
 - 2a) ogni p -elemento u di G è permutabile con tutti gli elementi di N ;
 - 2b) è o $\langle u \rangle \geq N_p$ oppure $N_p \not\geq \langle u \rangle$.
- 3) L'insieme $M = \{x \in G \mid \langle x \rangle \cap N = e\}$ è un sottogruppo di G tale che:
 - 3a) $M \triangleleft G$, $\omega(M) \cap \omega(N) = 1$;
 - 3b) il centralizzante $C_{G/M}(NM/M)$ di NM/M in G/M è un S -gruppo (cioè è prodotto diretto dei propri sottogruppi di Sylow).

DIM. Necessità. Le 1), 2) seguono dal fatto che N è un sottogruppo \cup -d. di G ([3] pag. 65 teor. 6).

Quanto alla 3), M è evidentemente un sottogruppo di G soddisfacente alla 3a) e proviamo che esso soddisfa anche alla 3b).

Allo scopo, supponiamo dapprima $M = e$ e sia $p \in \omega(C_G(N))$. Se ogni p -elemento di $C_G(N)$ appartiene ad N , allora $C_G(N)$ ha un solo p -sottogruppo di Sylow perchè $C_G(N) \cap N$ è abeliano. In caso contrario, siano, per assurdo, S_p ed S'_p due p -sottogruppi di Sylow distinti di G e sia $t \in S_p \cup S'_p$ un q -elemento con $q \neq p$. Dalla 2b) si trae $S_p \cap N = S'_p \cap N = N_p$; inoltre, essendo $M = e$, è $\langle t \rangle \cap N \neq e$, sicchè dalla

$$\langle t \rangle \cap N \leq (S_p \cup S'_p) \cap N = (S_p \cap N) \cup (S'_p \cap N) = N_p$$

segue che N_p contiene un q -elemento, cosa assurda. $C_G(N)$ è dunque un S -gruppo.

Se poi è $M \neq e$, NM/M è un sottogruppo neutro di G/M (1.3)

Ora, l'insieme degli elementi di G/M che non hanno altra potenza in NM/M che l'unità è il sottogruppo identico, onde, per quanto sopra dimostrato, $C_{G/M}(NM/M)$ è un S -gruppo.

Sufficienza. Dalle 1), 2) segue che N è \cup -d. ([3] pag. 65 teor. 6); resta dunque da provare che esso è \cap -d.

Allo scopo, supponiamo dapprima di nuovo $M = e$.

Detti V_1, V_2 due sottogruppi di G , si tratta di provare che

$$(1) \quad N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2).$$

Sia, all'uopo, $x \in N \cap (V_1 \cup V_2)$ un p -elemento ($p \in \omega(G)$) e lo si esprima nella forma

$$(2) \quad x = v_{11}v_{21} \dots v_{1n}v_{2n}$$

dove v_{ij} è un p_{ij} -elemento ($p_{ij} \in \omega(G)$) e

$$v_{ij} \in V_j \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n)$$

(potendo essere eventualmente $p_{ij} = 1$ per qualche i, j).

In virtù della 2a), è lecito supporre che nella (2), per un conveniente $k, 1 \leq k \leq n$, i primi $2k$ fattori appartengano ad N mentre gli ultimi $2(n - k)$, se non identici, non vi appartengano. Posto

$$v_{11}v_{21} \dots v_{1k}v_{2k} = a_1a_2 \dots a_r$$

con gli a_i p_i -elementi fra loro permutabili, $a_i \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$, $p_i \neq p_j$ per $i \neq j$, la (2) si può esprimere nella forma

$$(3) \quad x = a_1 a_2, \dots, a_r v_{1,k+1} v_{2,k+1}, \dots, v_{1n} v_{2n}.$$

Se è $p_{ij} = p$ (p essendo sempre il numero primo relativo ad x) per qualche i, j ($i = 1, 2; j = k + 1, \dots, n$), poichè $p_{ij} \in \omega(G/N)$, dalla 2b) si trae che $x \in \langle v_{ij} \rangle$, onde $x \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$. †

In caso contrario, osserviamo che, attese le 2a) e 2b), per ogni $q \in \omega(G/N)$, i q -elementi di G sono tutti nel $C_q(N)$. Ne segue, essendo $C_q(N)$ un S -gruppo, che nella 3) v_{ij} e v_{rs} sono permutabili se $p_{ij} \neq p_{rs}$, mentre il prodotto $v_{ij} v_{rs}$ è ancora un p_{ij} -elemento se $p_{ij} = p_{rs}$. Pertanto la (3), permutati ed associati opportunamente i v_{ij} , diviene

$$(4) \quad x = a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s$$

dove i b_i sono q_i -elementi ($q_i \in \omega(G/N)$) fra loro permutabili con $q_i \neq p$ per ogni $i = 1, 2, \dots, s$. Orbene, poichè tutti i fattori del 2° membro della (4) sono permutabili ed x è un p -elemento, uno degli a_i , per esempio a_1 , deve essere un p -elemento, mentre deve essere $a_2, \dots, b_s = e$, perciò

$$x = a_1 \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$$

ed N è \cap -d.

Se poi $M \neq e$, essendo N \cup -d. in G , NM/M è \cup -d. in G/M (1.3) di guisa che per esso valgono senz'altro le 1), 2) dell'enunciato. Si verifica subito poi che vale anche la 3) con la particolarità che il sottogruppo degli elementi di G/M che non hanno altra potenza in NM/M all'infuori dell'unità è identico.

Ne segue, per quanto dimostrato sopra, che NM/M è neutro in G/M e finalmente dal lemma 2.1 si trae che N è neutro in G .

3. Ci occuperemo ora dei sottogruppi neutri d'un gruppo non periodico. Poichè nel seguito sfrutteremo sistematicamente il teorema di Stato ([3] pag. 66 teor. 7), riportiamo, per comodità del lettore, l'enunciato di tale teorema.

3.1. TEOREMA (Sato). *Sia G un gruppo non periodico e sia N un sottogruppo non banale di G . N è \cup -d. se, e solo se, sono soddisfatte le*

seguenti condizioni:

- 1) $N \triangleleft G$;
- 2) G/N è periodico;
- 3) gli elementi periodici di G sono contenuti in N ed $\omega(N) \cap \omega(G/N) = 1$;
- 4) per ogni coppia u, v di elementi aperiodici di G è

$$\langle u \rangle \cap \langle v \rangle \neq e ;$$

- 5) Se X è un laterale di N in G ed $x \in X$, allora, per ogni $a \in N$, esiste un intero h tale che

$$x^h \in X, \quad ax^h = x^h a .$$

3.2. COROLLARIO. Siano G un gruppo non periodico finitamente generato, $Z(G)$ il suo centro ed N un sottogruppo non banale di G . Se N è \cup -d. in G , allora $Z(G) \cap N$ è non periodico.

DIM. Per la 3) del teorema 3.1 esiste un insieme finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ di generatori aperiodici di G ; le 2), 4) dello stesso teorema implicano che N è non periodico, sicchè ancora dalla 4) segue che

$$e \neq \langle y_1 \rangle \cap \dots \cap \langle y_n \rangle \cap N \leq Z(G) ,$$

donde la conclusione.

3.3. PROPOSIZIONE. Sia N un sottogruppo \cup -d. non banale del gruppo non periodico finitamente generato G . N è neutro in G se, e solo se, fissato un elemento aperiodico $z \in Z(G) \cap N$, esiste un intero $n > 0$ tale che $N/\langle z^n \rangle$ sia un sottogruppo neutro del gruppo $G/\langle z^n \rangle$, gruppo necessariamente periodico.

DIM. La condizione è necessaria per 1.1.

Quanto alla sufficienza, si tratta, al solito, di provare che, per ogni $V_1, V_2 \leq G$, risulta

$$(1) \quad N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2) .$$

All'uopo, se V_1 e V_2 sono entrambi periodici, si ha $V_1, V_2 \leq N$ (3.1), 3),
 donde la (1).

Se V_1, V_2 sono entrambi non periodici, scelto un elemento aperiodico
 $z \in Z(G) \cap N$, risulta (3.1), 4)

$$\langle z \rangle \cap N \cap V_1 \cap V_2 = \langle z^n \rangle \quad (n > 0),$$

$N/\langle z^n \rangle$ per ipotesi è neutro in $G/\langle z^n \rangle$, donde la (1).

Se infine V_1 è periodico e V_2 è non periodico, allora è $V_1 \leq N$ e
 si ha

$$\begin{aligned} N \cap (V_1 \cup V_2) &= N \cap (V_1 \cup (V_2 \cap N) \cup V_2) = \\ &= (N \cap (V_1 \cup (V_2 \cap N))) \cup (N \cap V_2) = \\ &= V_1 \cup (V_2 \cap N) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2); \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Le proposizioni 1.4 e 3.3 riconducono il problema della determinazione
 dei sottogruppi neutri d'un gruppo, nel caso d'un gruppo non periodico,
 allo stesso problema relativo al caso d'un gruppo periodico ed al pro-
 blema della determinazione dei sottogruppi \cup -d. d'un gruppo non
 periodico, problemi risolti rispettivamente dai teoremi 2.2 e 3.1.

Al fine di giungere ora ad una caratterizzazione più esplicita dei
 sottogruppi neutri d'un gruppo non periodico G , supporremo che G
 soddisfi alla seguente condizione:

3.4. *Per ogni coppia H, K di sottogruppi di G con $K \triangleleft H$ ed H/K
 periodico, il gruppo H/K è localmente finito.*

Si osservi che la 3.4 è senz'altro soddisfatta se G è localmente ri-
 solubile.

3.5. **TEOREMA.** *Sia N un sottogruppo non banale del gruppo non
 periodico G soddisfacente alla 3.4.*

N è neutro in G se, e solo se, valgono le seguenti condizioni:

- 1) *L'insieme P degli elementi periodici di G è un sottogruppo
 proprio di N , G/P è localmente ciclico ed è $\omega(P) \cap \omega(G/N) = 1$;*
- 2) *Se X è un laterale di N in G ed $x \in X$, allora, per ogni $a \in N$,
 esiste un intero h tale che*

$$x^h \in X, \quad x^h a = ax^h.$$

DIM. Necessità. C'è da dimostrare soltanto che $P \leq N$ e che G/P è localmente ciclico, le altre condizioni figurando già nel teorema 3.1. È lecito supporre G finitamente generato, di guisa che $Z(G)$ è non periodico.

Detto x un elemento aperiodico di N e posto $|G/N| = m$ il sottogruppo $K_x = Z(G) \cap \langle x^m \rangle$ è aperiodico, quindi G/K_x è finito (3.1, 4)₃. Pertanto, indicato con L_x l'insieme degli $y \in N$ aventi ordine, mod K_x , primo con m , dalla 2) del teorema 2.2 applicato a G/K_x si trae, usando il teorema di Burnside, che $L_x \triangleleft G$ [4].

Indi, applicando il teorema 2.2 al gruppo G/L_x , osservato che l' M di cui in 2.2, 3a) è identico, la 2.2, 3b) porge che G/L_x è nilpotente. Ora, poichè $L_x \subset P$ ed $x \notin L_x$, risulta

$$(1) \quad \bigcap_{x \in N \setminus P} L_x = P$$

onde $P < N$.

Dalla (1) discende poi che G/P è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto $\prod_{x \in N \setminus P} G/L_x$, sicchè, essendo quest'ultimo localmente nilpotente ([2] pag. 183), tale è anche G/P che risulta quindi localmente ciclico ([1], cor. 18).

Sufficienza. Possiamo ancora supporre G finitamente generato (1.4). Si trae allora dalle 1), 2) che $Z(G)$ è non periodico: infatti, se $\{g^r u_1, \dots, g^r u_n\}$ ($u_i \in P$) è un sistema finito di generatori di G , esiste, per la 2), una potenza g^h di g , con $h > 0$, permutabile con u_1, \dots, u_n e quindi $g^h \in Z(G)$.

Ne segue facilmente che valgono tutte le condizioni del teorema 3.1, talchè N è intanto \cup -d.

Se $z \in Z(G) \cap N$ è un elemento aperiodico, consideriamo il gruppo $G/\langle z^m \rangle$ con $m = |G/N|$. Poichè $N/\langle z^m \rangle$ è \cup -d. in $G/\langle z^m \rangle$ (1.1), questo soddisfa alle condizioni 1), 2) del teorema 2.2 e proviamo che esso soddisfa anche alla 3) dello stesso teorema. Infatti, dalla 2b) del teorema 2.2 discende che l'insieme $M/\langle z^m \rangle$ degli elementi di $G/\langle z^m \rangle$ che non hanno altra potenza in $N/\langle z^m \rangle$ all'infuori dell'unità è il sottogruppo identico di $G/\langle z^m \rangle$.

Inoltre, essendo G/P ciclico, tenuto conto di 2.2, 2a), si verifica facilmente che, per ogni $p \in \omega(G/N)$, due p -elementi di $G/\langle z^m \rangle$ sono permutabili, donde la 3b) di 2.2.

Pertanto, $N/\langle z^m \rangle$ è neutro in $G/\langle z^m \rangle$, quindi N è neutro in G (3.3). Infine, ricordando che il reticolo dei sottogruppi d'un gruppo lo-

calmente ciclico è distributivo, dal teorema precedente si deduce subito il

3.6. COROLLARIO. *Sia G un gruppo senza torsione (non identico) soddisfacente alla 3.4. G è dotato di sottogruppi neutri non banali se, e solo se, è localmente ciclico.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. MARTINO, *Elementi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo localmente nilpotente*, Rend. del Seminario mat. dell'Università di Padova, vol. XLV, 1971.
- [2] E. SCHENKMAN, *Group theory*, New York, 1965.
- [3] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [4] G. ZAPPA, *Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito*, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat., Napoli, vol. XVIII, 1951.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 settembre 1972.