RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Isomorfismi reticolari e prodotti intrecciati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 331-344

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__331_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 50 (1973)

Isomorfismi reticolari e prodotti intrecciati.

Federico Menegazzo (*)

Summary - Let G be the (standard) wreath product of A by B, N its « base » subgroup, $\varphi: G \to H$ a projectivity (i.e. an isomorphism $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$). Then $N^\varphi \trianglelefteq H$ and, if A is locally finite, $2 < |B| < \infty$ and $|B^\varphi| = |B|$, $H = A^* \operatorname{Wr} B^*$ with A^* and B^* lattice-isomorphic with A and B.

Oggetto di questo lavoro è lo studio del comportamento dei prodotti intrecciati sotto l'azione di isomorfismi reticolari. Più precisamente: se G, H sono gruppi, ed inoltre G è rappresentabile come prodotto intrecciato dei gruppi non identici A e B, detti $\mathfrak{L}(G)$ ed $\mathfrak{L}(H)$ rispettivamente i reticoli dei sottogruppi di G ed H, si considera un isomorfismo φ: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ e ci si chiede se in queste ipotesi anche H sia un prodotto intrecciato non banale.

I principali risultati ottenuti sono i seguenti:

— l'immagine mediante φ del sottogruppo « base » di G è normale in H (Teorema 3.1 e 3.2);

— se A è localmente finito, $2 < |B| < \infty$ e $|B^\varphi| = |B|$, allora H è prodotto intrecciato di due gruppi A^* e B^* e inoltre
  i) φ induce isomorfismi $\mathfrak{L}(A) \to \mathfrak{L}(A^*)$ e $\mathfrak{L}(B) \to \mathfrak{L}(B^*)$
  ii) se N è il sottogruppo « base » di G, N^φ è il sottogruppo « base » di H (Teorema 5.2);

— se A è abeliano, oppure se A ha centro identico, e $2 < |B| < \infty$, allora $N^\varphi \simeq N$ (Teorema 6.1).

(*) Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico dell'Università, Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Sono inoltre esposti alcuni esempi che mostrano come, in un certo senso, i risultati ottenuti siano i « migliori possibili ».

1. Se A, B sono gruppi, diremo che G è il prodotto intrecciato di A e B scriveremo $G = A \,\mathrm{Wr}\, B$ per intendere che G è il prodotto intrecciato « standard » secondo la definizione di [1], p. 97; $A \,\mathrm{wr}\, B$ indicherà il prodotto intrecciato « standard » ristretto di A e B.

Le rimanenti notazioni e definizioni sono quelle usuali nella teoria dei gruppi oppure sono desunte da [2], se trattano di questioni di teoria del reticolo dei sottogruppi di un gruppo. Fanno forse eccezione le seguenti:

Se x è un elemento periodico del gruppo G e p è un numero primo, $|x|_p$ indica la massima potenza di p che divide $|x|$. Sia $G = A \,\mathrm{wr}\, B$. Il sottogruppo « *base* » di G è il sottogruppo A^B delle funzioni di B in A; per ogni $b \in B$ A_b è il sottogruppo della « base » costituito dalle funzioni $f \in A^B$ tali che $f(t) = 1$ per ogni $t \in B$, $t \neq b$. La *diagonale* Δ di G è il sottogruppo di A^B definito dalla posizione $\Delta = \{f \in A^B | f(t) = f(1)\ \forall t \in B\}$. Se $G = A \,\mathrm{wr}\, B$ il sottogruppo « base » di G è il sottogruppo $A^{(B)}$ delle funzioni di B in A a supporto finito.

Sia L un reticolo. Se $a, b \in L$, $a \leqslant b$, con $[b/a]$ indichiamo il sottoreticolo di L costituito da tutti gli $x \in L$ tali che $a \leqslant x \leqslant b$.

L'elemento $d \in L$ si dice *di Dedekind* se per ogni coppia x, y di elementi di L $(d \cup y) \cap x = d \cup (x \cap y)$ non appena $d \leqslant x$ e $(d \cup x) \cap y = x \cup (d \cap y)$ non appena $x \leqslant y$.

2. In questo numero esponiamo alcuni semplici lemmi sui p-gruppi modulari che saranno usati nel seguito.

LEMMA 2.1. *Sia G un p-gruppo modulare. Se il centro di G contiene un elemento di ordine massimo in G, allora G è abeliano.*

I p-gruppi hamiltoniani hanno esponente 4, mentre il loro centro ha esponente 2; resta quindi da esaminare il caso in cui $G = U\langle v\rangle$, con U abeliano, $u^v = u^{1+p^s}$ per ogni $u \in U$ (l'esponente non dipende da $u \in U$; $p^s > 2$). Sia uv^i l'elemento in questione: se $|u| = |uv^i|$ risulta $[v, u] = 1$, da cui $[v, U] = 1$ e G è abeliano; se $|u| < |uv^i|$, poichè G è modulare, è $|uv^i| \leqslant \max\{|u|, |v^i|\}$ e quindi risulta $|uv^i| = |v^i| = |v|$, e $G = U\langle uv^i\rangle$ è abeliano, c.v.d.

LEMMA 2.2. *Sia G un p-gruppo modulare. Se g, h sono elementi di G di ordine massimo, permutabili e tali che $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = 1$, allora i sottogruppi $\langle g\rangle$ e $\langle h\rangle$ sono normali in G.*

Se G è abeliano o hamiltoniano non c'è niente da dimostrare; supponiamo quindi $G = U\langle v\rangle$, dove U è un sottogruppo abeliano sul quale v induce una potenza congrua ad 1 modulo p (congrua ad 1 modulo 4 se $p = 2$). Siano $g = xv^i$, $h = yv^j$ con $x, y \in U$; posto che sia $\langle v^i\rangle \supseteq \langle v^j\rangle$, si ha $h = ug^k$ con $u \in U$; allora $\langle g\rangle \times \langle ug^k\rangle = \langle g, u\rangle$ implica che u abbia ordine massimo in G, da cui $[g, U] = 1$. In particolare $[x, v^i] = [y, v^j] = 1$ e per concludere (essendo banale il caso in cui $\langle v^i\rangle = \langle v\rangle$) è sufficiente dimostrare che se K è un p-gruppo, $K = \langle a, b\rangle$, $|a| \geqslant |b|$, $a^b = a^{1+p^s}$ con $p^s > 2$, $[a, b^{p^r}] = 1$, allora risulta $\langle ab^{p^r}\rangle \trianglelefteq K$. Infatti, essendo ciclico il gruppo moltiplicativo $1 + p^m Z/p^n Z$ per ogni $m \leqslant n$ tale che $p^m > 2$, risulta $\langle [a, b^{p^r}]\rangle = \langle a^{p^{r+s}}\rangle$, da cui $a^{p^{r+s}} = 1$, $b^{p^{r+s}} = 1$ e infine $(ab^{p^r})^{p^s} = a^{p^s} = [ab^{p^r}, b] \in \langle ab^{p^r}\rangle$, c.v.d.

LEMMA 2.3. *Sia G un P-gruppo. Allora*

i) *G ha centro identico, oppure è abeliano*;

ii) *se g, h sono elementi non identici di G, $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = 1$ e $[g, h] = 1$, allora $\langle g\rangle$ e $\langle h\rangle$ sono normali in G.*

La dimostrazione è ovvia.

3. È noto che l'immagine di un sottogruppo normale mediante un isomorfismo reticolare $\varphi\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$, dove G e H sono gruppi, è un elemento di Dedekind del reticolo $\mathfrak{L}(G^\varphi)$, ma in generale non è normale in G^φ; questo è anzi uno dei principali fatti sgradevoli nella teoria reticolare dei gruppi. È quindi notevole il fatto che forse il più interessante dei sottogruppi normali di un prodotto intrecciato, e cioè la « base », abbia immagine normale tramite ogni isomorfismo reticolare, a norma dei risultati seguenti.

TEOREMA 3.1. *Sia $G = A \operatorname{wr} B$ prodotto intrecciato dei gruppi non identici A e B; diciamo N il sottogruppo « base » di C. Se $\varphi\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ è un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo H, risulta $N^\varphi \trianglelefteq H$.*

Supposto $N^\varphi \ntrianglelefteq H$, poichè $H = N^\varphi \cup B^\varphi$, esiste un elemento $x \in B^\varphi$ tale che $\langle x\rangle$ sia indecomponibile e $x \notin \mathcal{N}_H(N^\varphi)$. Posto $\langle x\rangle = C^\varphi$, il sottogruppo NC di G è rappresentabile come prodotto intrecciato ristretto dei gruppi non identici $A^{(T)}$ e C, dove T è un qualunque sistema di rappresentanti di B modulo C, in cui N è il sottogruppo « base ». φ induce un isomorfismo di $\mathfrak{L}(NC)$ su $\mathfrak{L}(N^\varphi \cup \langle x\rangle)$ in cui $N^\varphi \ntrianglelefteq N^\varphi \cup \langle x\rangle$; non è dunque restrittivo supporre B ciclico indecomponibile. Se poi fosse $(A_1^\varphi)^{B^\varphi} \leqslant N^\varphi$, poichè $(A_1^\varphi)^{B^\varphi} = (A_1^\varphi)^H \trianglelefteq H = A_1^\varphi \cup B^\varphi$, sarebbe $N^\varphi = (A_1^\varphi)^{B^\varphi} B^\varphi \cap N^\varphi = (A_1^\varphi)^{B^\varphi} \trianglelefteq H$ contro l'ipotesi. Esiste allora $y \in A_1^\varphi$ tale che $\langle y \rangle$ sia ciclico indecomponibile e $y^t \notin N^\varphi$ per un opportuno $t \in B^\varphi$. Posto $\langle y \rangle = D^\varphi$, il sottogruppo $D \cup B$ di G è rappresentabile come prodotto intrecciato ristretto dei gruppi non identici D e B, con sottogruppo « base » D^B; risulta poi $(D^B)^\varphi \ntrianglelefteq D^\varphi \cup B^\varphi$ e quindi φ induce un isomorfismo di $\mathfrak{L}(D \cup B)$ su $\mathfrak{L}(D^\varphi \cup B^\varphi)$ in cui l'immagine della « base » non è normale in $D^\varphi \cup B^\varphi$: non è dunque restrittivo supporre che anche A sia ciclico indecomponibile. Si presentano i seguenti quattro casi:

i) A periodico, B aperiodico.

N coincide con l'insieme degli elementi periodici di G, N^φ è analogamente l'insieme degli elementi periodici di H e ovviamente $N^\varphi \trianglelefteq H$.

ii) A e B aperiodici.

Sia $h \in H$ tale che $(N^\varphi)^h \neq N^\varphi$; $M = \big((N^\varphi)^h\big)^{\varphi^{-1}}$ è immagine di N tramite un automorfismo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$, $M \neq N$. M è un gruppo modulare aperiodico, e quindi abeliano; inoltre M è un elemento di Dedekind in $\mathfrak{L}(G)$. Il gruppo $N/N \cap M$ è ciclico aperiodico, in quanto per il suo reticolo è $[N/N \cap M] \approx [NM/M] \leqslant [G/M] \approx [G/N]$; ovviamente $M \cap N$ è contenuto nel centro Z di MN, e quindi tale centro non è identico. D'altra parte MN è rappresentabile come prodotto intrecciato ristretto dei gruppi $A^{(T)}$ e $B \cap MN$ dove $B \cap MN$ è infinito e T è un sistema di rappresentanti di $B/B \cap MN$, ed ha dunque centro identico.

iii) A aperiodico, B periodico.

Con le notazioni del precedente punto ii) risulta $N/M \cap N$, e quindi MN/Z, ciclico finito (il suo reticolo dei sottogruppi è isomorfo ad un tratto iniziale di $\mathfrak{L}(G/N)$); d'altra parte è facile verificare che se il centro di un prodotto intrecciato ha indice finito nel sottogruppo « base » allora la base stessa è un gruppo periodico, il che contraddice l'ipotesi in iii).

iv) A periodico, B periodico.

Sia $p^m = |A|$, $q^n = |B|$, e supponiamo per il momento $p \neq q$ (p, q numeri primi). Dimostriamo che, in queste ipotesi, φ conserva gli indici. Se così non fosse, esisterebbe un primo r tale che φ è singolare in r e G ha r-complemento normale K; poichè G non è un P-gruppo, nè è reticolarmente decomponibile, K^{φ} è caratteristico in H ([2], prop. 2.10). Se fosse $r = p$ sarebbe $K = B$, $G = N \times B$ contro l'ipotesi che G sia prodotto intrecciato, mentre se $r = q$ avremmo $K = N$ ed $N^{\varphi} \trianglelefteq H$, e quindi G, H, φ non sarebbe un controesempio. Dunque veramente φ conserva gli indici; ma allora N^{φ}, unico p-sottogruppo di Sylow di H, è caratteristico in H. Deve dunque aversi $p = q$ e inoltre, essendo ovviamente G non ciclico, anche H è un p-gruppo. Supporremo d'ora in avanti che G sia di ordine minimo tra i p-gruppi prodotto intrecciato di due p-gruppi ciclici non identici che forniscono un controesempio. Dimostriamo che, in queste ipotesi, $|A| = p$. Sia infatti $|A| > p$. Risulta $N^{p} \trianglelefteq G$; il gruppo $N^{p} \cup B$ è rappresentabile come prodotto intrecciato non banale (isomorfo ad $A^{p} \operatorname{wr} B$), con sottogruppo « base » N^{p}; per la minimalità di G risulta $(N^{p})^{\varphi} \trianglelefteq (N^{p} \cup B)^{\varphi} = (N^{p})^{\varphi} \cup B^{\varphi}$; inoltre $(N^{p})^{\varphi} = (N^{\varphi})^{p} \trianglelefteq N^{\varphi}$, da cui $(N^{p})^{\varphi} \trianglelefteq H$. φ subordina un isomorfismo $\bar{\varphi}$ tra i reticoli dei gruppi G/N^{p} e $H/(N^{p})^{\varphi}$; poichè G/N^{p} è rappresentabile naturalmente come prodotto intrecciato con sottogruppo « base » N/N^{p}, per la minimalità di G si ha $N^{\varphi}/(N^{p})^{\varphi} = (N/N^{p})^{\bar{\varphi}} \trianglelefteq H/(N^{p})^{\varphi}$, da cui $N^{\varphi} \trianglelefteq H$, contro il fatto che G è un controesempio; dunque veramente $|A| = p$. Per ogni sottogruppo ciclico X di ordine p di G poniamo $\alpha(X) = |\{Y \in \mathfrak{L}(G) | Y \text{ ciclico di ordine } p \text{ e } |X \cup Y| \leqslant p^{2}\}|$. Qualunque sia l'automorfismo ψ di $\mathfrak{L}(G)$, si ha evidentemente $\alpha(X^{\psi}) = \alpha(X)$. Se $X \subseteq N$, essendo N abeliano elementare di ordine $p^{p^{n}}$, risulta $\alpha(X) \geqslant p^{p^{n-1}}/(p-1)$. Sia ora $X \not\subseteq N$; poichè $\Omega_1(G) = N\Omega_1(B) = NX$, si ha $\Omega_1(\mathfrak{C}_G(X)) = X \times (N \cap \Omega_1(\mathfrak{C}_G(X)))$ e in particolare $\Omega_1(\mathfrak{C}_G(X))$ è abeliano elementare. Se $X = \langle fb^{p^{n-1}} \rangle$ con $f \in N$, risulta $N \cap \Omega_1(\mathfrak{C}_G(X)) = N \cap \Omega_1(\mathfrak{C}_G(b^{p^{n-1}}))$; tale sottogruppo è il centro di $N\Omega_1(B)$, che è rappresentabile come prodotto intrecciato dei gruppi $A^{B/\Omega_1(B)}$ e $\Omega_1(B)$, ed ha quindi ordine $p^{p^{n-1}}$; si conclude che $|\Omega_1(\mathfrak{C}_G(X))| = p^{p^{n-1}+1}$, da cui $\alpha(X) = (p^{p^{n-1}+1} - 1)/(p-1)$. Tale numero è minore di quello trovato in precedenza per i sottogruppi di N non appena $p^{n} > 2$; e dunque, per ogni automorfismo ψ di $\mathfrak{L}(G)$, purchè $p^{n} > 2$, $N^{\psi} = N$; in particolare, qualunque sia $h \in H$, $((N^{\varphi})^{h})^{\varphi^{-1}} = N$, da cui $N^{\varphi} \trianglelefteq H$ contro la scelta di G, H, φ. È dunque $p^{n} = 2$; ma allora $|H : N^{\varphi}| = 2$, $N^{\varphi} \trianglelefteq H$ e ancora una contraddizione. Questo termina la dimostrazione.

TEOREMA 3.2. *Siano A, B gruppi non identici, $G = A \operatorname{Wr} B$, N il sottogruppo « base » di G. Se φ è un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo H, allora $N^{\varphi} \trianglelefteq H$.*

Come nella proposizione precedente, non è restrittivo supporre $B = \langle b \rangle$ ciclico, e anzi ciclico infinito, altrimenti $A \operatorname{Wr} B = A \operatorname{wr} B$.

Osserviamo che $A_1^G B$ è isomorfo ad A wr B con « base » A_1^G e pertanto per il risultato precedente $B^\varphi \leqslant \mathcal{N}_H((A_1^G)^\varphi)$. Sia ora x un elemento aperiodico di G; se $x \in N$, allora x normalizza infiniti sottogruppi ciclici di A_1^G; mentre se $x \notin N$ risulta $x = f_1 b^i$ con $i \neq 0$ e per ogni intero k $x^k = f_k b^{ki}$ ($f_k \in N$ opportuni) e non esistono sottogruppi ciclici non identici di $A_1^G = \prod_{t \in B} A_t$ normalizzati da x: infatti, se $\langle g \rangle$ è uno di questi, non è restrittivo supporre $\langle g \rangle$ aperiodico o p-gruppo, e quindi $g^{x^k} = g$ oppure $g^{x^k} = g^{-1}$ da cui $g^{x^k}(t) = g(t)$ oppure $g^{x^k}(t) = g(t)^{-1}$ se g è aperiodico mentre se $|g| = p^n$ $|g(t)| = p^s$ con $s \leqslant n$ e $g^x = g^r$ con $(p, r) = 1$ dà $g^{x^k}(t) = g(t)^{r^k}$ con $(p, r^k) = 1$. Allora se $t \in B$ è tale che $g(t) \neq 1$, $g^{x^k}(t) = f_k(tb^{-ki})^{-1} g(tb^{-ki}) f_k(tb^{-ki}) = g(t)^{r^k} \neq 1$ per ogni intero k, e quindi $g(tb^{-ki}) \neq 1$ per ogni intero k, dunque $g \notin A_1^G$. Supponiamo ora $u \in N^\varphi$, $v \in B^\varphi$, $u^v \notin N^\varphi$. Allora $\langle u^v \rangle \cap N^\varphi = 1$, u^v è aperiodico come u, $\langle u \rangle \cap (A_1^G)^\varphi = 1$. Se $\langle u \rangle = \langle x \rangle^\varphi$, x normalizza almeno un sottogruppo ciclico non identico $\langle y \rangle$ di A_1^G e, se $\langle w \rangle = \langle y \rangle^\varphi$, risulta $\langle w \rangle \lhd \langle u, w \rangle$. Se infatti y ha periodo finito $\langle w \rangle$ è il sottogruppo degli elementi periodici di $\langle w, u \rangle$ e se y è aperiodico ma $[x, y] = 1$ allora $\langle u, w \rangle$ è modulare aperiodico, quindi abeliano; resta dunque da esaminare il caso che sia $y^x = y^{-1}$, y aperiodico. Nel gruppo $\langle x, y \rangle$ i sottogruppi di Dedekind ciclici sono quelli del tipo $\langle x^{2i} \rangle$ e $\langle y^j \rangle$ e i primi sono nel centro; quindi $\langle y \rangle$ è caratterizzato dalla proprietà di essere massimo tra i sottogruppi di Dedekind ciclici non centrali; analogamente $\langle w \rangle$, e dunque $\langle w \rangle \lhd \langle u, w \rangle$. Allora $\langle w^v \rangle \lhd \langle w^v, u^v \rangle$ con $w^v \in (A_1^G)^\varphi$ e con il ragionamento precedente $\langle w^v \rangle^{\varphi^{-1}} \lhd \langle w^v \rangle^{\varphi^{-1}} \cup \langle u^v \rangle^{\varphi^{-1}}$, cioè $\langle u^v \rangle^{\varphi^{-1}}$ normalizzerebbe un sottogruppo ciclico non identico di A_1^G. Questa contraddizione prova che $B^\varphi \leqslant \mathcal{N}_H(N^\varphi)$ cioè $N^\varphi \lhd H$, c.v.d.

4. Esaminiamo ora, nei lemmi che seguono, alcuni casi in cui dall'isomorfismo dei reticoli $\mathfrak{L}(G)$ ed $\mathfrak{L}(H)$ segue l'isomorfismo dei gruppi G ed H.

LEMMA 4.1. *Sia $G = A \operatorname{Wr} B$, con A p-gruppo ciclico e $|B| = q \neq p$ (p, q numeri primi), e sia φ: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo H. Allora, detti N il sottogruppo « base » e Δ la « diagonale » di G, risulta $N^\varphi \simeq N$ e $\Delta^\varphi = Z(G^\varphi)$. Inoltre se $|B^\varphi| = q$ allora $H \simeq G$.*

Sia C un sottogruppo ciclico di G, $C \nsubseteq N$; risulta $|C| = p^m q$, $1 \leqslant p^m \leqslant p^n = |A|$, $C = L \times B^x$ per un conveniente $x \in N$ ed L sottogruppo ciclico di N di ordine p^m; segue $[L, B] = [L, B^x]^{x^{-1}} = 1$ e $L \subseteq \Delta = \mathfrak{C}_N(B)$, da cui $C \subseteq \Delta C_1$ con C_1 sottogruppo ciclico di G tale che $C_1 \cap N = 1$; inoltre $\mathfrak{L}(C)$ ha lunghezza massima se e solo se $C \cap N = \Delta$. Detto Q il sottogruppo di G generato dai sottogruppi aventi intersezione identica con N, risulta $[\Delta, Q] = 1$, $C \subseteq \Delta Q$ per ogni sottogruppo ciclico di G non contenuto in N e quindi $G = \Delta Q$. Dalla definizione di Q e dalla caratterizzazione di Δ sopra ottenuta segue $G^\varphi = H = \Delta^\varphi Q^\varphi$ con $\Delta^\varphi \trianglelefteq G^\varphi$, $Q^\varphi \trianglelefteq G^\varphi$. Posto $B = \langle b \rangle$, sia $M = \left\{ f \in N \mid \prod_{i=0}^{q-1} f^{b^i} = 1 \right\}$. M è un sottogruppo di N e $f \in M$ se e solo se $\langle fb \rangle \cap N = 1$; ne segue che $C \cap N = 1$ implica $C \subseteq MB$ e viceversa se $f \in M$ allora $f \in \langle fb \rangle \cup B$ implica $f \in Q$; in altri termini $M = N \cap Q$. Essendo ovviamente $M \cap \Delta = 1$ risulta $Q^\varphi \cap \Delta^\varphi = (Q \cap N \cap \Delta)^\varphi = 1$, e dunque $H = \Delta^\varphi \times Q^\varphi$. In particolare $N^\varphi = \Delta^\varphi \times M^\varphi$ ed N^φ non può essere un P-gruppo non abeliano; N^φ è dunque un p-gruppo modulare, quindi abeliano per il lemma 2.1 e in definitiva isomorfo ad N. Inoltre Q^φ ha centro identico e così $\Delta^\varphi = Z(G^\varphi)$. Da $A_1^\varphi \cup B^\varphi = (A_1 \cup B)^\varphi = H = (A_1^\varphi)^{B^\varphi} B^\varphi$ segue poi $N^\varphi = (A_1^\varphi)^{B^\varphi}$ e, se inoltre $|B^\varphi| = q$, tale prodotto è diretto, provando l'ultimo asserto dell'enunciato.

Osservazione 4.2. La condizione $|B^\varphi| = |B|$ non è sopprimibile, come prova il seguente esempio.

Sia G il prodotto intrecciato di un gruppo ciclico di ordine 29 per un gruppo ciclico di ordine 3. G può essere rappresentato come prodotto $G = NB$, N abeliano elementare di ordine 29^3, $B = \langle b \rangle$ ciclico di ordine 3 operante su N, rispetto ad una base prefissata, secondo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

N si fattorizza evidentemente nei sottogruppi $N = \Delta \times G'$ (Δ è il centro di G). Detto α l'automorfismo di N che è l'identità su Δ e un arbitrario automorfismo di ordine 5 su G', si ponga $H = NC$, estensione spezzante di N mediante un gruppo ciclico $C = \langle c \rangle$ di ordine 5, tale che c operi su N come α. È facile vedere che $\mathfrak{L}(G)$ ed $\mathfrak{L}(H)$ sono isomorfi, pur non essendo H rappresentabile come prodotto intrecciato non banale (ovviamente nessun isomorfismo φ di $\mathfrak{L}(G)$ su $\mathfrak{L}(H)$ è tale che $|B^\varphi| = |B| = 3$).

LEMMA 4.3. *Sia $G = A \operatorname{Wr} B$, con A p-gruppo ciclico e $|B| = p$ (p numero primo), e sia φ: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo H. Allora*

i) *se $p \neq 2$ $\Delta^\varphi = Z(H)$ e $G \cong H$;*

ii) *se $p = 2$ e $[\Delta^\varphi, B^\varphi] = 1$, ancora $G \cong H$.*

Poichè il p-gruppo G non è ciclico nè elementare, φ conserva gli indici; in virtù dell'ultima osservazione del lemma 4.1 è sufficiente dimostrare che nelle nostre ipotesi N^φ è abeliano. Osserviamo che se $C = \langle fb \rangle \not\subseteq N$ risulta $C^p = \left\langle \prod_{i=0}^{p-1} f^{b^i} \right\rangle \subseteq \Delta$, dove $f \in N$ e si è posto $B = \langle b \rangle$; inoltre esistono sottogruppi ciclici di G di ordine $p|A|$ (ad esempio, se f è un generatore di A_1) e per essi ovviamente $C^p = \Delta$. Di qui segue, detta K la riunione dei sottogruppi ciclici di G di ordine $p|A|$, che $[\Delta^\varphi, K^\varphi] = 1$. Ora se $p \neq 2$ risulta $K = G$ (infatti per ogni generatore y di A_{b^i} per ogni i è $|yb| = |y^2 b| = p|A|$), mentre se $p = 2$ $|G:K| = 2$ e $G = KB$. In entrambi i casi (se $p = 2$ tenendo conto dell'ipotesi $[\Delta^\varphi, B^\varphi] = 1$) risulta $\Delta^\varphi \subseteq Z(G^\varphi)$; ma allora N^φ è abeliano per il lemma 2.1.

OSSERVAZIONE 4.4. Se $G = A \operatorname{Wr} B$ con A 2-gruppo ciclico e $|B| = 2$, l'esistenza di un isomorfismo tra $\mathfrak{L}(G)$ ed il reticolo dei sottogruppi di un gruppo H non comporta che H sia a sua volta un prodotto intrecciato. Sia K il gruppo diedrale di ordine 16, $K = \langle a, b \rangle$, $a^8 = b^2 = 1$, $a^b = a^{-1}$. Se σ e τ sono gli automorfismi di K tali che $a^\sigma = a$, $b^\sigma = ab$; $a^\tau = a^5$, $b^\tau = ab$, si costruiscano le estensioni spezzanti $G = K\langle c \rangle$, $H = K\langle d \rangle$, dove c induce σ e d induce τ. G è isomorfo al prodotto intrecciato di un gruppo ciclico di ordine 8 per un gruppo ciclico di ordine 2, con « base » $\langle a, c \rangle$ e « diagonale » $\langle ac^2 \rangle$; H invece non è rappresentabile come prodotto intrecciato non banale. Detti α l'isomorfismo di $\langle a, b, c^2 \rangle$ su $\langle a, b, d^2 \rangle$ che è l'identità su K e tale che $(c^2)^\alpha = d^2$ e β l'isomorfismo di $\bar{G} = G/\langle a^2 c^4 \rangle$ su $\bar{H} = H/\langle a^2 d^4 \rangle$ tale che $\bar{c}^\beta = \bar{d}^5$, $\bar{b}^\beta = \bar{b}$, $\bar{e}^\beta = \bar{e}^\alpha$ dove $e = ac^2$, si osserva che α, β hanno la stessa azione sull'intervallo $[\langle a, b, c^2 \rangle / \langle a^2 c^4 \rangle]$ dove entrambi sono definiti. La mappa φ: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ indotta da α e β e, per i rimanenti sottogruppi di G, definita dalle

$$\langle c \rangle^\varphi = \langle d \rangle\,, \quad \langle ac \rangle^\varphi = \langle a^3 d \rangle\,, \quad \langle a^2 c \rangle^\varphi = \langle a^2 d \rangle\,,$$

$$\langle a^3 c \rangle^\varphi = \langle ad \rangle\,, \quad \langle a^4 c \rangle^\varphi = \langle a^4 d \rangle\,, \quad \langle a^5 c \rangle^\varphi = \langle a^7 d \rangle\,,$$

$$\langle a^6 c\rangle^\varphi = \langle a^6 d\rangle\,, \qquad \langle a^7 c\rangle^\varphi = \langle a^5 d\rangle\,, \qquad \langle a^4, c\rangle^\varphi = \langle a^4, d\rangle\,,$$

$$\langle a^4, ac\rangle^\varphi = \langle a^4, a^3 d\rangle\,, \qquad \langle a^4, a^2 c\rangle^\varphi = \langle a^4, a^2 d\rangle\,, \qquad \langle a^4, a^3 c\rangle^\varphi = \langle a^4, ad\rangle$$

è un isomorfismo che conserva gli indici.

Osservazione 4.5. Nelle ipotesi del lemma 4.1 (o 4.3) la tesi non può essere rafforzata dicendo che « φ è indotto da un isomorfismo gruppale »; con una terminologia di uso abbastanza corrente, la classe di gruppi coperta dai lemmi citati è reticolarmente individuata, ma non in senso stretto. Infatti, sia G il prodotto intrecciato di un gruppo ciclico di ordine 2 per un gruppo ciclico di ordine 5. G può essere rappresentato come prodotto $G = NB$, N abeliano elementare di ordine 2^5, $B = \langle b\rangle$ ciclico di ordine 5 operante su N rispetto ad una base prefissata (che diremo $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$) secondo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

N si fattorizza evidentemente nei sottogruppi $N = \Delta \times G'$ (Δ è il centro di G). Detto α l'automorfismo di N associato, rispetto alla base di cui sopra, alla trasposizione (a_1, a_2), sia φ la mappa di $\mathfrak{L}(G)$ in sè così definita:

$$K^\varphi = K^\alpha \quad \text{se } K \subseteq N$$

$$K^\varphi = K \quad \text{se } K \nsubseteq N\,.$$

Si verifica immediatamente che φ è un automorfismo reticolare che conserva gli indici. Si osservi che, posto, come lecito, $A_1 = \langle a_1 a_5\rangle$, gli insiemi $\{(A_1^{b^i})^\varphi \mid i = 0, 1, 2, 3, 4\}$; $\{(A_1^\varphi)^{b^j} \mid j = 0, 1, 2, 3, 4\}$ sono distinti e quindi, pur essendo ovviamente $G^\varphi \simeq G$, non esiste alcun isomorfismo ψ di G su G^φ che « induca » φ, nel senso che $K^\varphi = K^\psi$ per ogni $K \in \mathfrak{L}(G)$. Una situazione « duale » si verifica nei p-gruppi: è facile vedere che il reticolo del prodotto intrecciato di un gruppo ciclico di ordine p (p primo $\neq 2$) per un altro gruppo ciclico di ordine p è dotato di un automorfismo che è l'identità sulla « base » e opera in modo pressochè arbitrario sui sottogruppi di ordine p fuori della « base »;

è possibile quindi imporgli di avere troppi punti fissi per poter essere indotto da un automorfismo gruppale.

LEMMA 4.6. *Sia G il prodotto intrecciato dei gruppi non identici A e B, dove A è ciclico di ordine 2^n e $|B| = 4$; sia poi φ: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo H. Allora $G \cong H$, e l'immagine del centro di G è il centro di H.*

Detto N il sottogruppo « base » di G, sarà sufficiente, come per i lemmi precedenti, dimostrare che N^φ è abeliano, Osserviamo che, non essendo G ciclico nè elementare, φ conserva gli indici, e distinguiamo due casi:

i) B ciclico.

Poniamo $B = \langle b \rangle$, e indichiamo con $\Delta(G)$ la « diagonale » (coincidente con il centro di G). Risulta $\Delta(G) = C^4$ per ogni sottogruppo ciclico C di G non appartenente ad N di ordine 2^{n+2}; l'unione di tali sottogruppi è un sottogruppo di indice 2 in G, e precisamente $\varepsilon^{-1}(A^2)\langle fb \rangle$, dove ε: $N \to A$ associa ad ogni elemento di N il prodotto delle sue coordinate ed f è un qualunque elemento di N non appartenente ad $\varepsilon^{-1}(A^2)$. Considerazioni ormai ovvie provano che $\Delta(G)^\varphi \trianglelefteq H$ e $[\Delta(G)^\varphi, (B^2)^\varphi] = 1$. Detto $K = \mathfrak{C}_N(B^2)$, risulta $K \subseteq \varepsilon^{-1}(A^2)$, da cui $[\Delta(G)^\varphi, K^\varphi] = 1$; segue che il 2-gruppo modulare $(K \cup B^2)^\varphi$, avendo nel centro il sottogruppo ciclico di ordine massimo $\Delta(G)^\varphi$, è abeliano per il lemma 2.1. Consideriamo ora il sottogruppo $A_1 \cup B^2$ di G; esso è naturalmente rappresentabile come prodotto intrecciato dei gruppi A_1 e B^2, e $\Delta(A_1 \cup B^2) \subseteq K$. Risulta allora $[\Delta(A_1 \cup B^2)^\varphi, (B^2)^\varphi] = 1$ e per il lemma 4.1. $(A_1 \cup B^2)^\varphi$ è isomorfo ad $A_1 \cup B^2$. Ne segue che A_1^φ, sottogruppo ciclico di ordine massimo di N^φ, permutabile elemento per elemento con $(A_1^\varphi)^{b^2}$, avente con esso intersezione identica e pure ciclico di ordine massimo, è normale in N^φ per il lemma 2.2. Ma allora N^φ è il prodotto diretto dei coniugati di A_1^φ ed è quindi abeliano.

ii) B elementare.

Poichè φ conserva gli indici, è ovviamente $B^\varphi \subseteq \mathcal{N}_H(\Delta(G)^\varphi)$; inoltre per ogni $x \in B^\varphi$ il gruppo $\Delta(G)^\varphi \cup \langle x \rangle$ è modulare, e quindi $|B^\varphi: \mathfrak{C}_{B^\varphi}(\Delta(G)^\varphi)| \leqslant 2$; esiste allora $z \in B^\varphi$ tale che $|z| = 2$, $[z, \Delta(G)^\varphi] = 1$. Posto $\langle z \rangle = \langle b \rangle^\varphi$ e detto $K = \mathfrak{C}_N(b)$, per ogni sottogruppo $Y = X^\varphi$ di K^φ si ha $|Y \cup \langle z \rangle: Y| = |X \cup \langle b \rangle: X| = 2$, e quindi z induce, mediante coniugazione, su K^φ un automorfismo potenza. Essendo $\Delta(G) \subseteq K$, poichè $[\Delta(G)^\varphi, z] = 1$ e $\Delta(G)^\varphi$ è un sottogruppo ciclico d'ordine massimo di K^φ, tale potenza è l'identità. Consideriamo ora il sottogruppo $A_1 \cup \langle b \rangle$ di G; esso è rappresentabile naturalmente come prodotto intrecciato dei gruppi A_1 e $\langle b \rangle$, e risulta $[\Delta(A_1 \cup \langle b \rangle)^\varphi, \langle b \rangle^\varphi] = 1$; per il lemma 4.3 si ha $[A_1^\varphi, (A_1^\varphi)^z] = 1$; per il lemma 2.2 $A_1^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$ e, come sopra, N^φ è il prodotto diretto dei coniugati di A_1^φ, ed è quindi abeliano.

5. In questa sezione dimostreremo il teorema principale del lavoro, che stabilisce — con alcune restrizioni — l'invarianza dei prodotti intrecciati rispetto agli isomorfismi reticolari. Iniziamo con un lemma, che in realtà è già parte della dimostrazione del teorema.

LEMMA 5.1. *Sia B un gruppo finito. Se B contiene un sottogruppo C tale che*

(°) *qualunque sia il gruppo L, per ogni isomorfismo reticolare φ: $\mathfrak{L}(W) \to \mathfrak{L}(K)$ del reticolo dei sottogruppi di $W = L \operatorname{Wr} C$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo K risulta $L_1^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$, dove con N si è denotato il sottogruppo «base» di W*

allora B soddisfa $(_\circ)$.

Siano L un gruppo, $W = L \operatorname{Wr} B$, N il sottogruppo «base» di W, T un sistema di rappresentanti di B modulo C tale che $1 \in T$, $T^* = \{1\} \cup (T - \{1\})c$ con $c \in C$, $c \neq 1$. Il sottogruppo NC di W ammette le due rappresentazioni naturali come prodotto intrecciato avente N come sottogruppo «base» $NC = L^T \operatorname{Wr} C = L^{T^*} \operatorname{Wr} C$. Poichè C verifica (°), risulta $(L_1^T)^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$, $(L_1^{T^*})^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$, da cui $L_1^\varphi = (L_1^T \cap L_1^{T^*})^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$.

TEOREMA 5.2. *Sia G prodotto intrecciato dei gruppi non identici A e B, con $2 < |B| < \infty$. Se φ: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(H)$ è un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo dei sottogruppi del gruppo H, risulta $H = N^\varphi B^\varphi$, $N^\varphi = \prod_{b \in B} A_b^\varphi$ (il prodotto è diretto) e $A_b^\varphi \cong A_{b'}^\varphi$, per ogni coppia b, b' di elementi di B. Se poi A è localmente finito e $|B^\varphi| = |B|$, allora N^φ è il prodotto diretto dei coniugati di A_1^φ mediante gli elementi di B^φ, e dunque H è isomorfo al prodotto intrecciato $A_1^\varphi \operatorname{Wr} B^\varphi$.*

Iniziamo dimostrando che la seconda proposizione enunciata è conseguenza della prima. Poichè risulta $N^\varphi = (A_1 \cup B)^\varphi \cap N^\varphi = (A_1^\varphi \cup B^\varphi) \cap N^\varphi = ((A_1^\varphi)^{B^\varphi} B^\varphi) \cap N^\varphi = (A_1^\varphi)^{B^\varphi}$ rimane solo da provare che, nelle nostre ipotesi, $A_1^\varphi \cap \prod_{1 \neq t \in B^\varphi} (A_1^\varphi)^t = 1$. Se $x_1 = \prod x_t^t$ appartiene a tale intersezione ($x_u \in A_1^\varphi$ per ogni $u \in B^\varphi$) il sottogruppo di A_1^φ generato dagli elementi x_u è immagine di un sottogruppo finito $\bar{A}_1$ di A_1;

allora risulta, essendo $\bar{A}_1 \cup B = \bar{A} \operatorname{Wr} B$, $(\bar{A}^B)^\varphi = (\bar{A}_1^\varphi)^B = \prod_{b\in B} (\bar{A}_b)^\varphi$ con $\bar{A}_b^\varphi \simeq \bar{A}_{b'}^\varphi$, per b, $b' \in B$; quindi

$$|\bar{A}_1^\varphi|^{|B^\varphi|} = |\bar{A}_1^\varphi|^{|B|} \leqslant \frac{|\bar{A}_1^\varphi|\cdot|\bar{A}_1^\varphi|^{|B|-1}}{|\bar{A}_1^\varphi \cap \prod\limits_{\substack{t\in B^\varphi\\ t\neq 1}} (\bar{A}_1^\varphi)^t|},$$

da cui $\bar{A}_1^\varphi \cap \prod\limits_{\substack{t\in B^\varphi\\ t\neq 1}} (\bar{A}_1^\varphi)^t = 1$, e dunque $x_1 = 1$, come volevasi.

Quanto alla prima parte, si tratta di dimostrare che se $b \neq b'$, $b, b' \in B$, allora $[A_b^\varphi, A_{b'}^\varphi] = 1$. Infatti da ciò segue immediatamente $A_b^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$ per ogni $b \in B$ e ovviamente $N^\varphi = \big(\bigcup\limits_{b\in B} A_b\big)^\varphi = \bigcup\limits_{b\in B} A_b^\varphi$, $1 = \big(A_b \cap \prod\limits_{\substack{t\in B\\ t\neq b}} A_t\big)^\varphi = A_b^\varphi \cap \prod\limits_{\substack{t\in B\\ t\neq b}} A_t^\varphi$, cioè la richiesta decomposizione di N^φ in prodotto diretto. Inoltre, poichè per ogni $b \in B$ $N = \Delta \prod\limits_{\substack{t\in B\\ t\neq b}} A_t$ (con il solito significato di Δ) risulta $A_b^\varphi \simeq N^\varphi / \big(\prod\limits_{t\neq b} A_t^\varphi\big) \simeq \Delta^\varphi$ stabilendo l'ultimo dei risultati da provare. Inoltre, per il lemma 5.1, è lecito supporre che $|B|$ sia 4 o un numero primo $\neq 2$.

Iniziamo dunque considerando il caso che A sia non periodico. Allora se $x \in A_b^\varphi$, $y \in A_{b'}^\varphi$, b, $b' \in B$, $b \neq b'$, esiste $u \in B$ ($u \neq b$, $u \neq b'$) tale che A_u^φ contiene un elemento z aperiodico. Il gruppo $\langle x, y, z\rangle$ è modulare perchè immagine mediate φ di un gruppo abeliano; se uno tra gli elementi x, y è aperiodico esso è abeliano, contenendo due elementi aperiodici indipendenti; se poi x, y sono entrambi periodici allora $[x, y] = 1$ perchè la parte di torsione dei gruppi modulari misti è abeliana. In definitiva in questo caso il teorema è provato.

Sia ora A periodico, e sia p un numero primo tale che esistano in A p-elementi. Se $x' \in A_b$, $|x'| = p^\alpha$, il sottogruppo $\langle x'\rangle \cup B$ di C è isomorfo al prodotto intrecciato $\langle x'\rangle \operatorname{Wr} B$; per i lemmi del n. 4 la « base » di $\langle x'\rangle \cup B$ è isomorfa alla « base di $(\langle x'\rangle \cup B)^\varphi$; quindi $\langle x'\rangle^\varphi$ ha ordine p^α. Siano poi $x \in A_u^\varphi$, $y \in A_v^\varphi$ ($u, v \in B$, $u \neq v$) tali che $|x| = p^\alpha$, $|y| = q^\beta$, $p \neq q$, p, q numeri primi; posto $\langle x\rangle = \langle x'\rangle^\varphi$, $\langle y\rangle = \langle y'\rangle^\varphi$, per l'osservazione precendente $|x'| = |x|$, $|y'| = |y|$ e quindi $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle^\varphi$ è ciclico da cui $[x, y] = 1$. Se invece $p = q$, posto $|x| \geqslant |y|$, risulta $x^y \in \langle x\rangle$; infatti esiste $z \in A_w^\varphi \cap (\langle x'\rangle \cup B)^\varphi$, dove $w \in B$, $w \neq u$, $w \neq v$ tale che $|z| = |x|$ e $[x, z] = 1$, per i lemmi del n. 4; il gruppo $\langle x, y, z\rangle$ è un p-gruppo modulare nel quale $\langle x\rangle$ è normale per il lemma 2.2. Per un fissato primo p, si considerino i sottogruppi $S_k(A) = \langle a \in A \mid |a|_p > p^k\rangle$, $T_k(A) = \langle a \in A \mid |a|_p \leqslant$

$\leqslant \langle p^k \rangle$ per ogni k intero positivo. Se A è generato dai suoi elementi di ordine primo con p, ogni p-elemento di A_u^φ normalizza (e anzi centralizza) A_v^φ, qualunque siano u, $v \in B$ con $u \neq v$. Supponiamo esista $k > 1$ tale che $A = T_k(A)$ e scegliamo k minimo rispetto a tale proprietà; allora $A \neq T_{k-1}(A)$ e, poichè A è la riunione insiemista di $S_k(A)$ e $T_k(A)$ per ogni k, risulta $A = S_{k-1}(A)$. Sia x un p-elemento di A_u^φ, e sia $y \in A_v^\varphi$, $u \neq v$, Se $(|y|, p) = 1$ per quanto già visto $y^x = y$; se $|y| = p^\alpha > p^k$, poichè $A_u^\varphi = T_k(A_u^\varphi)$ si può scrivere $x = \prod_{i=1}^{s} x_i$ dove $x_i \in A_u^\varphi$ e $(|x_i|, p) = 1$ oppure $|x_i|$ divisore di p^k, e quindi $y^{x_i} \in \langle y \rangle$ per le osservazioni precedenti, da cui $y^x \in \langle y \rangle$; cioè tutti i p-elementi di A_u^φ normalizzano $S_{k-1}(A_v^\varphi) = A_v^\varphi$. Se poi qualunque sia k $T_k(A) \neq A$, allora per ogni k $S_k(A) = A$. Sia ancora x un p-elemento di A_u^φ, $|x| = p^\alpha$; se $y \in A_v^\varphi$, poichè $A_v^\varphi = S_\alpha(A_v^\varphi)$, è $y = \prod_{i=1}^{s} y_i$ con $y_i \in A_v^\varphi$, $(|y_i|, p) = 1$ oppure $|y_i| = p^{\beta_i} > p^\alpha$; per quanto visto sopra $y_i^x \in \langle y_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, s)$ e in definitiva $y^x \in A_v^\varphi$ Abbiamo allora dimostrato che in ogni caso tutti i p-elementi di A_u^φ normalizzano A_v^φ; poichè ciò accade per ogni numero primo p e per ogni $u \neq v$, segue $A_v^\varphi \trianglelefteq N^\varphi$ per ogni v e dunque, se $v' \in B$, $v' \neq v$, tenuto conto del fatto che $A_v^\varphi \cap A_{v'}^\varphi = (A_v \cap A_{v'})^\varphi = 1$, $[A_v^\varphi, A_{v'}^\varphi] = 1$ e la tesi è dimostrata.

6. Rimane aperto il problema di precisare condizioni, sui gruppi A e B o sull'isomorfismo φ: $\mathfrak{L}(A \operatorname{Wr} B) \to \mathfrak{L}(H)$, che comportino l'isomorfismo di H con $A \operatorname{Wr} B$. Un primo passo in tale direzione è il seguente

TEOREMA 6.1. *Sia G il prodotto intrecciato dei gruppi non identici A e B, $2 < |B| < \infty$. Sia φ un isomorfismo di $\mathfrak{L}(G)$ sul reticolo $\mathfrak{L}(H)$ dei sottogruppi del gruppo H. Detto N il sottogruppo «base» di G, se A è abeliano, oppure se A è a centro identico, allora $N^\varphi \simeq N$.*

Se A è abeliano, N^φ è un gruppo modulare, prodotto diretto dei suoi sottogruppi A_b^φ al variare di $b \in B$ (teorema 5.2), e tali sottogruppi sono tutti tra loro isomorfi e modulari; ma un tale prodotto diretto è modulare se e solo se i fattori, e qunque N^φ, sono abeliani. A questo punto la conclusione segue da [2], teorema 3 a pag. 35 se A contiene un elemento aperiodico, e da [2], teorema 2 a pag. 35 se A è periodico (nel qual caso non è restrittivo supporre che A sia un p-gruppo). Se invece A ha centro identico, si dimostra facilmente che anche A_1^φ ha centro identico. Applicando al gruppo $A_1 \Delta = A_1 \times T$, dove $T = A_1\Delta \cap \left(\prod_{b\neq 1} A_b\right)$, alcune considerazioni contenute nella dimostrazione del teorema 19 a pag. 53 di [2] si conclude che T e T^φ, e quindi A_1 e A_1^φ, hanno gruppo degli automorfismi isomorfo. Esplicitamente, per ogni automorfismo α di T sia $\sigma(\alpha)$ l'automorfismo di T^φ (che esiste ed è unico) tale che $(\Delta^{\bar\alpha})^\varphi = (\Delta^\varphi)^{\overline{\sigma(\alpha)}}$ dove con $\bar\alpha$ (rispettivamente $\overline{\sigma(\alpha)}$) si è indicato l'automorfismo di $A_1\Delta$ (di $(A_1\Delta)^\varphi$) che induce α su T ($\sigma(\alpha)$ su T^φ) ed è l'identità su A_1 (su A_1^φ): σ così definito è l'isomorfismo citato. Si osserva poi che α è interno se e solo se $\Delta^{\bar\alpha}$ è il centralizzante di un opportuno complemento di N in G; poichè tale proprietà si conserva tramite φ, σ induce un isomorfismo tra i gruppi degli automorfismi interni di T e di T^φ e cioè, date le attuali ipotesi, di A_1 su A_1^φ, come volevasi.

OSSERVAZIONE 6.2. Esistono gruppi A, A^* non isomorfi tali che, detti N, N^* i sottogruppi « base » di $A \operatorname{Wr} B$, $A^* \operatorname{Wr} B$ rispettivamente, risulti $\mathfrak{L}(N) \approx \mathfrak{L}(N^*)$ mentre $\mathfrak{L}(A \operatorname{Wr} B)$ non è isomorfo ad $\mathfrak{L}(A^* \operatorname{Wr} B)$.

Siano infatti $A = \langle u, v, t\rangle$, $|u| = |v| = 11$, $|t| = 5$, $[u, v] = 1$, $u^t = u^3$, $v^t = v^4$; $A^* = \langle u^*, v^*, t^*\rangle$, $|u^*| = |v^*| = 11$, $|t^*| = 5$, $[u^*, v^*] = 1$, $u^{*t^*} = u^{*3}$ $v^{*t^*} = v^{*9}$; $B = \langle b\rangle$, $|b| = 3$. Allora $A \not\approx A^*$ ([2], pag. 57) e $\mathfrak{L}(A \operatorname{Wr} B)$ non è isomorfo ad $\mathfrak{L}(A^* \operatorname{Wr} B)$ per il teorema precedente, poichè A ed A^* hanno centro identico. D'altra parte, posto $N = VT$, $N^* = V^* T^*$ con V, V^* 11-gruppi di Sylow e $T = (\langle t\rangle \operatorname{Wr} B) \cap N$, $T^* = (\langle t^*\rangle \operatorname{Wr} B) \cap N^*$, vi sono ovvi isomorfismi di V su V^* e di T su T^*; inoltre ogni sottogruppo di N è rappresentabile come prodotto LM^x, $L \subseteq V$, $L^M = L$, $x \in V$, $M \subseteq T$; e risulta $LM^x = L_1 M_1^{x_1}$ se e solo se $L^* M^{*x^*} = L_1^* M_1^{*x_1^*}$ (dove l'asterisco indica le immagini secondo gli isomorfismi sopra citati). L'applicazione φ di $\mathfrak{L}(N)$ su $\mathfrak{L}(N^*)$ definita ponendo $(LM^x)^\varphi = L^* M^{*x^*}$ è l'isomorfismo cercato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. SCHENKMAN, *Group theory*, Van Nostrand, 1965.

[2] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer, 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1972, in forma revisionata il 16 maggio 1972.