RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO FASANO

MARIO PRIMICERIO

La diffusione del calore in uno strato di spessore variabile in presenza di scambi termici non lineari con l'ambiente. (I) Deduzione di limitazioni a priori sulla temperatura e le sue derivate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 269-330

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__269_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

La diffusione del calore in uno strato di spessore variabile in presenza di scambi termici non lineari con l'ambiente. (I) Deduzione di limitazioni a priori sulla temperatura e le sue derivate.

ANTONIO FASANO e MARIO PRIMICERIO (*)

SUMMARY - This paper deals with a heat diffusion problem in a slab $0 \leq x \leq s(t)$, whose thickness varies according to a prescribed law. The boundary conditions are of mixed type: on $x = s(t)$ the temperature is given, while on $x = 0$ a nonlinear relationship between flux and temperature is assigned. In particular, the following subjects are studied under very weak assumptions on the data: *a*) derivation of a-priori estimates on the thermal gradient with a special regard to the case of nondecreasing boundaries $s(t)$; *b*) the temperature behavior at $x = 0$, specifying some sufficient conditions for its Hölder continuity, uniform or nonuniform Lipschitz continuity, differentiability; *c*) derivation of local estimates for the spatial derivative of thermal gradient, disregarding the distance of each point from the boundary; *d*) the increments of thermal flux with respect to time and its stability with respect to the data. Moreover, both for technical reasons and for sake of completeness, the first boundary value problem has been treated in an analogous way.

1. Introduzione.

Nello studio dei problemi al contorno connessi all'equazione del calore sono spesso necessarie stime a priori sulle soluzioni e le loro de-

---

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico « U. Dini », Università di Firenze - Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

rivate. È noto infatti che esse costituiscono un efficace strumento per la dimostrazione di teoremi sull'esistenza e le proprietà delle soluzioni; e sono inoltre — nonostante i delicati e a volte macchinosi aspetti analitici connessi alla loro deduzione — frequentemente richieste in questioni poste dall'analisi numerica od altre applicazioni di carattere strettamente tecnico.

La deduzione di stime a priori è oggetto di una vasta letteratura; ampie bibliografie si trovano in [1] e [2] e nella memoria [3].

In questo lavoro studiamo una classe di problemi al contorno di tipo non lineare per l'equazione del calore in una dimensione, altrove da noi presi in esame con diversi intenti [4], allo scopo di ottenere delle limitazioni a priori sulla soluzione (intesa nel senso classico) e le sue derivate e di condurre una analisi relativa agli accrescimenti della temperatura e del suo gradiente, con particolare riguardo al comportamento di tali quantità sul contorno del dominio di definizione.

Le limitazioni ottenute concernono l'estremo superiore delle grandezze suddette nella regione interessata alla diffusione e differiscono pertanto da quelle del tipo di Schauder (v. ad es. [1], Cap. 3, Teor. 6 (boundary estimates)), che, implicando l'uniforme hölderianità nell'intero dominio di definizione delle quantità stimate, richiedono ipotesi di notevole regolarità sui dati. D'altra parte le stime da noi dedotte hanno carattere puntuale e sono quindi più forti di altre limitazioni di tipo integrale, le quali danno una valutazione della norma della soluzione in opportuni spazi di Sobolev (cfr. ad es [2]).

Nel presente lavoro conduciamo perciò una trattazione basata su ipotesi che abbiano sufficiente generalità, affinchè i risultati siano utilizzabili per le applicazioni che ci siamo proposte; vengono poi presentate in osservazioni marginali alcune estensioni non direttamente pertinenti i problemi fisico-matematici cui questo studio è finalizzato. Nel suo complesso questo lavoro ha dunque l'intento di presentare un insieme di risultati, da noi ottenuti con un duplice scopo: costruire alcune indispensabili premesse per affrontare altri e più complessi problemi connessi alla diffusione del calore e dare un quadro abbastanza dettagliato e generale circa il tipo di stime sopra descritte, sia pure limitatamente al particolare caso esaminato. A quest'ultimo riguardo ci sembra infatti che le ipotesi richieste sopra i dati ed il contorno siano molto poco restrittive (si confrontino per esempio con quelle richieste in [2] e [3] per i risultati corrispondenti), soprattutto per il caso particolarmente interessante di domini a contorno monotono, al quale è dedicata una speciale attenzione.

Il problema in esame è il seguente:

$$
(1.1)\quad \begin{cases}
L\, u \equiv u_{xx} - u_t = 0\,, & \text{in } D_T \equiv \{(x,t)\colon 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant T\}\ ; \\
u(x,0) = h(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant s(0) \equiv b\ ; \\
u(s(t),t) = f(t)\,, & 0 < t \leqslant T\ ; \\
u_x(0,t) = g[u(0,t),t]\,, & 0 < t \leqslant T\,,
\end{cases}
$$

dove s è una assegnata funzione continua in $[0, T]$ e f, g, h sono funzioni note.

Definiamo, come d'uso, soluzione di (1.1) una funzione $u(x,t)$ tale che:

(i) u è continua in $\bar{D}_T$, chiusura di D_T, e possiede le derivate u_x, u_{xx}, u_t continue in D_T;

(ii) u soddisfa le (1.1), nell'ultima delle quali si intende

$$
u_x(0,t) = \lim_{x \to 0+} u_x(x,t)\,.
$$

Problemi di tipo parabolico nei quali intervengono condizioni al contorno non lineari come l'ultima delle (1.1) sono stati studiati da numerosi autori (ricordiamo fra l'altro [1], [2], [10], [11]) sotto diverse ipotesi, conseguendo interessanti risultati circa l'esistenza, l'unicità e le proprietà delle soluzioni.

Diamo qui uno schema del lavoro e dei principali risultati in esso contenuti.

Il paragrafo 2 è dedicato a richiami di risultati noti e ad alcuni necessari preliminari.

Nel paragrafo 3 dimostreremo alcuni teoremi relativi a limitazioni sulla derivata $u_x(x,t)$ (Teoremi 3.1, 3.2). In particolare, nel caso in cui la funzione $s(t)$ sia non decrescente, la stima ottenuta risulta indipendente dalla massima "velocità di spostamento" del contorno mobile: ciò non soltanto presenta un particolare interesse, come è noto, nella teoria dei problemi a contorno libero, ma consente pure una facile estensione dei risultati ottenuti, sotto ipotesi minimali su $s(t)$.

Il paragrafo 4 contiene lo studio degli accrescimenti della temperatura sul contorno fisso; si individuano in particolare ipotesi sufficienti ad assicurare la hölderiana di $u(0,t)$ (Teorema 4.1), la sua lipschitzianità uniforme (Teorema 4.2) o non uniforme (Teorema 4.4) e la sua derivabilità (Teorema 4.3).

Nel paragrafo 5 si studia preliminarmente un problema al contorno di primo tipo (nel quale, cioè, l'ultima della (1.1) è sostituita da una condizione che assegna la temperatura sulla faccia $x = 0$), e si deducono limitazioni sulle derivate prime e seconde della sua soluzione. Indi, utilizzando i risultati precedenti, si ottiene (Teorema 5.1) una limitazione a priori per la u_{xx}.

I paragrafi 6 e 7 sono dedicati rispettivamente allo studio degli accrescimenti temporali del gradiente termico ed alla sua stabilità rispetto ai dati del problema. Per completezza e per le esigenze applicative cui abbiamo sopra accennato, la trattazione è condotta anche per il caso di problemi al contorno del primo tipo.

Oggetto infine del paragrafo 8 è l'estensione di alcuni risultati dei paragrafi 3 e 5 a casi più generali.

2. Richiami e preliminari.

Abbiamo già detto della particolare attenzione che va posta nella scelta delle ipotesi sui dati e sul contorno affinchè i risultati siano utilizzabili nei casi di concreto interesse di cui successivamente ci occuperemo. Questo fatto e la necessità di studiare un certo numero di casi in cui si assumono preliminarmente ipotesi semplificative più onerose hanno determinato una moltiplicazione delle ipotesi utilizzate di volta in volta; poichè ciò potrebbe rendere poco agevole la lettura del lavoro, riteniamo qui utile fare il seguente elenco associando a ciascuna ipotesi un simbolo che ne richiami il significato: così la prima lettera che compare nel simbolo indicherà il dato cui la ipotesi si riferisce (s, f, g o h), mentre le successive staranno a specificare, per quanto possibile, il tipo di ipotesi (continuità, monotonia, lipschitzianità, derivabilità e così via).

I. *Ipotesi sul contorno mobile.*

(SL) s è positiva e lipschitziana in $[0, T]$ con costante di Lipschitz S,

(SM) s verifica la (SL) ed è monotona non decrescente in $[0, T]$,

(SD) s è positiva e derivabile in $[0, T]$ con derivata limitata e continua a tratti.

II. *Ipotesi sul dato sopra il contorno mobile.*

(FC) f è continua in $[0, T]$,
(FL) f è lipschitziana in $[0, T]$ con costante di Lipschitz F,
(FD) f è derivabile in $[0, T]$ con derivata limitata e continua a tratti.

III. *Ipotesi sul dato iniziale.*

(HC) h è continua in $[0, b]$ e $h(b) = f(0)$,
(HL) h è lipschitziana in $[0, b]$ con costante di Lipschitz H,
(HLb) h verifica la (HC) ed esiste una costante $a > 0$ tale che

$$|h(x) - h(b)| \leqslant a(b - x)\,, \qquad x \in [0, b]\,,$$

(HD) h verifica la (HC) ed è derivabile in $[0, b]$ con derivata limitata e continua a tratti,
(HDL) h verifica la (HC) e possiede derivata prima lipschitziana in $[0, b]$ con costante di Lipschitz H_1,

IV. *Ipotesi sulla funzione $g(u, t)$.*

(GCC) $g(u, t)$ è continua in $(-\infty, +\infty) \times [0, T]$,
(GLC) $g(u, t)$ verifica la (GCC) ed è lipschitziana rispetto ad u (*) uniformemente rispetto a t in $[0, T]$,
(GLL) $g(u, t)$ è lipschitziana rispetto ad entrambi gli argomenti (*),
(GM) $g(u, t)$ è monotona non decrescente rispetto ad u per ogni $t \in (0, T]$,
(G) $g(u, t)$ soddisfa *almeno una* delle ipotesi (i), (ii), (iii) ed *una* delle ipotesi (iv), (v), (vi) qui elencate:

(i) esiste una costante $X > \max\left\{\max\limits_{x\in[0,b]} h(x),\ \max\limits_{t\in[0,T]} f(t)\right\}$, tale che $g(X, t) \geqslant 0$ per $t \in [0, T]$,

(ii) esistono due costanti K' e X' tali che

$$K' \leqslant g(u, t) \text{ per } (u, t) \in [X', +\infty) \times [0, T]\,,$$

(*) Nel corso del presente lavoro basterà che tali ipotesi siano verificate per u variabile in $[U', U'']$ con U' e U'' definite nella (2.1).

(iii) esistono due costanti $p'>0$ X'', tali che

$$g(u,t)\geqslant -p'u \quad \text{per} \quad (u,t)\in[X'',+\infty)\times[0,T];$$

(iv) esiste una costante $Y<\min\left\{\min_{x\in[0,b]} h(x),\ \min_{t\in[0,T]} f(t)\right\}$ tale che $g(Y,t)\leqslant 0$ per $t\in[0,T]$,

(v) esistono due costanti K'' e Y' tali che

$$g(u,t)\leqslant K'' \quad \text{per} \quad (u,t)\in(-\infty, Y']\times[0,T].$$

(vi) esistono due costanti $p''>0$ e Y'', tali che

$$g(u,t)\leqslant -p''u \qquad \text{per} \quad (u,t)\in(-\infty, Y'']\times[0,T].$$

(GR) $g(u,t)$ soddisfa la condizione di raccordo $g\big(h(0),0\big)=h'(0)$.

Teoremi di esistenza e di unicità delle soluzioni di (1.1) sono stati dimostrati in [4] sia nel caso $s(0)>0$ che nel caso $s(0)=0$. Limitandoci qui al caso di $s(t)>0$ in $[0,T]$, ricordiamo che esistenza ed unicità sono assicurate dalle ipotesi

(SL), (FC), (HC), (GCC), (GM)

oppure dalle ipotesi

(SL), (FC), (HC), (GLC), (G)

(vedi Teorema 6 di [4]).

Ricordiamo ancora che, qualora si assuma il secondo gruppo di ipotesi, la soluzione può essere ottenuta con un metodo di approssimazioni successive e che valgono teoremi di dipendenza continua e monotona dai dati e di stabilità rispetto al contorno.

Ricordiamo infine da [4] che dalle ipotesi (FC), (HC), (G) discende la conoscenza di stime a priori per le soluzioni di (1.1):

$$U'\leqslant u(x,t)\leqslant U'', \tag{2.1}$$

con U' e U'' costanti dipendenti dai dati.

È chiaro dunque che, in tal caso, se g soddisfa la (GCC) potremo anche disporre di limitazioni a priori sulla funzione g

$$g_1 \leqslant g[u(0, t), t] \leqslant g_2 \tag{2.2}$$

con g_1 e g_2 costanti calcolabili a priori (*).

Le (2.1) e (2.2) sussistono anche nelle ipotesi (FC), (HC), (GCC), (GM) poichè (GCC) e (GM) implicano le (ii) e (v) di (G) come si verifica facilmente.

Riassumendo: le (2.1) e (2.2) sono entrambe valide nelle ipotesi (FC), (HC), (GCC) e se g verifica inoltre l'ipotesi (G), la quale risulta in particolare soddisfatta se vale (GM): quest'ultimo è un caso di notevole interesse fisico (cfr. [4]).

3. Stime a priori di $u_x(x, t)$.

Nel presente paragrafo dedurremo delle limitazioni su $u_x(x, t)$ seguendo due diversi procedimenti. Il primo è basato sull'uso delle classiche proprietà della soluzione fondamentale dell'equazione del calore (Teorema 3.1); il secondo invece sfrutta essenzialmente il principio di massimo mediante l'uso di opportune funzioni di confronto (Teorema 3.2).

Sebbene quest'ultimo metodo si applichi soltanto al caso in cui la funzione $s(t)$ è non decrescente, esso consente di ottenere una limitazione che — oltre ad essere più fine — non risulta dipendente da $\dot{s}$, come quella del Lemma 3.1, nè dalla costante di Lipschitz di $s(t)$ come quella del Teorema 3.1; tale fatto è essenziale, come vedremo, per alcune applicazioni. Inoltre, quando sia necessaria soltanto una stima di $u_x(s(t), t)$, il secondo metodo richiede ipotesi sensibilmente meno restrittive sul dato iniziale. Ulteriori alleggerimenti delle ipotesi saranno esaminati nel § 8.

(*) Naturalmente la validità di (GCC) non è richiesta per giungere alle (2.2) se g è una funzione limitata; si noti che le (2.1) sussistono anche in questo caso, poichè g soddisfa le (ii) e (v) di (G).

Cominciamo con il definire, per semplificare la notazione:

$$\alpha = \min_{t\in[0,T]} s(t)\ ;$$

$$\beta = \max_{t\in[0,T]} s(t)\ ;$$

$$U = \max\left\{|U'|,\ |U''|\right\};$$

$$G = \max\left\{|g_1|,\ |g_2|\right\}\ ;$$

per ogni funzione $F(y)$ definita in un intervallo $[y', y'']$ ed ivi limitata indicheremo poi con

$$\|F\| = \sup_{y\in(y',y'')} |F(y)|\,.$$

Ciò detto proviamo il seguente Lemma che per semplicità dimostrativa premettiamo ad un risultato più generale che verrà ottenuto immediatamente dopo:

LEMMA 3.1. *Siano verificate le ipotesi* (SD), (FD), (HD), (GCC) *e* (G) (*o in particolare* (GM)); *esiste allora una costante* A_1, *dipendente da* α, $\|\dot{s}\|$, *da* $\|\dot{f}\|$, *da* $\|h'\|$, *da* G *e da* T, *tale che*:

$$|u_x(s(t), t)| \leq A_1\,, \qquad t\in[0, T]\,. \tag{3.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo preliminarmente che, in virtù delle ipotesi fatte, esiste (cfr. [7]) il $\lim\limits_{x\to s(t)-} u_x(x, t)$ e tale limite è una funzione continua di t per $t\geq 0$. Allo scopo di provare la limitazione espressa dalla (3.1), ci proponiamo ora di dedurre l'equazione integrale di cui $u_x(s(t), t)$ è soluzione. Indicata con $\Gamma(x, t;\ \xi, \tau)$ la soluzione fondamentale della equazione del calore

$$\Gamma(x, t;\ \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right],$$

consideriamo le classiche funzioni di Green e di Neumann per il semispazio:

$$\left\{\begin{aligned} G(x, t;\ \xi, \tau) &= \Gamma(x, t;\ \xi, \tau) - \Gamma(-x, t;\ \xi, \tau)\,,\\ N(x, t;\ \xi, \tau) &= \Gamma(x, t;\ \xi, \tau) + \Gamma(-x, t;\ \xi, \tau)\,.\end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

Integrando in $0 < \varepsilon < \tau < t - \varepsilon$, $0 < \xi < s(\tau)$ l'identità di Green $(\partial/\partial\xi)(Nu_\xi - uN_\xi) - (\partial/\partial\tau)(Nu) = 0$, e facendo tendere ε a zero, otteniamo:

$$u(x,t) = \int_0^b N(x,t;\xi,0)h(\xi)d\xi - \int_0^t N(x,t;0,\tau)g[u(0,\tau),\tau]d\tau +$$
$$+ \int_0^t N(x,t;s(\tau),\tau)u_x(s(\tau),\tau)d\tau - \int_0^t N_\xi(x,t;s(\tau),\tau)f(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t N(x,t;s(\tau),\tau)f(\tau)\dot{s}(\tau)d\tau\,.$$

Deriviamo ora rispetto ad x, effettuiamo integrazioni per parti nel primo e nel quarto termine (tenendo presente che $N_x = -G_\xi$ e che $N_{\xi x} = G_\tau$) e passiamo al limite per x tendente ad $s(t) - 0$. Si ottiene, in maniera non dissimile da [1], pag. 220:

$$\tag{3.3} \tfrac{1}{2}u_x(s(t),t) = \int_0^b G(s(t),t;\xi,0)h'(\xi)d\xi -$$
$$- \int_0^t N_x(s(t),t;0,\tau)\,g[u(0,\tau),\tau]d\tau +$$
$$+ \int_0^t G(s(t),t;s(\tau),\tau)\dot{f}(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t N_x(s(t),t;s(\tau),\tau)u_x(s(\tau),\tau)d\tau\,;$$

(si noti che si è fatto uso della condizione di raccordo $h(b) = f(0)$).

La (3.3) è una equazione integrale del tipo di Volterra e la sua soluzione esiste, è unica ed è continua in $[0, T]$, come d'altronde già notato. Infatti il nucleo è integrabile grazie alla (SD) e si riconosce facilmente che i tre integrali che costituiscono il termine noto sono continui in $[0, T]$.

Su questi ultimi, in base alle ipotesi assunte, è agevole stabilire le seguenti limitazioni, tenendo anche conto della (2.2) e della disuguaglianza di immediata verifica

$$\frac{1}{\zeta^{n/2}}\exp\left[-\frac{\hat{\alpha}^2}{4\zeta}\right]\leqslant\left(\frac{2n}{\hat{\alpha}^2 e}\right)^{n/2}, \qquad \zeta>0\,.$$

Si ha precisamente:

$$\left|\int_0^b G(s(t),t;\,\xi,0)\,h'(\xi)\,d\xi\right|\leqslant\|h'\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(s(t)-b)/(2\sqrt{t})}^{(s(t)+b))/(2\sqrt{t})}\exp[-\eta^2]\,d\eta\leqslant\|h'\|\;;$$

$$\left|\int_0^t N_x(s(t),t;\,0,\tau)\,g[u(0,\tau),\tau]\,d\tau\right|\leqslant G\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{6}{\alpha^{\frac{4}{3}}e}\right)^{\frac{3}{2}}T\;;$$

$$\left|\int_0^t G(s(t),t;\,s(\tau),\tau)\,\dot{f}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant 2\sqrt{\frac{T}{\pi}}\,\|\dot{f}\|\,.$$

Indicata quindi con Q la somma delle quantità che compaiono ai secondi membri delle disuguaglianze ora scritte, si avrà dalla (3.3):

$$\text{(3.4)}\qquad \frac{1}{2}\,|u_x(s(t),t)|\leqslant Q+Q'\int_0^t\frac{|u_x(s(\tau),\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau$$

ove

$$Q'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{4}\,\|\dot{s}\|+\frac{1}{2ae}\right).$$

Dalla (3.4) discende la (3.1) in base ad un lemma sulle diguguaglianze integrali (cfr. [6]) da noi più volte impiegato (cfr. [4]) in casi consimili Ciò conclude la dimostrazione del Lemma 3.1.

Da questo lemma, applicando il principio di massimo alla funzione $u_x(x,t)$, discende immediatamente il seguente:

COROLLARIO 3.1. *Nelle ipotesi del Lemma* 3.1 *si ha*

$$\text{(3.5)}\qquad |u_x(x,t)|\leqslant A_2=\max(G,A_1)\,,\qquad 0\leqslant x\leqslant s(t)\,,\qquad 0<t\leqslant T\,.$$

I risultati fin qui ottenuti possono estendersi ad altri casi, sfruttando un noto teorema sulle famiglie di soluzioni di problemi parabolici (cfr. [1] pag. 80-81) in connessione con un teorema di stabilità per il problema (1.1) da noi dimostrato in [4]. Abbiamo precisamente il

TEOREMA 3.1 (limitazione su $|u_x(x, t)|$). *Siano verificate le ipotesi* (SL), (FL), (HL), (GCC) *e* (G) (*o* (GM)); *esiste una costante* A, *dipendente da* α, S, F, H, *da* G *e da* T *tale che*

$$(3.6) \qquad |u_x(x, t)| \leqslant A \,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant s(t) \,, \qquad 0 < t \leqslant T \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo anzitutto la validità della (3.6) per $0 \leqslant x < s(t)$, $0 < t \leqslant T$. Si considerino delle successioni di funzioni derivabili con derivata continua $\{s_m\}$, $\{f_m\}$, $\{h_m\}$ tali che

$\{s_m\} \to s$ uniformemente in $[0, T]$, $s_m(0) = b$, $s_m(t) \geqslant s(t)$ in $[0, T]$ e $\|\dot{s}_m\| \leqslant S$;

$\{f_m\} \to f$ uniformemente in $[0, T]$, $\|\dot{f}_m\| \leqslant F$;

$\{h_m\} \to h$ uniformemente in $[0, b]$, $\|\dot{h}_m\| \leqslant H$, $h_m(b) = f_m(0)$.

Abbiamo corrispondentemente una successione $\{u_m\}$ di soluzioni dei seguenti problemi

$$\begin{cases} L\, u_m = 0 \,, & 0 < x < s_m(t) \,,\ 0 < t \leqslant T \,; \\ u_m(x, 0) = h_m(x) \,, & 0 \leqslant x \leqslant b \,; \\ u_m(s_m(t), t) = f_m(t) \,, & 0 < t \leqslant T \,; \\ u_{mx}(0, t) = g[u(0, t), t] \,, & 0 < t \leqslant T \,. \end{cases}$$

In corrispondenza alla soluzione $u(x, t)$ considerata, $g[u(0, t), t]$ è pensata come una assegnata funzione di t, continua in $[0, T]$; i problemi (3.7) sono perciò lineari ed ammettono una e una sola soluzione.

In virtù del Teorema 4 e del Corollario 1 di [4], $\{u_m\}$ converge uniformemente in $\overline{D}_T$ alla soluzione $u(x, t)$ di (1.1) corrispondente ai dati: s, f, h. In particolare $\lim u_m(0, t) = u(0, t)$ e $\lim u_m(s(t), t) = u(s(t), t)$ uniformemente in $[0, T]$. I già citati risultati di [1] consentono allora di asserire che $\lim u_{mx} = u_x$ in ogni sottoinsieme chiuso di D_T D'altra parte alle soluzioni u_m è applicabile il Corollario 3.1 del presente lavoro; ne consegue dunque la validità della (3.6) per $0 \leqslant x < s(t)$, $0 < t \leqslant T$.

Per completare la dimostrazione del teorema basterà mostrare l'esistenza del limite di $u_x(x, t)$ per $x \to s(t)-$ e $t \in (0, T]$. Questo fatto, unitamente alla continuità di tale limite come funzione di t, risulta ad esempio dal seguente semplice ragionamento.

Si scomponga $u(x, t)$ nella somma

$$u(x, t) = f(0) + u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t) \,, \tag{3.7}$$

dove $u^{(1)}(x, t)$ e $u^{(2)}(x, t)$ risolvono rispettivamente i problemi:

$$\left\{\begin{array}{lll} L\, u^{(1)} & = 0 \,, & \text{in } D_T \,; \\ u^{(1)}(x, 0) & = h(x) - h(b) \,, & x \in [0, b] \,; \\ u^{(1)}(s(t), t) & = 0 \,, & t \in (0, T] \,; \\ u_x^{(1)}(0, t) & = g[u(0, t), t] \,, & t \in (0, T] \,; \end{array}\right. \tag{3.8}$$

e

$$\left\{\begin{array}{lll} L\, u^{(2)} & = 0 \,, & \text{in } D_T \,; \\ u^{(2)}(x, 0) & = 0 \,, & x \in [0, b] \,; \\ u^{(2)}(s(t), t) & = f(t) - f(0) \,, & t \in (0, T] \,; \\ u_x^{(2)}(0, t) & = 0 \,, & t \in (0, T] \,. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

L'esistenza e la continuità di $u_x^{(1)}(s(t), t)$ per $t \in (0, T]$ si può ora dimostrare grazie alla stima già ottenuta per u_x in punti interni di D_T, adottando i procedimenti usati per la prova del Lemma 1 di [6]. Per quanto riguarda l'esistenza e la continuità di $u_x^{(2)}(s(t), t)$, si possono invece invocare i classici risultati di [7].

Secondo quanto premesso all'inizio del paragrafo deduciamo ora un altro tipo di limitazioni su u_x. Dimostriamo anzitutto il seguente:

TEOREMA 3.2. *Siano verificate le ipotesi* (SM), (FL), (HLb) *e valga inoltre la* (2.2). *Si ha allora*

$$|u_x(s(t), t)| \leq B \,, \qquad t \in (0, T] \,, \tag{3.10}$$

con

$$B = \max\{G, a\} + eFs(T) \,. \tag{3.11}$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri per $u(x, t)$ la scomposizione (3.7). Alla soluzione $u^{(1)}(x, t)$ del problema (3.8) si possono applicare, grazie all'ipotesi (SM), le note tecniche delle barriere lineari ed il Lemma 1 di [6] per accertare la continuità di $u_x^{(1)}(s(t), t)$ in $(0, T]$ e la limitazione:

$$|u_x^{(1)}(s(t), t)| \leqslant \max\{G, a\}\,. \tag{3.12}$$

Per quanto riguarda $u^{(2)}(x, t)$, come si è detto l'esistenza e la continuità di $u_x^{(2)}(s(t), t)$ sono assicurate da [7] e si può dimostrare che:

$$|u_x^{(2)}(s(t), t)| \leqslant eFs(T)\,. \tag{3.13}$$

Per ogni $\bar{t} \in (0, T]$ confrontiamo infatti nel dominio

$$D_{\bar{t}} \equiv \{(x, t)\colon 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant \bar{t}\}$$

$u^{(2)}(x, t)$ con le funzioni

$$v^{\pm}(x, t) = eFs^2(\bar{t})\left\{\exp\left[\frac{x - s(\bar{t})}{s(\bar{t})}\right] - 1\right\} - F(\bar{t} - t) \pm \big(f(\bar{t}) - f(0)\big)\,. \tag{3.14}$$

Si verifica agevolmente che è

$$Lv^{\pm} = eF\exp\left[\frac{x - s(\bar{t})}{s(\bar{t})}\right] - F \geqslant 0\;;$$

inoltre facendo uso della monotonia di s e della lipschitzianità di f si vede che:

$$\begin{aligned} v^{\pm}(x, 0) = eFs^2(\bar{t})\left\{\exp\left[\frac{x - s(\bar{t})}{s(\bar{t})}\right] - 1\right\} - F\bar{t} \pm \big(f(\bar{t}) - f(0)\big) \leqslant \\ \leqslant -F\bar{t} \pm \big(f(\bar{t}) - f(0)\big) \leqslant 0\,. \end{aligned}$$

È poi per le stesse ragioni:

$$\begin{aligned} v^{\pm}(s(t), t) = eFs^2(\bar{t})\left\{\exp\left[\frac{s(t) - s(\bar{t})}{s(\bar{t})}\right] - 1\right\} - F(\bar{t} - t) \pm \big(f(\bar{t}) - f(0)\big) \leqslant \\ \leqslant -F(\bar{t} - t) \pm \big(f(\bar{t}) - f(0)\big) \leqslant \pm \big(f(t) - f(0)\big)\,. \end{aligned}$$

È infine

$$v_x^{\pm}(0, t) = Fs(\bar{t}) > 0\,.$$

Dal confronto con $u^{(2)}(x, t)$ in $D_{\bar{t}}$, si conclude, in base al principio di massimo che

$$v^{\pm}(x,t) \leq \pm u^{(2)}(x,t)\,;$$

ma poichè è $v^{\pm}(s(\bar{t}),\bar{t}) = \pm u^{(2)}(s(\bar{t}),\bar{t})$, segue

$$|u_x^{(2)}(s(\bar{t}),\bar{t})| \leq eF\,s(\bar{t})\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\bar{t}$ resta dunque provata la (3.13) e con essa il Teorema 3.2.

Osservazione 3.1. Da un semplice esame della dimostrazione del Teorema 3.2 si vede che nelle stesse ipotesi è:

$$f(t) - B(x - s(t)) \leq u(x,t) \leq f(t) + B(x - s(t))\,, \qquad 0 \leq t \leq T\,. \tag{3.10'}$$

Abbiamo poi il seguente

Corollario 3.2 (limitazione di $|u_x(x,t)|$ per contorni monotoni). *Se, ferme restando le altre ipotesi del Teorema* 3.2, *si sostituisce la* (HLb) *con la* (HL) *si ha*

$$|u_x(x,t)| \leq B_1 \text{ in } D_T\,, \tag{3.15}$$

dove

$$B_1 = \max\{G, H\} + eF\,s(T)\,.$$

Dimostrazione. Se la h è derivabile, la (3.15) è una immediata conseguenza del Teorema precedente e del principio di massimo applicato a $u_x(x,t)$.

Il passaggio al caso di h lipschitziana si esegue in modo analogo a quanto visto nella dimostrazione del Teorema 3.1.

Di una certa importanza, tanto teorica che applicativa, è la seguente conseguenza del Teorema 3.1 (o del Teorema 3.2) che fornisce una descrizione della stabilità del problema (1.1) rispetto alla legge di variazione del contorno; tale descrizione, grazie alle ipotesi più restrittive sul contorno stesso e sui dati, è più precisa di quella già da noi ottenuta in [4] (vedi Corollario 1).

Siano dunque $\bar{u}(x,t)$ e $\bar{\bar{u}}(x,t)$ soluzioni di (1.1) corrispondenti a due leggi di variazione del contorno $x = \bar{s}(t)$, $x = \bar{\bar{s}}(t)$; ove siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.1 (del Teorema 3.2) si indichino con $\bar{A}$ ed $\bar{\bar{A}}$ (con $\bar{B}$ e $\bar{\bar{B}}$) le corrispondenti costanti che compaiono nella (3.6) (nella (3.10)); indichiamo poi con $\|\Delta u\|$ il massimo della quantità $|\bar{u}(x,t) - \bar{\bar{u}}(x,t)|$ valutato nel comune campo di definizione di $\bar{u}$ ed $\bar{\bar{u}}$. Vale il seguente:

COROLLARIO 3.3. *Nelle ipotesi del Teorema* 3.1 (*o del Teorema* 3.2) *e se vale inoltre la* (GLC), *esiste una costante c, dipendente da* $\hat{A} = \max(\bar{A}, \bar{\bar{A}})$ (*da* $\hat{B} = \max(\bar{B}, \bar{\bar{B}})$), *da G e da T tale che*:

$$\|\Delta u\| \leqslant c \|\bar{s}(t) - \bar{\bar{s}}(t)\| . \tag{3.16}$$

DIMOSTRAZIONE. Definito per ogni t,

$$\hat{s}(t) = \min\left(\bar{s}(t), \bar{\bar{s}}(t)\right)$$

si ha nei due casi (la seconda disuguaglianza segue dall'Osservazione 3.1)

$$|\bar{u}(\hat{s}(t), t) - \bar{\bar{u}}(\hat{s}(t), t)| \leqslant \hat{A}|\bar{s}(t) - \bar{\bar{s}}(t)| ,$$

$$|\bar{u}(\hat{s}(t), t) - \bar{\bar{u}}(\hat{s}(t), t)| \leqslant \hat{B}|\bar{s}(t) - \bar{\bar{s}}(t)| .$$

Basterà ora applicare nel dominio $0 < x < \hat{s}(t)$, $0 < t \leqslant T$ il Teorema 4 di [4] sulla dipendenza continua delle soluzioni di (1.1) dai valori al contorno per ottenere la (3.16).

Concludiamo questo paragrafo con una osservazione che amplia sensibilmente la validità dei risultati ottenuti nel caso di contorno mobile monotono.

OSSERVAZIONE 3.2. Il Corollario 3.2 e il Corollario 3.3 (per la parte che riguarda i contorni monotoni) e la (3.10′) restano validi se nella ipotesi (SM) invece di assumere la lipschitzianità per $s(t)$ se ne suppone la sola continuità. Infatti un contorno $s(t)$ soddisfacente questa ipotesi più debole può essere uniformemente approssimato da destra, da una successione di funzioni $s_m(t)$ monotone lipschitziane; poichè le $s_m(t)$ soddisfano la (SM) una applicazione del teorema delle famiglie di soluzioni fa seguire immediatamente quanto asserito.

Resta chiaro — senza che l'Osservazione debba essere ripetuta — che questo ampliamento concerne anche altri risultati, su problemi con $s(t)$ monotona, che saranno ottenuti nei seguenti paragrafi.

4. Studio della temperatura sul contorno fisso.

Questo paragrafo è dedicato allo studio degli accrescimenti della funzione $u(0, t)$.

Osserviamo preliminarmente che nelle ipotesi, riassunte alla fine del paragrafo 2, in cui sono valide le (2.1), (2.2) e se la funzione $h(x)$ è lipschitziana in un intervallo $[0, d]$, a partire dai risultati di [2] (v. ad es. pag. 437) si può ottenere, mediante tecniche già usate nel precedente paragrafo, la seguente limitazione:

$$(4.1) \qquad |u_x(x, t)| \leqslant C, \qquad 0 \leqslant x \leqslant d^* = \min\left(d, \frac{\alpha}{2}\right), \qquad 0 < t \leqslant T$$

essendo C una costante dipendente in modo noto dai dati e da d^*. Ciò premesso, dimostriamo il seguente:

Teorema 4.1 (hölderianità di $u(0, t)$). *Nelle ipotesi in cui vale la* (4.1), *la funzione $u(0, t)$ è hölderiana di ordine $\frac{1}{2}$ in $[0, T]$; si ha cioè*:

$$(4.2) \qquad |u(0, t'') - u(0, t')| \leqslant C_1(t'' - t')^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant T,$$

con

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\max\left(C, \frac{2U}{d^*}\right) + G\right\}.$$

Dimostrazione. Si fissi ad arbitrio $t' \in [0, T)$; e si consideri la funzione $w_1(x, t)$ soluzione del seguente problema:

$$(4.3) \qquad \begin{cases} L\, w_1 = 0, & 0 < x,\ t' < t \leqslant T; \\ w_1(x, t') = B'x, & 0 \leqslant x; \\ w_{1x}(0, t) = \bar{g}_1 = \min(0, g_1), & t' < t \leqslant T; \end{cases}$$

con B' costante positiva da determinarsi.

È perciò

$$(4.4) \qquad w_1(x, t) = B'x + \frac{B' - \bar{g}_1}{\sqrt{\pi}} \int_{t'}^{t} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau - t')}\right] d\tau$$

e quindi, se è $B' \geqslant \bar{g}_1$,

$$w_1(d^*, t) \geqslant B' d^* , \qquad t' \leqslant t \leqslant T . \tag{4.5}$$

Si consideri ora la somma $u(0, t') + w_1(x, t)$; affinchè questa risulti maggiore di $u(x, t)$, basterà — per il principio di massimo — che B' sia scelta in modo che:

$$u(d^*, t) \leqslant u(0, t') + w_1(d^*, t) , \qquad t' < t \leqslant T ; \tag{4.6}$$

e che

$$u(x, t') \leqslant u(0, t') + B'x , \qquad 0 \leqslant x \leqslant d^* . \tag{4.7}$$

Perchè la (4.6) sia soddisfatta è sufficiente, in virtù della (4.5), che sia

$$B' \geqslant \frac{2U}{d^*} .$$

Per quanto riguarda la (4.7) basta che B' sia maggiore od uguale della costante C della (4.1). Perciò se si assume $B' = \max(2U/d^*, C)$, si avrà

$$u(x, t) \leqslant u(0, t') + w_1(x, t) , \qquad 0 \leqslant x \leqslant d^* , \qquad t' \leqslant t \leqslant T .$$

In modo del tutto analogo si prova che

$$u(x, t) \geqslant u(0, t') + w_2(x, t) , \qquad 0 \leqslant x \leqslant d^* , \qquad t' \leqslant t \leqslant T$$

dove w_2 è la soluzione del seguente problema

$$\left\{ \begin{array}{lll} L\, w_2 & = 0 , & 0 < x , \ t' < t \leqslant T ; \\ w_2(x, t') & = -B'x , & 0 \leqslant x ; \\ w_{2x}(0, t) & = \bar{g}_2 = \max(0, g_2) , & t' < t . \end{array} \right. \tag{4.8}$$

L'espressione di w_2 si ottiene con ovvie sostituzioni dalla (4.4). Si ha così

$$w_2(0, t) \leqslant u(0, t) - u(0, t') \leqslant w_1(0, t) ,$$

cioè

$$-(2/\sqrt{\pi})(B'+\bar{g}_2)(t-t')^{\frac{1}{2}} \leqslant u(0,t)-u(0,t') \leqslant$$
$$\leqslant (2/\sqrt{\pi})(B'-\bar{g}_1)(t-t')^{\frac{1}{2}}, \qquad t'\leqslant t\leqslant T,$$

da cui segue la (4.2).

Il passo successivo della nostra analisi consiste nella determinazione di condizioni, sui dati, sufficienti ad assicurare un comportamento lipschitziano della temperatura sul piano $x=0$.

A tale scopo esprimiamo $u(x,t)$ nel modo seguente

$$u(x,t)=V(x,t)+Z(x,t)\,, \tag{4.9}$$

dove $V(x,t)$ e $Z(x,t)$ risolvono rispettivamente i problemi:

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\,V = 0\,, & 0<x<d^*,\ 0<t\leqslant T\,;\\ V(x,0)=h(x)\,, & 0\leqslant x\leqslant d^*\,;\\ V(d^*,t)=u(d^*,t)\,, & 0<t\leqslant T\,;\\ V_x(0,t)=h'(0)\,, & 0<t\leqslant T\,; \end{cases} \tag{4.10}$$

e

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\,Z = 0\,, & 0<x<d^*,\ 0<t\leqslant T\,;\\ Z(x,0)=0\,, & 0\leqslant x\leqslant d^*\,;\\ Z(d^*,t)=0\,, & 0<t\leqslant T\,;\\ Z_x(0,t)=g[u(0,t),t]-h'(0)\,, & 0<t\leqslant T\,. \end{cases} \tag{4.11}$$

Per quanto riguarda $V(x,t)$ possiamo provare il seguente:

LEMMA 4.1. *Sia $u(d^*,t)$ limitata* (*) *e la funzione $h(x)$ abbia in* $[0,d^*]$ *derivata continua a tratti e tale che*

$$|h'(x)-h'(0)|\leqslant h_1 x\,, \qquad 0\leqslant x\leqslant d^*\,. \tag{4.12}$$

Si ha allora:

$$|V_t(0,t)|\leqslant K\,, \qquad 0<t\leqslant T\,, \tag{4.13}$$

con K definito dalla (4.15).

(*) Cfr. la (2.1).

DIMOSTRAZIONE. Notiamo preliminarmente che, per $t \in (0, T]$, esiste $V_t(0, t)$ ed è uguale a $\lim_{x \to 0+} V_t(x, t) = \lim_{x \to 0+} V_{xx}(x, t)$ ossia $V_t(0, t) = V_{xx}(0, t)$. Si esprima infatti $V(x, t)$ nel modo seguente

$$V(x, t) = h'(0)x + \bar{v}(x, t)$$

e si osservi che la funzione $\bar{v}(x, t)$ soddisfa il seguente problema di conduzione:

$$\begin{cases} L\,\bar{v} = 0\,, & -d^* < x < d^*\,,\ 0 < t \leq T\,; \\ \bar{v}(x, 0) = \begin{cases} -h'(0)x + h(x)\,, & 0 \leq x \leq d^*\,; \\ h'(0)x + h(-x)\,, & -d^* \leq x \leq 0\,; \end{cases} \\ \bar{v}(\pm d^*, t) = u(d^*, t) - h'(0)d^*\,, & 0 < t \leq T\,. \end{cases}$$

L'equazione del calore sarà quindi valida per $\bar{v}$ in particolare anche nei punti $(0, t)$, $0 < t \leq T$; ivi si ha inoltre la continuità di $\bar{v}_{xx}$ e $\bar{v}_t$, rispettivamente uguali a V_{xx} e V_t.

Si noti poi che per il problema (4.10), nelle ipotesi assunte, si hanno stime a priori su $V_x(x, t)$ del tipo (4.1). Esisterà quindi anche una costante C' tale che

$$|\bar{v}_x(d^*, t)| \leq C'\,, \qquad 0 < t \leq T\,.$$

Sulla base di quanto finora osservato dimostreremo la (4.13) stabilendo una limitazione per $\bar{v}_{xx}(0, t)$; a questo scopo poniamo

$$w^{\pm}(x, t) = Kx \pm \bar{v}_x(x, t)$$

con K costante positiva da determinarsi ed osserviamo che:

$$\begin{cases} L\,w^{\pm} = 0\,, & 0 < x < d^*\,,\ 0 < t \leq T\,; \\ w^{\pm}(x, 0) = Kx \pm [h'(x) - h'(0)]\,, & 0 \leq x \leq d^*\,; \\ w^{\pm}(d^*, t) = Kd^* \pm \bar{v}_x(d^*, t)\,, & 0 < t \leq T\,; \\ w^{\pm}(0, t) = 0\,, & 0 < t \leq T\,. \end{cases} \tag{4.14}$$

È quindi possibile, in base alle ipotesi fatte, scegliere K in modo tale che le quantità al secondo membro della seconda e della terza delle (4.14) risultino positive; basta infatti porre

$$K = \max\{C'/d^*, h_1\}. \tag{4.15}$$

In tal caso, per il principio di massimo, sarà

$$w^{\pm}(x, t) \geqslant 0$$

all'interno del dominio di definizione e, essendo $w^{\pm}(0, t) = 0$, risulterà

$$w_x^{\pm}(0, t) \geqslant 0 .$$

Ossia

$$|\bar{v}_{sx}(0, t)| \leqslant K ;$$

da qui si ottiene immediatamente la (4.13). È chiaro che la limitazione (4.13) poteva dedursi anche con il metodo dei « potenziali termici » che ci ha condotto, ad esempio, alla (3.3); tali calcoli sono però più tediosi e meno espressivi.

Studiamo ora $Z(x, t)$, dimostrando il seguente:

Lemma 4.2. *Valga la* (4.2) *e siano inoltre verificate* (GLL) *e* (GR); *si ha allora*

$$|Z(0, t+\delta) - Z(0, t)| \leqslant C_3\delta + \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{|u(0, \tau+\delta) - u(0, \tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\,, \tag{4.16}$$
$$0 \leqslant t < t+\delta \leqslant T\,,$$

dove γ *è la costante di Lipschitz di* g *per* $t \in [0, T]$ *e* $u \in [U', U'']$ *e* C_3 *è una costante definita dalla* (4.20).

Dimostrazione. Mediante la tecnica già usata nel precedente paragrafo si può esprimere $Z(0, t)$ nella forma

$$Z(0, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{g[u(0, \tau), \tau] - h'(0)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \tag{4.17}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{s^2(\tau)}{4(t-\tau)}\right] Z_x(d^*, \tau)\,d\tau\,.$$

Poichè u è limitata (e di conseguenza lo sono g e quindi Z), vale per Z_x una limitazione simile alla (4.1).

Perciò il secondo termine al secondo membro della (4.17) è una funzione derivabile di t con derivata limitata in valore assoluto da una costante C_2 calcolabile a priori.

Poniamo ora

$$I(t)=\int_0^t \frac{g[u(0,\tau),\tau]-h'(0)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau$$

e cerchiamo una stima per l'incremento $I(t+\delta)-I(t)$.

Abbiamo, con semplici trasformazioni:

$$I(t+\delta)-I(t)=\int_0^t \frac{g[u(0,\tau+\delta),\tau+\delta]-g[u(0,\tau),\tau]}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau+$$
$$+\int_0^\delta \frac{g[u(0,\tau),\tau]-h'(0)}{\sqrt{t+\delta-\tau}}\,d\tau=I_1(t,\delta)+I_2(t,\delta)\,.$$

L'ipotesi (GLL) consente di ottenere la maggiorazione:

$$(4.18)\qquad |I_1(t,\delta)|\leqslant 2\gamma\delta\sqrt{t}+\gamma\int_0^t \frac{|u(0,\tau+\delta)-u(0,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\,.$$

Quanto a I_2, l'ipotesi (GR) unitamente alla (GLL) porta a concludere che

$$|g[u(0,\tau),\tau]-h'(0)|=|g[u(0,\tau),\tau]-g[h(0),0]|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma|u(0,\tau)-h(0)|+\gamma\tau\,.$$

Ricordando ora il Teorema 4.1, avremo

$$|g[u(0,\tau),\tau]-h'(0)|\leqslant\gamma(C_1\sqrt{\tau}+\tau)\,.$$

Otteniamo così, con semplici calcoli

$$(4.19)\qquad |I_2(t,\delta)|\leqslant\tfrac{1}{2}\gamma C_1\pi\delta+2\gamma\delta^{\frac{3}{2}}\,.$$

Si ha quindi in definitiva

$$|I(t+\delta)-I(t)|\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\gamma C_1+2\gamma\sqrt{T}\right)\delta+2\gamma\delta^{\frac{3}{2}}+$$
$$+\gamma\int_0^t\frac{|u(0,\tau+\delta)-u(0,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\,.$$

Ricordando adesso la (4.17) potremo scrivere

$$|Z(0,t+\delta)-Z(0,t)|\leqslant C_3\delta+\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{|u(0,\tau+\delta)-u(0,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\,,$$

ove ci si è limitati ai valori di $\delta<1$ (senza ovviamente perdere in generalità) e si è posto:

$$C_3=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma C_1+\frac{2\gamma}{\sqrt{\pi}}\sqrt{T}+\frac{2\gamma}{\sqrt{\pi}}+C_2\,. \tag{4.20}$$

Il Lemma 4.2 è così dimostrato.
Passiamo ora alla dimostrazione del

TEOREMA 4.2 (lipschitzianità di $u(0,t)$). *Supponiamo che la funzione g soddisfi la* (GLL), *la* (GR) *e valgano le* (2.1); *inoltre la funzione $h(x)$ abbia in* $[0,d^*]$ *derivata continua soddisfacente inoltre la* (4.12). *Esiste allora una costante C_4, definita nella* (4.23), *tale che*:

$$|u(0,t+\delta)-u(0,t)|\leqslant C_4\delta\,,\qquad 0\leqslant t\leqslant t+\delta\leqslant T\,. \tag{4.21}$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie alla scomposizione (4.9) ed ai risultati del Lemma 4.1 e del Lemma 4.2 possiamo scrivere:

$$|u(0,t+\delta)-u(0,t)|\leqslant(K+C_3)\delta+ \tag{4.22}$$
$$+\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{|u(0,\tau+\delta)-u(0,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\,.$$

La (4.22) ha la forma di una disuguaglianza integrale già altre volte esaminata; essa comporta la seguente limitazione:

$$(4.23)\qquad |u(0, t+\delta) - u(0, t)| \leqslant (K + C_3)\,\delta \left(1 + 2\gamma \sqrt{\frac{T}{\pi}}\right) \exp[\gamma^2 T]\,;$$

ciò completa la dimostrazione del teorema.

Proseguendo nello studio della temperatura superficiale sul piano fisso $x = 0$ dedurremo ora delle condizioni sufficienti ad assicurare la derivabilità di $u(0, t)$. Sussiste il seguente

TEOREMA 4.3 (derivabilità di $u(0, t)$). *Valgano le ipotesi del Teorema 4.2 e inoltre la funzione $g[u(0, t), t]$ possegga derivata continua rispetto ad entrambi gli argomenti. La funzione $u(0, t)$ possiede allora derivata limitata e continua in* $(0, T]$.

DIMOSTRAZIONE. Studiamo il rapporto incrementale $\delta^{-1}[u(0, t + \delta) - u(0, t)]$; usando le notazioni del Lemma 4.2, studiamo in particolare $I_1(t, \delta)/\delta$ e $I_2(t, \delta)/\delta$. Si ha

$$\delta^{-1} I_1(t, \delta) = \int_0^t \frac{1}{\delta} \frac{g[u(0, \tau), \tau + \delta] - g[u(0, \tau), \tau]}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau + \int_0^t \frac{1}{\delta} \frac{g[u(0, \tau + \delta), \tau + \delta] - g[u(0, \tau), \tau + \delta]}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau\,.$$

Il primo termine al secondo membro ammette limite per $\delta \to 0$, per la derivabilità di g rispetto al secondo argomento; l'integrando del secondo termine può esprimersi come $(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}\ [\partial g/\partial u]_{u = \tilde{u}}\,\varrho_\delta(\tau)$; dove $\tilde{u}$ è compreso tra $u(0, \tau)$ e $u(0, \tau + \delta)$ mentre $\varrho_\delta(\tau)$ rappresenta il rapporto incrementale della funzione $u(0, \tau)$.

Passiamo ora ad $I_2\ (t, \delta)/\delta$; si ha:

$$\delta^{-1} I_2(t, \delta) = \int_0^\delta \frac{1}{\delta} \frac{g[u(0, \tau), \tau] - g[h(0), \tau]}{\sqrt{t - \tau + \delta}}\, d\tau + \int_0^\delta \frac{1}{\delta} \frac{g[h(0), \tau] - g[h(0), 0]}{\sqrt{t - \tau + \delta}}\, d\tau\,.$$

Nel secondo termine al secondo membro il rapporto $\big(g[h(0),\tau]-$ $-g[h(0),0]\big)/\delta$ è limitato e quindi l'integrale tende a zero con δ; quanto al primo termine, essendo verificate le ipotesi del Teorema 4.2 ed essendo limitata la derivata di g rispetto al primo argomento, si ha che il numeratore dell'integrando è infinitesimo del primo ordine con δ. Quindi $\lim\limits_{\delta\to 0}\delta^{-1}I_2(t,\delta)$ esiste ed è nullo.

Si ha dunque che il rapporto incrementale di $u(0,t)$, cioè $\varrho_\delta(t)$, soddisfa la seguente equazione di Volterra

$$\varrho_\delta(t)=F(t,\delta)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]_{u=\tilde{u}}\varrho_\delta(\tau)\,d\tau$$

con $F(t,\delta)$ funzione continua di t e δ.

Si consideri ora la funzione $\varrho_0(t)$ soluzione della seguente equazione:

$$\varrho_0(t)=F\,(t,0)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial u}g[u(0,\tau),\tau]\,\varrho_0(\tau)\,d\tau$$

che, per le ipotesi assunte e per quanto visto esiste, è unica ed è una funzione continua di t; consideriamo la differenza $\varrho_\delta(t)-\varrho_0(t)$.

Si ha:

$$\begin{aligned}|\varrho_\delta(t)-\varrho_0(t)|\leqslant \max_{t\in[0,T]}|F(t,\delta)-F(t,0)|\,+&\\ +\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\left|\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]_{\tilde{u}}-\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]\right|\,|\varrho_0(\tau)|\,d\tau\,+&\\ +\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\left|\left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]_{\tilde{u}}\right|\,|\varrho_\delta(\tau)-\varrho_0(\tau)|\,d\tau\,.&\end{aligned}$$

A questa disuguaglianza integrale può applicarsi il lemma da noi più volte usato in casi analoghi, conseguendo il risultato richiesto.

Vogliamo ora dedurre un risultato intermedio tra quello del Teorema 4.1 e quello del Teorema 4.2.

TEOREMA 4.4. *Ferme restando le altre ipotesi del Teorema* 4.2 *non valgano la* (4.12) *e la* (GR); *esiste allora una costante* C_5 *dipendente in modo noto dai dati tale che per* δ *minore di un opportuno* δ_0 *è*

$$|u(0, t+\delta) - u(0, t)| \leq C_5(\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}), \quad 0 \leq t < t+\delta \leq T. \tag{4.24}$$

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la (4.24) occorre anzitutto riprendere in esame la funzione $V(x, t)$, soluzione del problema (4.10). Usando la tecnica descritta nel paragrafo 3, si costruisce per $V(0, t)$ la seguente espressione

$$V(0, t) = \int_0^{d^*} N(0, t, \xi, 0) h(\xi) d\xi - \int_0^t N(0, t; 0, \tau) h'(0) d\tau + \\ + \int_0^t N(0, t; d^*, \tau) V_x(d^*, \tau) d\tau - \int_0^t N_\xi(0, t; d^*, \tau) V(d^*, \tau) d\tau. \tag{4.25}$$

Essendo $V(x, t)$, $V_x(x, t)$ limitabili a priori, secondo quanto già visto, gli ultimi due termini hanno derivata limitata da una costante, calcolabile in base ai dati. Valutiamo dunque l'incremento relativo all'intervallo $(t, t+\delta)$ dei primi due integrali, e cioè studiamo l'incremento della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{d^*} \exp[-\xi^2/4t] h(\xi) d\xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} h'(0) \sqrt{t}. \tag{4.26}$$

Il primo integrale si può scrivere nella forma

$$J(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{d^*/(2\sqrt{t})} \exp[-\eta^2] h(2\sqrt{t}\,\eta) d\eta.$$

Il suo incremento nell'intervallo $(t, t+\delta)$ è quindi

$$J(t+\delta) - J(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{d^*/(2\sqrt{t+\delta})} \exp[-\eta^2][h(2\sqrt{t+\delta}\,\eta) - h(2\sqrt{t}\,\eta)] d\eta + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{d^*/(2\sqrt{t+\delta})}^{d^*/(2\sqrt{t})} \exp[-\eta^2] h(2\sqrt{t}\,\eta) d\eta.$$

Si ha dunque

$$(4.27)\qquad |J(t+\delta)-J(t)|\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\|h'\|(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t})+ \\ +\|h\|\left[\operatorname{erf}\left(\frac{d^*}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{d^*}{2\sqrt{t+\delta}}\right)\right].$$

È ora possibile trovare una costante K_1, dipendente solo da T, tale che

$$K_1\min_{[0,T]}\left\{\frac{d}{dt}\sqrt{t}\right\}=\frac{K_1}{2\sqrt{T}}\geqslant\max_{[0,T]}\left\{\frac{d}{dt}\left(-\operatorname{erf}\frac{d^*}{2\sqrt{t}}\right)\right\}.$$

Quindi, per $0\leqslant t<t+\delta\leqslant T$ l'incremento di $(-\operatorname{erf} d^*/2\sqrt{t})$ risulta maggiorato dall'incremento di $K_1\sqrt{t}$. Risulta così dalla (4.27):

$$(4.28)\qquad |J(t+\delta)-J(t)|\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\|h'\|+K_1\|h\|\right)(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}).$$

Essendo poi $\delta=(t+\delta)-t\leqslant(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t})2\sqrt{T}$ per ogni $t\geqslant 0$, le (4.25), (4.26) e (4.28) portano a concludere che

$$(4.29)\qquad |V(0,t+\delta)-V(0,t)|\leqslant K_2(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}),\quad 0\leqslant t<t+\delta\leqslant T,$$

dove la costante K_2 dipende dai dati.

Vogliamo ora trovare una limitazione sull'incremento della funzione $Z(0,t)$ analoga alla (4.16), ora non più valida essendo stata soppressa l'ipotesi (GR). Quest'ultima è stata utilizzata solamente per la deduzione della (4.19). Nel caso in esame avremo invece

$$|I_2(t,\delta)|=\left|\int_0^\delta\frac{g[u(0,\tau),\tau]-h'(0)}{\sqrt{t+\delta-\tau}}\,d\tau\right|\leqslant 2(G+|h'(0)|)(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}).$$

Si ha dunque, per $\delta<1$, e posto

$$C_3'=4G/\sqrt{\pi}+[C_2+(2/\sqrt{\pi})\sqrt{T}\gamma]2\sqrt{T},$$

$$(4.16')\qquad |Z(0,t+\delta)-Z(0,t)|\leqslant C_3'(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t})+ \\ +\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{|u(0,\tau+\delta)-u(0,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,\quad 0\leqslant t<t+\delta\leqslant T;$$

ricordando infine la (4.9), da (4.29) e (4.16′) consegue

$$(4.30)\qquad |u(0, t+\delta)-u(0, t)| \leqslant K_3(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}) + \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{|u(0, \tau+\delta)-u(0, \tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau .$$

Indichiamo ora con $y(t)$ la soluzione dell'equazione integrale di Volterra

$$(4.31)\qquad y(t) = K_3(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}) + \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau .$$

Se si dimostrano i seguenti fatti:

a) $0 \leqslant |u(0, t+\delta)-u(0, t)| \leqslant y(t)$;

b) $y(t) \leqslant C_5(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t})$ per $0 \leqslant t \leqslant T_1$, con T_1 indipendente da δ, la (4.24) risulterà provata.

Infatti, se $T_1 > T$ la cosa è evidente. Se invece $T_1 < T$, purchè si assuma $\delta < T_1$, per valutare l'incremento di $u(0, t)$ in un intorno del tipo $(t_0, t_0+\delta)$ con $0 < t_0 < T_1 < t_0+\delta$, sarà sufficiente ripetere tutti i i calcoli finora svolti assumendo l'istante $t = t_0$ come istante iniziale (si noti infatti che la funzione $u(x, t_0)$ soddisfa le medesime condizioni richieste per il dato iniziale $h(x)$). L'indipendenza di T_1 da δ porta infine a concludere la validità della (4.24) in tutto l'intervallo $[0, T]$.

La *a*) si dimostra facilmente. Posto infatti

$$w(t) = |u(0, t+\delta)-u(t)| - y(t) ,$$

si ha

$$w(t) \leqslant \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau .$$

Introdotta poi la funzione

$$w_+(t) = \begin{cases} w(t) , & \text{se } w(t) \geqslant 0 , \\ 0 \quad , & \text{se } w(t) < 0 , \end{cases}$$

e osservato che

$$0 \leqslant w_+(t) \leqslant \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w_+(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau ,$$

si conclude immediatamente che $w_+(t) \equiv 0$ e ciò prova la a).

Per provare la b) definiamo la funzione

$$\overline{w}(t) = y(t) - (K_3 + q)(\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}) ,$$

dove q è una costante positiva. Questa risolve l'equazione:

$$(4.32) \qquad \overline{w}(t) = -q(\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}) + (K_3 + q)\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\sqrt{\tau+\delta} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\overline{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau .$$

La dimostrazione della b) si riduce quindi a far vedere che per $t\in[0, T_1]$, con T_1 indipendente da δ, il termine noto nella (4.32) è negativo, ossia che è

$$(K_3 + q)\frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\sqrt{\tau+\delta} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \leqslant q(\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}) .$$

Calcolando l'integrale al primo membro, si riconosce facilmente che questa disuguaglianza è implicata dalla seguente

$$\frac{1}{2}\gamma\sqrt{\pi}(K_3 + q)\,\delta \leqslant q(\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}) .$$

Pochè il secondo membro è una funzione decrescente di t, basterà perciò avere

$$(4.33) \qquad \delta \leqslant K_4(\sqrt{T_1+\delta} - \sqrt{T_1}) ,$$

con $$K_4 = 2q\{(K_3 + q)\gamma\sqrt{\pi}\}^{-1} .$$

Poiché infine $\sqrt{T_1+\delta} - \sqrt{T_1}$, per $\delta < T_1$ è maggiore di $\delta/(2\sqrt{2T_1})$, la (4.33) risulta verificata se si assume T_1 in modo che $K_4/(2\sqrt{2T_1}) \geqslant 1$, cioè $T_1 \leqslant K_4^2/8$, che risulta appunto indipendente da δ.

Ciò conclude la prova del Teorema 4.4.

La (4.24) descrive un comportamento lipschitziano non uniforem per la funzione $u(0, t)$ nell'intervallo $(0, T]$, ferma però restando la hölderianità nell'intorno dell'origine assicurata dal Teorema 4.1.

Si potrebbe anche dimostrare che la lipschitzianità non uniforme in $(0, T]$ sussiste anche ove sulla $h(x)$ non si facesse nemmeno l'ipotesi di derivabilità; ma si avrebbe in tal caso una limitazione del tipo:

$$(4.34) \qquad |u(0, t+\delta) - u(0, t)| \leqslant C_6\, t_0^{-\frac{3}{2}}\delta\,, \qquad 0 < t_0 \leqslant t < t+\delta \leqslant T\,.$$

Concludiamo questo paragrafo con la seguente

OSSERVAZIONE 4.1. Il teorema 4.2 continua a valere se si sostituisce l'ipotesi (GLL) con la seguente:

$$(4.35) \qquad |g(\eta'', t'') - g(\eta', t')| \leqslant \gamma\{|\eta'' - \eta'| + |\sqrt{t''} - \sqrt{t'}|\}\;;$$
$$t', t'' \in [0, T]\;;\; \eta', \eta'' \in [U', U'']\;;$$

in altre parole la g ha in tal caso, rispetto a t un comportamento lipschitziano non uniforme.

Per verificare quanto ora asserito basta infatti controllare che il Lemma 4.2 resta valido con una tale ipotesi sulla g. L'integrale I_1 viene così limitato:

$$|I_1(t, \delta)| \leqslant \gamma \int_0^t \frac{\sqrt{\tau+\delta} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau + \gamma \int_0^t \frac{|u(0, \tau+\delta) - u(0, \tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\delta\pi/2 + \gamma \int_0^t \frac{|u(0, \tau+\delta) - u(0, \tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\;;$$

Per l'integrale I_2, poichè è in questo caso:

$$|g[u(0, \tau), \tau] - h'(0)| \leqslant \gamma(C_1\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau})\,,$$

si ha che esiste una costante C'' dipendente da C_1, γ e T tale che:

$$|I_2(t, \delta)| \leqslant C''\delta\;;$$

il resto della dimostrazione del Lemma 4.2, e quindi del Teorema 4.2, resta invariato. Analoga osservazione può farsi a proposito del Teorema 4.4.

5. Stime a priori sulla $u_{xx}(x, t)$.

Lo scopo di questo paragrafo è quello di stabilire delle limitazioni per la derivata seconda rispetto ad x delle eventuali soluzioni della (1.1), limitazioni dipendenti in modo noto dai dati del problema.

È necessaria, a tale fine, una analisi preliminare relativa ad un problema al contorno del primo tipo, che cioè si differenzia da (1.1) per il fatto che anche sul contorno fisso è assegnata la temperatura in funzione del tempo.

Consideriamo dunque il seguente problema

$$
(5.1) \qquad \left| \begin{array}{lll} L\,v & = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ v(x, 0) & = h(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ v(s(t), t) & = f(t)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ v(0, t) & = \varphi(t)\,, & 0 < t \leqslant T\,. \end{array} \right.
$$

Abbiamo in primo luogo bisogno di una limitazione a priori su $v_x(x, t)$. Come già fatto nel paragrafo 3 per le stime su $u_x(x, t)$, cercheremo, quando sia possibile, limitazioni indipendenti dagli accrescimenti della funzione $s(t)$. Queste ultime saranno ottenute nel Lemma 5.2 mediante l'uso di opportune funzioni di confronto, nell'ipotesi (SM); come già notato (Osservazione 3.1), esse si estendono facilmente al caso di contorni monotoni semplicemente continui. Nel caso in cui si assume invece per il contorno l'ipotesi (SL), si potrebbero adattare al caso in esame ad esempio le tecniche di [2] relative ad operatori parabolici di tipo più generale, operando previamente una trasformazione di coordinate che riporti D_T ad un rettangolo. Ci è sembrato però più semplice seguire anche per questo caso il procedimento usato nella dimostrazione del Teorema 3.1, basato sulla classica teoria dei potenziali termici ed illustrato per grandi linee nella dimostrazione del seguente:

LEMMA 5.1. *Valgano* (SL), (HL), (FL) *e sia inoltre* $\varphi(t)$ *una funzione lipschitziana in* $[0, T]$ *con* $\varphi(0) = h(0)$; *esiste allora una costante* $\tilde{A}$ *dipendente da* T, α, S, F, H *e dalla costante di Lipschitz di* $\varphi(t)$ *tale che*

$$
(5.2) \qquad |v_x(x, t)| \leqslant \tilde{A} \quad \text{in } D_T\,.
$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostreremo il Lemma assumendo che s, h, f, φ siano derivabili con derivata continua a tratti e limitata, essendo oramai chiaro il meccanismo che consente di passare successivamente al caso di dati lipschitziani. Integriamo in D_T l'identità di Green

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(G v_\xi - v G_\xi) - \frac{\partial}{\partial \tau}(G v) = 0\,,$$

in cui G è la funzione di Green per il semispazio definita dalla prima delle (3.2). Si ottiene

$$\begin{aligned}(5.3)\qquad v(x,t) = &\int_0^b G(x,t;\,\xi,0)h(\xi)\,d\xi + \\ &+\int_0^t G(x,t;\,s(\tau),\tau)\,v_\xi(s(\tau),\tau)\,d\tau - \int_0^t f(\tau)G_\xi(x,t;\,s(\tau),\tau)\,d\tau + \\ &+\int_0^t G(x,t;\,s(\tau),\tau)\,f(\tau)\dot{s}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \varphi(\tau)G_\xi(x,t;\,0,\tau)\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Derivando rispetto ad x e facendo tendere x ad $s(t)-0$ si ottiene, mediante integrazione per parti e tenendo conto anche delle condizioni di raccordo $h(0)=\varphi(0)$, $h(b)=f(b)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_x(s(t),t) = &\int_0^b N(s(t),t;\,\xi,0)\,h'(\xi)\,d\xi + \\ &+\int_0^t G_x(s(t),t;\,s(\tau),\tau)\,v_\xi(s(\tau),\tau)\,d\tau + \\ &+\int_0^t \dot{f}(\tau)N(s(t),t;\,s(\tau),\tau)\,d\tau + -\int_0^t \dot{\varphi}(\tau)N(s(t),t;\,0,\tau)\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Con maggiorazioni simili a quelle usate nella dimostrazione del Teorema 3.1 si perviene ad una disuguaglianza del tipo della (3.4) da cui è immediato dedurre che $v_x(s(t),t)$ è in valore assoluto minore di una costante che dipende in modo noto da T, α, $\|\dot{s}\|$, $\|\dot{f}\|$, $\|\dot{\varphi}\|$ e $\|h'\|$.

Derivando ora la (5.3) rispetto ad x e facendo il limite per x tendente a zero, utilizzando i medesimi procedimenti si ottiene la seguente uguaglianza:

$$v_x(0,t) = \int_0^b N(0,t;\xi,0)\,h'(\xi)\,d\xi + \int_0^t G_x(0,t;s(\tau),\tau)\,v_\xi(s(\tau),\tau))\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t \dot{f}(\tau)\,N(0,t;s(\tau),\tau)\,d\tau + -\int_0^t N(0,t;0,\tau)\dot{\varphi}(\tau)\,d\tau\,.$$

A causa della limitazione su $v_x(s(t),t)$ ora ottenuta, il secondo membro può essere opportunamente maggiorato da una costante che dipende ancora dalle quantità sopra elencate. Una semplice applicazione del principio di massimo a $v_x(x,t)$ fornisce quindi la limitazione cercata nel caso di dati derivabili e quindi per quanto detto all'inizio della dimostrazione, la prova del lemma.

Dedurremo ora, nel caso di $s(t)$ monotona, una limitazione su $|v_x(x,t)|$ indipendente da S (limitazione per la quale, come si è detto, non è necessario supporre che s sia lipschitziana).

LEMMA 5.2. *Valgano* (SM), (HL), (FL), *e sia inoltre* $\varphi(t)$ *una funzione lipschitziana in* $[0,T]$ *con* $\varphi(0)=h(0)$; *esiste allora una costante* $\tilde{B}$, *indipendente da* S *e dipendente dagli altri dati come specificato nelle* (5.6), (5.12) *e* (5.15) *tale che*:

$$|v_x(x,t)| \leqslant \tilde{B}\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant s(t)\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,. \tag{5.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Esprimiamo $v(x,t)$ mediante la somma

$$v(x,t) = \varphi(b) + v_1(x,t) + v_2(x,t) \tag{5.6}$$

ove v_1 e v_2 risolvono rispettivamente i problemi

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{L}\,v_1 & = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ v_1(x,0) & = h(x) - h(b)\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ v_1(s(t),t) & = 0\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ v_1(0,t) & = \varphi(t) - h(b)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \end{array}\right. \tag{5.6'}$$

e

$$(5.6'') \qquad \begin{cases} L\ v_2 = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ v_2(x,0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ v_2(s(t),t) = f(t) - f(0)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ v_2(0,t) = 0\,, & 0 < t \leqslant T\,. \end{cases}$$

La dimostrazione della (5.5) sarà quindi effettuata in due parti; troveremo in primo luogo una limitazione su $|v_{1x}(s(t),t)|$ e su $|v_{1x}(0,t)|$ che ci consentiranno, mediante il principio di massimo di asserire la limitatezza di $|v_{1x}(x,t)|$; successivamente opereremo in modo analogo per dimostrare che $|v_{2x}(x,t)|$ è limitato.

La consueta tecnica del confronto con una funzione lineare ci consente di asserire che

$$(5.7) \qquad |v_{1x}(s(t),t)| \leqslant \max\left\{H, \frac{1}{b}\|\varphi(t) - h(b)\|\right\}.$$

Per ottenere una stima di $v_{1x}(0,t)$ introduciamo l'ulteriore scomposizione

$$v_1(x,t) = v_1'(x,t) + v_1''(x,t)$$

con $v_1'(x,t)$ e $v_1''(x,t)$ definite dai seguenti problemi

$$\begin{cases} L\ v_1' = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ v_1'(x,0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ v_1'(s(t),t) = 0\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ v_1'(0,t) = \varphi(t) - \varphi(0)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\ v_1'' = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ v_1''(x,0) = h(x) - h(b)\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ v_1''(s(t),t) = 0\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ v_1''(0,t) = \varphi(0) - h(b)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \end{cases}$$

per quanto riguarda $v_1''(x,t)$, il confronto con le funzioni $\varphi(0) - h(b) \pm Hx$ consente, grazie alla condizione di raccordo $\varphi(0) = h(0)$ di asserire che

$$(5.8) \qquad |v_{1x}''(0,t)| \leqslant H$$

(per l'uso di tali funzioni di confronto è essenziale la costanza del dato su $x=0$).

Quanto a $v_1'(x,t)$, detta Φ la costante di Lipschitz di $\varphi(t)$, per ogni $\bar{t}\in(0,T]$, si consideri in $D_{\bar{t}}\equiv\{x,t\colon 0<x<s(t),\ 0<t\leqslant\bar{t}\}$ la funzione $\tilde{w}(x,t)$ tale che

$$(5.9)\qquad \begin{cases} L\,\tilde{w} = 0\,, & \text{in } D_{\bar{t}}\,;\\ \tilde{w}(x,0) = 0\,, & 0\leqslant x\leqslant b\,;\\ \tilde{w}\big(s(t),t\big) = 0\,, & 0<t\leqslant\bar{t}\,;\\ \tilde{w}(0,t) = \Phi t\,, & 0<t\leqslant\bar{t}\,;\end{cases}$$

è subito visto, in base al principio di massimo che

$$\varphi(\bar{t})-\varphi(0)-\Phi\bar{t}+\tilde{w}(x,t)\leqslant v_1'(x,t)\leqslant\varphi(\bar{t})-\varphi(0)+\Phi\bar{t}-\tilde{w}(x,t)\,.$$

Poichè i segni di uguaglianza valgono per $x=0$ e $t=\bar{t}$ avremo:

$$(5.10)\qquad |v_{1x}'(0,\bar{t})|\leqslant\tilde{w}_x(0,\bar{t})\,.$$

Ma il secondo membro delle (5.10) può essere stimato considerando la seguente funzione $w_\infty(x,t)$, che minora $\tilde{w}(x,t)$ in $D_{\bar{t}}$ e coincide con essa per $x=0$ e $t=\bar{t}$:

$$\begin{cases} L\,w_\infty = 0\,, & x>0\,,\ 0<t\leqslant\bar{t}\,;\\ w_\infty(x,0) = -\dfrac{1}{b}\,\Phi\bar{t}x\,, & x\geqslant 0\,;\\ w_\infty(0,t) = \Phi t\,, & 0<t\leqslant\bar{t}\,;\end{cases}$$

Infatti, essendo $w_\infty(0,t)=\tilde{w}(0,t)$ e $w_\infty(x,0)<\tilde{w}(x,0)$, basterà provare che è $w_\infty\,\big(s(t),t\big)\leqslant 0$; essendo [8]

$$w_\infty(x,t)=4\Phi t\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{b}\,\Phi\bar{t}x$$

si ha:

$$w_\infty\big(s(t),t\big)=4\Phi t\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\left(\frac{s(t)}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{b}\,\Phi\bar{t}s(t)$$

e poichè 4 $i^2\operatorname{erfc}\left((s(t))/(2\sqrt{\bar{t}})\right) < 1$, $t \leqslant \bar{t}$, $s(t)/b \geqslant 1$ risulta appunto $w_\infty\left(s(t), t\right) \leqslant 0$.

Si ha dunque, dovendo la (5.10) valere per ogni $\bar{t} \in (0, T]$:

$$|v'_{1x}(0, t)| \leqslant -w_{\infty x}(0, t)$$

da cui si ottiene, ricordando anche la (5.8),

$$|v_{1x}(0, t)| \leqslant H + \Phi\left(T/b + 2\sqrt{T/\pi}\right) . \tag{5.11}$$

Se ora si approssima la funzione $h(x) - h(b)$ con una successione di funzioni derivabili $\{h_m(x) - h(b)\}$ che rispettino le condizioni di raccordo, con derivata prima minore di H, si ottiene dal principio di massimo e dalle (5.7) e (5.11) sfruttando il solito teorema sulle famiglie di soluzioni

$$|v_{1x}(x, t)| \leqslant \Phi\left(T/b + 2\sqrt{T/\pi}\right) + \max\left\{H, \|\varphi(t) - h(b)\|\right\} \text{ in } D_T . \tag{5.12}$$

Possiamo ora passare alla dimostrazione della seconda parte del Lemma 5.2, considerando cioè la funzione $v_2(x, t)$ soluzione del problema (5.6″). In questo caso risulta più agevole la determinazione della stima della derivata sul contorno sinistro: basta infatti confrontare $v_2(x, t)$ con la funzione lineare $(1/b)FTx$, che risulta maggiorante in D_T di $|v_2(x, t)|$ e che, essendo uguale a $v_2(x, t)$ su $x = 0$, fornisce la cercata limitazione

$$|v_{2x}(0, t)| \leqslant \frac{1}{b} FT . \tag{5.13}$$

Resta infine da stimare $v_{2x}\left(s(t), t\right)$. A questo scopo per ogni $\bar{t} \in (0, T]$ si possono utilizzare delle funzioni di confronto simili alle (3.14):

$$z^\pm = Ms^2(\bar{t})\left\{\exp\left[\frac{x - s(\bar{t})}{s(\bar{t})}\right] - 1\right\} - F(\bar{t} - t) \pm [f(\bar{t}) - f(0)]$$

con

$$M = eF \max\left[1, \frac{T}{b^2(e-1)}\right] .$$

Infatti le condizioni $Lz^\pm \geqslant 0$, $z^\pm(x, 0) \leqslant 0$ e $z^\pm\left(s(t), t\right) \leqslant \pm\left(f(t) - f(0)\right)$ in $D_{\bar{t}}$ si verificano in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 3.2; inoltre si ha

$$z^{\pm}(0, t) \leqslant Mb^2\left(\frac{1}{e}-1\right)+FT \leqslant 0$$

e perciò

$$z^{\pm}(x, t) \leqslant \pm v_2(x, t)$$

e quindi, essendo $z^{\pm}(s(\bar{t}), \bar{t}) = \pm v_2(s(\bar{t}), \bar{t})$, sarà, per l'arbitrarietà di $\bar{t}$:

$$|v_{2x}(s(t), t)| \leqslant Ms(t)\,; \tag{5.14}$$

e dal principio di massimo, ricordando la (5.13):

$$|v_{2x}(x, t)| \leqslant \max\left\{\frac{1}{b}FT,\, eFs(T)\max\left[1, \frac{T}{b^2(e-1)}\right]\right\}, \tag{5.15}$$

che, insieme alla (5.12), completa la dimostrazione del Lemma.

Osservazione 5.1. Notiamo incidentalmente che, nel caso in cui valgono la (HD) e la (4.12), la dimostrazione di questo Lemma può essere semplificata introducendo per $v(x, t)$ la scomposizione seguente

$$v(x, t) = \hat{v}_1(x, t) + \hat{v}_2(x, t)$$

in cui $\hat{v}_1$ è la soluzione di un problema con flusso nullo su $x = 0$, temperatura inizialmente uguale ad $h(x)$ ed uguale ad $f(t)$ sul contorno destro; mentre $\hat{v}_2$ è nulla inizialmente e sul contorno destro ed è uguale, per $x = 0$, a $\varphi(t) - \hat{v}_1(0, t)$.

La limitazione per $\hat{v}_{1x}$ è fornita dal Teorema 3.2; inoltre, essendo $\hat{v}_1(0, t)$ lipschitziana — poichè sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 4.2 — per la stima di $\hat{v}_{2x}$ è sufficiente applicare le sole tecniche impiegate per limitare $\hat{v}'_{1x}$.

Osservazione 5.2. Si noti che l'ipotesi di lipschitzianità di $h(x)$ può essere sensibilmente indebolita se si cercano delle stime soltanto su $v_x(0, t)$ e su $v_x(s(t), t)$; ripercorrendo la dimostrazione del precedente Lemma è facile riconoscere infatti che basta a tale scopo che valga la (HLb) e che esista inoltre una costante a' tale che

$$|h(x) - h(0)| \leqslant a'x\,. \tag{5.16}$$

Continuando la nostra analisi preliminare sulla soluzione del problema (5.1), ci proponiamo di trovare una limitazione per $|v_{xx}(x, t)|$.

Come già osservato all'inizio del paragrafo circa le limitazioni per $|v_x|$, sarebbe possibile procedere ad un parziale adattamento delle tecniche con cui si studiano problemi di diffusione con dati soddisfacenti condizioni di notevole regolarità (quale ad esempio la validità del l'equazione $\boldsymbol{L}\, v = 0$ nei punti $(0, 0)$ e $(b, 0)$). Abbiamo però preferito seguire la via di una dimostrazione diretta per la sua maggiore semplicità e chiarezza.

Iniziamo con il caso particolarmente semplice in cui il dominio D_T ha una forma trapezoidale; sia cioè

$$s(t) = b + kt\,, \qquad k > -b/T\,. \tag{5.17}$$

Indicata con $\hat{v}(x, t)$ la soluzione di (5.1) ove s ha l'espressione (5.17), dimostriamo il seguente

LEMMA 5.3. *Sia verificata la* (FD), *la funzione $h(x)$ possieda in $[0, b]$ derivata seconda continua a tratti e limitata. Sia inoltre $\varphi(t)$ una funzione derivabile con continuità in $[0, T]$ e siano soddisfatte le condizioni di raccordo $\varphi(0) = h(0)$, $f(0) = h(b)$; esiste allora una costante $\hat{C}$ dipendente dai dati* (*v.* (5.21)), *tale che*:

$$|\hat{v}_{xx}(x, t)| \leqslant \hat{C} \qquad 0 \leqslant x \leqslant b + kt\,; \qquad 0 < t \leqslant T\,. \tag{5.18}$$

DIMOSTRAZIONE. La (5.18) segue immediatamente dal principio di massimo applicato alla funzione $\hat{v}_{xx}(x, t)$ una volta che si sia dimostrata la validità dell'equazione $\boldsymbol{L}\, v = 0$ fin sul contorno per ogni $t \in (0, T]$ e la limitatezza di $v_t(s(t), t)$.

La dimostrazione della validità di $\boldsymbol{L}\, \hat{v} = 0$ fin sul contorno per $t \in (0, T]$ segue essenzialmente il procedimento da noi introdotto in [5]; essendo il caso qui trattato più generale, ne riporteremo per completezza i punti salienti.

Si consideri la soluzione $z_\infty(x, t)$ del problema di Cauchy per $t \geqslant 0$ per l'equazione del calore, corrispondente ad un dato iniziale definito prolungando $h(x)$ esternamente all'intervallo $[0, b]$ in modo sufficientemente regolare (cioè ad es. in modo che il dato iniziale risulti limitato e con derivata prima e seconda limitate). La derivata $z_{\infty xx}(x, t)$ risulta così limitata.

D'altra parte la funzione $v(x, t)$ può esprimersi come somma di $z_\infty(x, t)$

e di una funzione $z(x, t)$ che nel medesimo dominio trapezoidale risolve il seguente problema

$$\begin{cases} L\,z = 0\,, & \text{in } D_T\,, \\ z(x, 0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,, \\ z(0, t) = \varphi(t) - z_\infty(0, t) \equiv \omega(t)\,, & 0 < t \leqslant T\,, \\ z(b + kt, t) = f(t) - z_\infty(b + kt, t) \equiv \chi(t)\,, & 0 < t \leqslant T\,. \end{cases}$$

La dimostrazione della validità di $L\,z = 0$ per $x = 0$ e $x = b + kt$ si consegue studiando z_{xx} separatamente nelle due regioni:

$$D_T^{(1)} \equiv \left\{(x, t) \colon b + kt - \frac{\alpha}{2} < x < b + kt\,,\ 0 < t < T\right\}$$

e

$$D_T^{(2)} \equiv \left\{(x, t) \colon 0 < x < \frac{\alpha}{2},\ 0 < t < T\right\},$$

dove, al solito, $\alpha = \min\limits_{t \in [0, T]} s(t)$ e cioè, nel presente caso,

$$\alpha = \min\,(b, b + kT).$$

Per quanto riguarda $D_T^{(1)}$, effettuiamo il cambiamento di variabile

$$y = x - b + \frac{\alpha}{2} - kt$$

e poniamo

$$z'(y, t) = z\left(y + b - \frac{\alpha}{2} + kt, t\right);$$

si ha così il seguente problema:

$$\begin{cases} L'\,z' = z'_{yy} + kz'_y - z'_t = 0\,, & 0 < y < \alpha/2\,,\ 0 < t \leqslant T\,; \\ z'(y, 0) = 0\,, & 0 \leqslant y \leqslant \alpha/2\,; \\ z'(0, t) = z(b - \alpha/2 + kt, t) = \Omega(t)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ z'(\alpha/2, t) = \chi(t)\,. & \end{cases}$$

Si può a questo punto dimostrare (cfr. Appendice 2 di [5]) che la funzione $z'(y, t)$ è esprimibile come $\int_0^t W(y, \tau)\,d\tau$, ove W è soluzione di

$$\begin{cases} L'\,W = 0\,, & \text{in } 0<y<\alpha/2\,,\ 0<t\leqslant T\,; \\ W(y, 0) = 0\,, & 0\leqslant y\leqslant\alpha/2\,; \\ W(0, t) = \dot{\Omega}(t)\,, & 0<t\leqslant T\,; \\ W(\alpha/2, t) = \dot{\chi}(t)\,, & 0<t\leqslant T\,. \end{cases}$$

Essendo poi $z'_{yy} + kz'_y = W$, $z'_{yy} = z_{xx}$ e $z'_y = z_x$, ciò comporta che $\lim_{x\to\alpha+kt} (z_{xx} + kz_x) = \chi$. Esiste pertanto il limite di $z_{xx} = z_t$ sul contorno mobile per $t>0$. Un ragionamento analogo a quello di cui abbiamo qui ricordato i tratti salienti porta a concludere, riferendosi alla regione $D_T^{(2)}$, l'esisteza del limite (e quindi la validità dell'equazione) anche per $x\to 0$, $t>0$.

Si giunge così a concludere che l'equazione $L\,\hat{v} = 0$ vale anche per $x=0$ e $x=b+kt$ per ogni $t\in(0, T]$. Ciò basta per affermare che (cfr. [5], loc. cit.)

$$(5.19)\qquad \hat{v}_{xx}(0, t) = \dot{\varphi}(t)\,,\qquad 0<t\leqslant T\,;$$

$$(5.20)\qquad \hat{v}_{xx}(b+kt, t) = \dot{f}(t) - k\hat{v}_x(b+kt, t)\,,\qquad 0<t\leqslant T\,.$$

Applicando dunque il principio di massimo a $\hat{v}_{xx}$, ricordando la limitatezza di $\hat{v}_x(b+kt, t)$ che è assicurata dal Lemma 5.1, si ottiene

$$(5.21)\qquad |\hat{v}_{xx}(x, t)|\leqslant \max\{\|h''\|, \|\dot{\varphi}\|, \|\dot{f}\| + k\tilde{A}\}$$

e quindi la dimostrazione del Lemma.

Se poi è $k>0$, invece del Lemma 5.1 può usarsi il Lemma 5.2; al secondo membro comparirà allora $\tilde{B}$ invece di $\tilde{A}$, con $\tilde{B}$ indipendente da k: in questo caso (cioè per contorni monotoni) la dipendenza della stima di $|\hat{v}_{xx}|$ da k risulta lineare.

Passiamo ora a stimare $|v_{xx}(x, t)|$ nel caso di contorni più generali, rilassando contemporaneamente le ipotesi sui dati.

Dimostreremo precisamente il

LEMMA 5.4 (limitazione di $|v_{xx}(x, t)|$). *Valgano* (SL), (HDL), (FL) *e sia* $\varphi(t)$ *una funzione lipschitziana in* $[0, T]$ *con* $\varphi(0) = h(0)$; *esiste* *allora una costante $\hat{K}$ dipendente dai dati, tale che*

$$(5.22) \qquad |v_{xx}(x,t)| \leqslant \hat{K} \quad \text{in } D_T .$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione di funzioni $s_m(t) \geqslant s(t)$, lineari a tratti, con costanti di Lipschitz $S_m \leqslant S$ e tali che $\lim s_m(t) = s(t)$ uniformemente in $[0, T]$. Sia poi $\{h_m\}$ una successione di funzioni che possiedono derivate seconde continue in $[0, b]$, con $\|h'_m\| \leqslant \|h'\|$ e $\|h''_m\| \leqslant H_1$ e tali che $\lim h_m(x) = h(x)$ uniformemente in $[0, b]$. Siano infine $\{f_m\}$ e $\{\varphi_m\}$ due successioni di funzioni derivabili con continuità in $[0, T]$ con $\|\dot{f}_m\| \leqslant F$, $\|\dot{\varphi}_m\| \leqslant \Phi$, uniformemente convergenti in $[0, T]$ a $f(t)$ e $\varphi(t)$ rispettivamente, soddisfacenti le condizioni $\varphi_m(0) = h_m(0)$, $f_m(0) = h_m(b)$.

Sia $\hat{v}_m(x, t)$ la soluzione di (5.1) corrispondente al contorno $x = s_m(t)$ ed ai dati $h_m(x)$, $f_m(t)$, $\varphi_m(t)$.

Siano $(t_j^{(m)}, t_{j+1}^{(m)})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $t_1^{(m)} = 0$, $t_{n+1}^{(m)} = T$ gli intervalli di linearità della funzione $s_m(t)$. Posto allora

$$K_j^{(m)} = \sup_{\substack{0<x<s_m(t) \\ t_j^{(m)}<t\leqslant t_{j+1}^{(m)}}} \left\{|\hat{v}_{mxx}(x,t)|\right\} ,$$

il Lemma 5.3 ci consente di affermare (vedi la (5.21)) che:

$$(5.22) \quad K_{j+1}^{(m)} \leqslant \max\{K_j^{(m)}, \|\dot{\varphi}_m\|, \|\dot{f}_m\| + S_m \|\hat{v}_{mx}(s_m(t), t)\|\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Ora $\|\dot{\varphi}_m\| \leqslant \Phi$, $\|\dot{f}_m\| \leqslant F$, $S_m \leqslant S$ e poichè, in base al Lemma 5.1 ed alle ipotesi assunte (ricordiamo in particolare $\|h'_m\| \leqslant \|h'\|$) disponiamo di una limitazione su $\|\hat{v}_{mx}(s_m(t), t)\|$ indipendente da m (vedi la (5.2)), possiamo dunque concludere, applicando nei successivi intervalli la (5.22):

$$K_{j+1}^{(m)} \leqslant \max\{\|h''_m\|, \Phi, F + S\tilde{A}\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n ;$$

da ciò segue immediatamente che

$$(5.23) \qquad |\hat{v}_{mxx}(x,t)| \leqslant \hat{K} = \max\{H_1, \Phi, F + S\tilde{A}\} ;$$

tale limitazione vale per $0 < x < s_m(t)$, $0 < t \leqslant T$ e quindi, in particolare, in D_T.

Utilizzando ancora la (5.2) per ciascuna delle funzioni $\hat{v}_m(x, t)$ deduciamo la convergenza uniforme in $[0, T]$ di $\{\hat{v}_m(s(t), t)\}$ ad $f(t)$; si può così applicare il Teorema sulle famiglie di soluzioni più volte richiamato e concludere così la dimostrazione del Lemma in base alla (5.23).

Ritornando ora al problema (1.1), possiamo rapidamente ottenere una limitazione su $|u_{xx}(x, t)|$ in D_T. Basterà infatti supporre che i dati del problema verifichino le ipotesi del Teorema 4.2, con (HD) sostituita da (HDL) (ciò che comporta ovviamente anche la (4.12)), per affermare che, risultando $u(0, t)$ lipschitziana, $u(x, t)$ può essere pensata come soluzione di un problema del tipo (5.1) con dati soddisfacenti le ipotesi del Lemma 5.4. Risulta così dimostrato il

TEOREMA 5.1 (limitazione di $|u_{xx}(x, t)|$). *Se g verifica le* (GLL), (GR), (G) (*o* (GM)) *e se valgono* (SL), (FL), (HDL), *si ha*

$$(5.24) \qquad |u_{xx}(x, t)| \leq \bar{K} \equiv \max\{H_1, C_4, F + S\tilde{A}\} \quad \text{in } D_T .$$

La costante C_4 è definita dalla (4.21) e (4.23); la costante $\tilde{A}$ dipende dai dati nel modo descritto dal Lemma 5.1, attribuendo il valore C_4 alla costante di Lipschitz della funzione $\varphi(t)$.

Ricordiamo infine che la costante C_4 non dipende da S (v. ancora il Teorema 4.2) nel caso di contorni non decrescenti e che, in tal caso, la costante $\tilde{A}$ va sostituita da $\tilde{B}$, anch'essa indipendente da S (Lemma 5.2).

6. Studio del flusso termico sul contorno e limitazioni su $u_{xt}(x, t)$.

Vogliamo ora studiare il comportamento di $u_x(s(t), t)$, deducendo in particolare dei risultati concernenti la sua derivata totale rispetto al tempo.

Se valgono le ipotesi (HD) (*), (FD), (SD), si può ottenere per $u_x(s(t), t)$ la seguente espressione, seguendo i procedimenti indicati

(*) Si potrebbe anche assumere che h abbia derivata continua in un intorno di $x = b$: ciò comporterebbe solo qualche complicazione formale nella scrittura della (6.1).

nel § 5 per il calcolo di $v_x(s(t), t)$:

$$(6.1) \qquad \frac{1}{2} u_x(s(t), t) = \int_{\alpha/2}^{b} N(s(t), t; \xi, 0)\, h'(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t N(s(t), t; s(\tau), \tau)\, \dot{f}(\tau) \mathrm{d}\tau - \int_0^t N\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, \tau\right) u_\tau\left(\frac{\alpha}{2}, \tau\right) d\tau +$$
$$+ \int_0^t G_x(s(t), t; s(\tau), \tau)\, u_\xi(s(\tau), \tau)\, d\tau .$$

Mostreremo ora che, sotto opportune ipotesi, la derivata $(d/dt)\cdot$ $\cdot u_x(s(t), t)$ esiste ed è soluzione di una equazione integrale del tipo di Volterra. La costruzione di quest'ultima richiede alcune considerazioni preliminari. Occorre anzitutto osservare che

$$(6.2) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \Gamma(s(t), t; s(\tau), \tau) =$$
$$= -\frac{s(t) - s(\tau)}{2(t-\tau)} [\dot{s}(t) - \dot{s}(\tau)]\, \Gamma(s(t), t; s(\tau), \tau) ,$$

$$(6.3) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \Gamma_x(s(t), t; s(\tau), \tau) =$$
$$= \left\{ -\frac{\dot{s}(t) - \dot{s}(\tau)}{2(t-\tau)} + \left[\frac{s(t) - s(\tau)}{2(t-\tau)}\right]^2 [\dot{s}(t) - \dot{s}(\tau)] \right\} \Gamma(s(t), t; s(\tau), \tau) .$$

La (6.2) assicura che la funzione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) N(s(t), t; s(\tau), \tau)$$

ha per $\tau \to t-$, nel caso più sfavorevole, la stessa singolarità di $N(s(t), t; s(\tau), \tau)$ ed è perciò integrabile rispetto a τ tra 0 e t. La (6.3) indica invece che la singolarità della funzione

$$(6.4) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) G_x(s(t), t; s(\tau)\ \tau) \equiv \Theta(t, \tau)$$

è dell'ordine di $(\dot{s}(t)-\dot{s}(\tau))/(t-\tau)^{\frac{3}{2}}$. Dunque l'integrale $\int_0^t \Theta(t,\tau)\,d\tau$ risulta convergente se si assume che *la funzione* $s(t)$ *abbia in* $[0, T]$ *la derivata prima hölderiana di ordine superiore a* $\frac{1}{2}$.

Ciò premesso, seguendo una tecnica suggerita da B. Sherman [9] e supponendo che

$f(t)$ abbia derivata seconda limitata in $[0, T]$

si può dimostrare che

$$\frac{d}{dt}\int_0^t N(s(t),t;s(\tau),\tau)\dot{f}(\tau)\,d\tau=\dot{f}(0)N(s(t),t;b,0)+\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\dot{f}(\tau)N(s(t),t;s(\tau),\tau)\,d\tau\,. \tag{6.5}$$

In modo del tutto analogo, considerata una funzione $\psi(t)$ continua e integrabile in $(0, T]$ e posto

$$\psi_1(t)=\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau+h'(b)\,,\qquad t\in[0,T]\,, \tag{6.6}$$

si ha

$$\frac{d}{dt}\int_0^t G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)\psi_1(\tau)\,d\tau= \\ =h'(b)G_x(s(t),t;b,0)+\int_0^t\psi_1(\tau)\Theta(t,\tau)\,d\tau+\int_0^t\psi(\tau)G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)\,d\tau\,, \tag{6.7}$$

dove $\Theta(t,\tau)$ è definito nella (6.4).

Tenendo ancora conto della (6.6), la (6.7) si può anche scrivere nella forma

$$\frac{d}{dt}\int_0^t G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)\psi_1(\tau)\,d\tau= \\ =h'(b)\left\{G_x(s(t),t;b,0)+\int_0^t\Theta(t,\tau)\,d\tau\right\}+\int_0^t\psi(\tau)\Theta_1(t,\tau)\,d\tau\,, \tag{6.8}$$

con

$$\Theta_1(t,\tau)=G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)+\int_\tau^t\Theta(t,\eta)\,d\eta\,. \tag{6.9}$$

Sulla base di quanto finora esposto è infine facile stabilire che se esiste una soluzione $\psi(t)$ della seguente equazione integrale:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\psi(t)=\frac{d}{dt}\Bigg\{&\int_{\alpha/2}^{b}N(s(t),t;\xi,0)\,h'(\xi)\,d\xi-\\&-\int_0^t N\left(s(t),t;\frac{\alpha}{2},\tau\right)u_\tau\left(\frac{\alpha}{2},\tau\right)d\tau\Bigg\}+\dot{f}(0)N(s(t),t;b,0)+\\&+\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\dot{f}(\tau)N(s(t),t;s(\tau),\tau)\,d\tau+\\&+h'(b)\left\{G_x(s(t),t;b,0)+\int_0^t\Theta(t,\tau)\,d\tau\right\}+\int_0^t\psi(\tau)\Theta_1(t,\tau)\,d\tau\,,\end{aligned}\tag{6.10}$$

la funzione $\psi_1(t)$, definita dalla (6.6) risolve l'equazione integrale (6.1), la quale ha come soluzione $u_x(s(t),t)$. In tali condizioni si ha dunque

$$\psi_1(t)\equiv u_x(s(t),t) \tag{6.11}$$

ed essendo d'altra parte $\dot{\psi}_1(t)=\psi(t)$, se ne deduce che

$$\psi(t)\equiv\frac{d}{dt}u(s(t),t)\,. \tag{6.12}$$

Non resta dunque che studiare l'equazione integrale di Volterra (6.10).

Iniziamo considerando il caso di maggior regolarità per il dato iniziale; supponiamo cioè che *la funzione h abbia derivata seconda continua e che*

$$|h''(x)-h''(b)|\leqslant h_2(b-x)\,,\qquad \frac{\alpha}{2}\leqslant x\leqslant b\,. \tag{6.13}$$

Ai fini di quanto desideriamo dimostrare è in realtà sufficiente che h verifichi questa ipotesi in un intorno di $x=b$: ciò implica infatti soltanto delle complicazioni formali che desideriamo evitare per maggiore brevità e chiarezza.

Esaminiamo il termine noto della (6.10). Abbiamo, tenendo conto delle note identità tra le derivate delle funzioni $G(x, t; \xi, \tau)$, $N(x, t; \xi, \tau)$ ed eseguendo delle integrazioni per parti:

$$(6.14) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\alpha/2}^{b} N(s(t), t; \xi, 0)\, h'(\xi)\, d\xi =$$

$$-h'(b)\{\dot{s}(t)G(s(t), t; b, 0) + G_x(s(t), t; b, 0)\} +$$

$$+ h'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left\{\dot{s}(t)G\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, 0\right) + G_x\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, 0\right)\right\} +$$

$$+ \dot{s}(t)\int_{\alpha/2}^{b} G(s(t), t; \xi, 0)\, h''(\xi)\, d\xi - h''(b)\left\{N(s(t), t; b, 0) - N\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, 0\right)\right\} -$$

$$-\int_{\alpha/2}^{b} [h''(\xi) - h''(b)]\, N_\xi(s(t), t; \xi, 0)\, d\xi\,.$$

L'ultimo termine è limitato grazie alla (6.13).

Il termine

$$-\frac{d}{dt}\int_{0}^{t} N\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, \tau\right) u_\tau\left(\frac{\alpha}{2}, \tau\right) d\tau$$

è una funzione continua di t in $[0, T]$, che, supponendo valida una limitazione su $u(x, t)$ del tipo (2.1) è limitabile a priori in valore assoluto da una costante dipendente da $\|\dot{s}\|$, α, U, come si riconosce facilmente eseguendo una integrazione per parti.

Pertanto, tenendo conto della (6.14) ed *assumendo inoltre la seguente condizione di raccordo*:

$$(6.15) \qquad \dot{s}(0)h'(b) + h''(b) = \dot{f}(0)$$

si conclude che il termine noto della (6.10) è una funzione continua e limitata di t in $(0, T]$. Tale sarà quindi la soluzione $\psi(t)$ della (6.10) e, in base alla (6.12), la derivata $(d/dt)\,u_x(s(t), t)$. Si ha poi la continuità fino a $t = 0$ se si suppone che h ammetta derivata terza continua in un intorno di $x = b$.

Abbiamo così provato il seguente

TEOREMA 6.1. *La funzione $s(t)$ abbia in $[0, T]$ derivata prima hölderiana di ordine maggiore di $\frac{1}{2}$, la funzione $f(t)$ abbia derivata seconda limitata in $[0, T]$, la funzione $h(x)$ possieda derivata seconda continua in un intorno di $x = b$, ivi soddisfacente la* (6.13), *e sia tale che $h(b) = f(0)$; siano inoltre verificate le* (2.1) *e* (6.15). *Esiste allora continua in $(0, T]$ la derivata $(d/dt)u_x(s(t), t)$ e si ha:*

$$\left|\frac{d}{dt}u_x(s(t), t)\right| \leqslant C_7\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \tag{6.16}$$

con C_7 costante calcolabile a priori. Se inoltre esiste continua $h'''(x)$ in un intorno di $x = b$, la derivata $(d/dt)u_x(s(t), t)$ è continua anche per $t = 0$.

Si ha poi il seguente:

COROLLARIO 6.1 (limitazione di $u_{xt}(x, t)$). *Siano verificate le ipotesi del Teorema 6.1 ed inoltre la funzione $h''(x)$ sia lipschitziana in $[0, b]$; la funzione $g(u, t)$ soddisfi poi le ipotesi del Teorema 4.2. Esiste allora una costante C_8 calcolabile a priori in base ai dati, tale che*

$$|u_{xt}(x, t)| \leqslant C_8 \qquad in\ D_T\,. \tag{6.17}$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente mostrare che i valori assunti per $t = 0$, $x = 0$, $x = s(t)$ da $u_x(x, t)$ verificano le ipotesi del Lemma 5.4 sui dati relativi al primo problema al contorno per l'equazione del calore in D_T. La (6.17) è infatti in tal caso una immediata conseguenza della (5.22).

La lipschitzianità in $[0, T]$ di $u_x(s(t), t)$ è assicurata dalla (6.16). La lipschitzianità di $h''(x)$ in $[0, b]$ è assunta per ipotesi, mentre la condizione di raccordo $h'(b) = u_x(s(0), 0)$ è una conseguenza della (3.3); infine la lipschitzianità in $[0, T]$ di $u_x(0, t)$ e la condizione di raccordo $u_x(0, 0) = h'(0)$ sono assicurate dalle ipotesi su $g(u, t)$ e dal Teorema 4.2.

OSSERVAZIONE 6.1. Vogliamo ora alleggerire le ipotesi sul dato iniziale, supponendo che la (6.15) non valga e che inoltre $h(x)$ sia derivabile una sola volta con derivata soddisfacente la condizione:

$$|h'(x) - h'(b)| \leqslant \bar{h}(b - x)\,, \qquad \frac{\alpha}{2} \leqslant x \leqslant b\,, \tag{6.18}$$

essendo $\bar{h}$ una costante non negativa. In luogo della (6.16) perverremo in questo caso alla (6.19).

Moltiplichiamo i due membri delle (6.10) per $t^{\frac{1}{2}}$ ed osserviamo che la funzione $\psi(t) = t^{\frac{1}{2}}\varphi(t)$ soddisfa una equazione integrale con nucleo $\Theta_2(t, \tau) = \sqrt{(t/\tau)}\Theta_1(t, \tau)$ debolmente singolare e con termine noto limitato: infatti il primo termine al secondo membro della (6.10) può essere scritto:

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha/2}^{b} N(s(t), t; \xi, 0)\, h'(\xi)\, d\xi =$$

$$= h'(b)\left\{\dot{s}(t)\left[G\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, 0\right) - G(s(t), t; b, 0)\right] + \right.$$

$$\left. + N_\xi(s(t), t; b, 0) - N_\xi\left(s(t), t; \frac{\alpha}{2}, 0\right)\right\} -$$

$$-\dot{s}(t)\int_{\alpha/2}^{b} G_\xi(s(t), t; \xi, 0)[h'(\xi) - h'(b)]\, d\xi +$$

$$+\int_{\alpha/2}^{b} N_{\xi\xi}(s(t), t; \xi, 0)[h'(\xi) - h'(b)]\, d\xi\,.$$

Gli integrali al secondo membro hanno per $t = 0$ una singolarità dell'ordine di $t^{-\frac{1}{2}}$ come si riconosce in base alla (6.18). Analoga singolarità è contenuta nel termine tra parentesi graffa. Anche i rimanenti termini non limitati per $t \to 0$ nel termine noto della (6.10) hanno singolarità di questo tipo. Perciò il termine noto dell'equazione cui soddisfa $\psi(t)$, ottenuto moltiplicando il termine noto della (6.10) per $t^{\frac{1}{2}}$, è limitato.

Da qui, ripetendo le considerazioni che ci hanno condotto alla dimostrazione del teorema 6.1 (in luogo della (6.6) si definirà $\psi_1(t) = \int_0^t (\psi(\tau)/\sqrt{\tau})\, d\tau + h'(b)$ e si procederà di conseguenza), si ottiene facilmente

$$\left|\frac{d}{dt}u_x(s(t), t)\right| \leqslant \frac{C_7'}{\sqrt{t}}, \qquad 0 < t \leqslant T \tag{6.19}$$

con C_7' calcolabile a priori in base ai dati.

Sarà perciò

$$(6.20) \qquad |u_x(s(t+\delta), t+\delta) - u_x(s(t), t)| \leqslant C_7'[\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}]\,,$$

$$0 \leqslant t \leqslant t+\delta \leqslant T\,.$$

OSSERVAZIONE 6.2. Il Teorema 6.1 e la estensione contenuta nella Osservazione precedente si applicano anche alla soluzione $v(x, t)$ del primo problema al contorno in D_T, richiedendo naturalmente in luogo delle (2.1) delle analoghe limitazioni a priori per $v(x, t)$ le quali sono in questo caso immediata conseguenza del principio di massimo.

In virtù dell'Osservazione 6.2 possiamo enunciare un ulteriore corollario del Teorema 6.1:

COROLLARIO 6.2 (limitazione di $v_{xt}(x, t)$). *Le funzioni* $s(t)$, $f(t)$, $h(x)$ *soddisfino le ipotesi del Teorema* 6.1, *ivi compresa la* (6.15); *inoltre* $h''(x)$ *sia lipschitziana in* $[0, b]$.

Infine la funzione $\varphi(t)$ *abbia derivata seconda limitata in* $(0, T)$ *e valgano le condizioni di raccordo* $h(0) = \varphi(0)$ e

$$(6.21) \qquad h''(0) = \dot{\varphi}(0)\,.$$

Allora si ha:

$$(6.22) \qquad |v_{xt}(x, t)| \leqslant C_9 \quad in\ D_T\,,$$

con C_9 *costante dipendente in modo noto dai dati.*

DIMOSTRAZIONE. Le ipotesi assunte sui dati ed il principio di massimo garantiscono la conoscenza di una limitazione a priori su $v(x, t)$. Per l'Osservazione 6.2 in base al Teorema 6.1 $(d/dt)\,v_x(s(t), t)$ è in valore assoluto limitata a priori. In modo del tutto analogo sotto le ipotesi assunte su $h(x)$ e $\varphi(t)$, si può stabilire una limitazione a priori su $(d/dt)\,v_x(0, t)$. È dunque nuovamente possibile applicare il Lemma 5.4 alla funzione $v_x(x, t)$ e dedurre così immediatamente la (6.22).

OSSERVAZIONE 6.3. Mediante un procedimento più volte impiegato in questo lavoro è possibile introdurre una lieve riduzione nelle ipotesi dei Corollari 6.1 e 6.2: è sufficiente infatti supporre che le funzioni $f(t)$ e $\varphi(t)$ abbiano derivata prima lipschitziana in $[0, T]$.

7. Stabilità del gradiente termico rispetto ai dati ed al contorno.

Vogliamo ora studiare la dipendenza della derivata spaziale della soluzione del problema (1.1) (o del problema (5.1)) dai dati iniziali ed al contorno e dall'andamento del contorno mobile. Iniziamo dimostrando un teorema di stabilità rispetto ai dati iniziali ed al contorno per la derivata rispetto ad x della soluzione di (1.1).

Indichiamo con $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ soluzioni di (1.1) in D_T corrispondenti ai rispettivi dati $h_1(x)$, $f_1(t)$, $g_1(\eta, t)$ e $h_2(x)$, $f_2(t)$, $g_2(\eta, t)$.

Supponiamo che le funzioni h_1, h_2; f_1, f_2 siano lipschitziane nei rispettivi intervalli di definizione ed indicheremo con ΔH e ΔF le costanti di Lipschitz delle differenze $h_1(x) - h_2(x)$ in $[0, b]$ e $f_1(t) - f_2(t)$ in $[0, T]$ rispettivamente.

Quanto alle funzioni g_1, g_2 riterremo che esse soddisfino l'ipotesi (GLC) oltre ad una delle ipotesi che assicurano la conoscenza di limitazioni a priori del tipo (2.1) e quindi (2.2). Denoteremo con $\bar{\gamma}$ la minore tra le costanti di Lipschitz di g_1 e g_2, definite tenendo conto delle (2.1), e con $\|g_1 - g_2\|$ il massimo della differenza $|g_1(\eta, t) - g_2(\eta, t)|$ dove $t \in [0, T]$, mentre l'intervallo di variabilità di η è fissato dalle (2.1).

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 7.1 (stabilità di $u_x(x, t)$ rispetto ai dati). *Sia soddisfatta l'ipotesi* (SL) *ed inoltre valgano per $h_1(x)$, $h_2(x)$ la* (HL), *per $f_1(t)$, $f_2(t)$ la* (FL) *e per $g_1(\eta, t)$, $g_2(\eta, t)$ la* (GLC) *e* (G) (*o* (GM)). *Si ha allora*

$$(7.1) \quad |u_{1x}(x, t) - u_{2x}(x, t)| \leqslant C_{10}\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \\ + \|g_1 - g_2\| + \Delta H + \Delta F\}\,, \qquad in\ D_T\,,$$

dove la costante C_{10} è calcolabile a priori.

DIMOSTRAZIONE. La (7.1) si può dimostrare applicando il principio di massimo alla differenza $u_{1x}(x, t) - u_{2x}(x, t) = \vartheta(x, t)$ e supponendo derivabili con derivata contina le funzioni s, h, f: i simboli ΔH, ΔF indicheranno allora $\|h_1' - h_1'\|$ e $\|\dot{f}_1 - \dot{f}_2\|$; mediante il consueto procedimento di limite i risultati saranno immediatamente estendibili al caso contemplato dal Teorema 7.1.

Abbiamo:

$$(7.2) \qquad |\vartheta(x, 0)| \leqslant \Delta H\,;$$

$$(7.3) \qquad |\vartheta(0, t)| = |g_1[u_1(0, t), t] - g_2[u_2(0, t), t]| \leqslant \bar{\gamma}\|u_1 - u_2\| + \|g_1 - g_2\|\,.$$

Richiamando il teorema di stabilità della u rispetto ai dati da noi provato in [4] (Teorema 4), esiste una costante M, calcolabile a priori, tale che

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant M\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \|g_1 - g_2\|\}, \tag{7.4}$$

così avremo

$$|\vartheta(0, t)| \leqslant M_1\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \|g_1 - g_2\|\}. \tag{7.5}$$

Resta da valutare $\vartheta(s(t), t)$. Per questo ricorriamo alla (3.3):

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\vartheta(s(t), t) = \int_0^b G(s(t), t; \xi, 0)\vartheta(\xi, 0)\, d\xi \,-& \\ -\int_0^t N_x(s(t), t; 0, \tau)\vartheta(0, \tau)\, d\tau \,+& \\ +\int_0^t G(s(t), t; s(\tau), \tau)[\dot{f}_1(\tau) - \dot{f}_2(\tau)]\, d\tau \,+& \\ +\int_0^t N_x(s(t), t; s(\tau), \tau)\vartheta(s(\tau), \tau)\, d\tau\,.&\end{aligned}$$

Da questa equazione integrale, utilizzando le (7.2), (7.5) si deduce, col medesimo procedimento descritto nella dimostrazione del Lemma 3.1, la disuguaglianza

$$|\vartheta(s(t), t)| \leqslant M_2\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \|g_1 - g_2\| + \Delta H + \Delta F\}. \tag{7.6}$$

La (7.1) risulta allora dimostrata, applicando il principio di massimo alla funzione $\vartheta(x, t)$.

Vogliamo ora studiare la stabilità di $u_x(x, t)$ anche rispetto al contorno; supponiamo quindi che $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ siano soluzioni di (1.1) corrispondenti a due diverse leggi di variazione del contorno mobile $x = s_1(t)$ ed $x = s_2(t)$ rispettivamente con dati iniziali ed al contorno $h_1(x)$, $f_1(t)$, $g_1(\eta, t)$ e $h_2(x)$, $f_2(t)$, $g_2(\eta, t)$.

Consideriamo la differenza

$$\Delta s(t) = s_1(t) - s_2(t) \tag{7.7}$$

e poniamo

$$(7.8) \qquad \begin{cases} \lambda(t) = \min\{s_1(t), s_2(t)\}, \\ \mu(t) = \max\{s_1(t), s_2(t)\}, \end{cases}$$

Nel caso in cui, se $\Delta s(t)$ ammette zeri, essi — esclusi gli eventuali intervalli in cui la funzione è identicamente nulla — non hanno punti di accumulazione, è possibile suddividere l'intervallo $[0, T]$ in sottointervalli δ_l di ampiezza finita in cui Δs è identicamente nulla o ha segno determinato e scegliere gli indici j e k in modo che

$$(7.9) \qquad u_j(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t) & \text{se } s_1(t) \geqslant s_2(t), \\ u_2(x, t) & \text{se } s_1(t) < s_2(t); \end{cases}$$

e che

$$(7.10) \qquad u_k(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t) & \text{se } s_1(t) \leqslant s_2(t), \\ u_2(x, t) & \text{se } s_1(t) > s_2(t). \end{cases}$$

Supposto poi che $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ soddisfino l'ipotesi (SD), poniamo

$$\hat{S} = \max(\|\dot{s}_1\|, \|\dot{s}_2\|)$$

e

$$\Delta\dot{s}(t) = \dot{s}_1(t) - \dot{s}_2(t).$$

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 7.2 (stabilità di $u_x(x, t)$ rispetto ai dati ed al contorno). *Se i dati $h_i(x)$, $f_i(t)$, $g_i(\eta, t)$, $s_i(t)$, $i = 1, 2$ soddisfano le ipotesi del Corollario* 6.1 *si ha*

$$(7.11) \qquad |u_{1x}(x, t) - u_{2x}(x, t)| \leqslant C_{11}\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \|g_1 - g_2\| + \\ + \Delta H + \Delta F + \|\Delta s\| + \|\Delta\dot{s}\|\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \lambda(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

con C_{11} calcolabile a priori.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il supporre che sia possibile effettuare la partizione di $[0, T]$ nel modo sopra indicato; osservando che, per $s_1(t) \neq s_2(t)$, $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ sono derivabili, studiamo la quantità $|u_1(\lambda(t), t) - u_2(\lambda(t), t)|$ e la sua derivata totale rispetto al tempo, negli intervalli in cui è $s_1(t) \neq s_2(t)$. Dovremo dunque considerare le differenze:

$$u_j(\lambda(t), t) - f_k(t) \tag{7.12}$$

e

$$\frac{d}{dt} u_j(\lambda(t), t) - \dot{f}_k(t)\,. \tag{7.13}$$

Poichè vale il Teorema 3.1, la prima è limitabile a priori dalla quantità $\|f_1 - f_2\| + A\|\Delta s\|$, indipendente da t e da j; per valutare la seconda quantità, scriviamo

$$u_j(\lambda(t), t) = f_j(t) + \int_{\mu(t)}^{\lambda(t)} u_{jx}(x, t)\, dx\,;$$

derivando rispetto a t si ha

$$\frac{d}{dt} u_j(\lambda(t), t) = \dot{f}_j(t) + \dot{\lambda}(t) u_{jx}(\lambda(t), t) - \dot{\mu}(t) u_{jx}(\mu(t), t) + \int_{\mu(t)}^{\lambda(t)} u_{jxt}(x, t)\, dx$$

e quindi, utilizzando il teorema della media

$$\left| \frac{d}{dt} u_j(\lambda(t), t) - \dot{f}_k(t) \right| \leqslant |\dot{f}_k(t) - \dot{f}_j(t)| + |\dot{\lambda}(t) - \dot{\mu}(t)| A +$$
$$+ |\dot{\mu}(t) u_{jxx}(\tilde{x}, t)| \cdot |\Delta s(t)| + \left| \int_{\mu(t)}^{\lambda(t)} u_{jxt}(x, t)\, dx \right|,$$

con $\lambda(t) < \tilde{x} < \mu(t)$.

Poichè sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 5.1, sarà, indipendentemente da t (ed anche da j (*)):

$$|\dot{\mu}(t) u_{jxx}| \leqslant \hat{S}\overline{K}\,.$$

Poichè vale inoltre il Corollario 6.1, è anche

$$|u_{jxt}(x, t)| \leqslant C_8$$

indipendentemente da t (ed anche da j).

(*) Basterà ovviamente prendere come $\overline{K}$ la maggiore delle due costanti $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ relative ai problemi per u_1 ed u_2:

Sarà quindi, con i simboli già definiti

$$\left|\frac{d}{dt}u_j(\lambda(t), t) - \dot{f}_k(t)\right| \leqslant \Delta F + A\|\Delta\dot{s}\| + (\hat{S}\bar{K} + C_8)\cdot\|\Delta s\| \ , \tag{7.14}$$

per ogni t tale che $\Delta s(t) \neq 0$.

Osserviamo ora che per t coincidente con uno degli zeri di $\Delta s(t)$, la quantità $u_j(\lambda(t), t) - f_k(t)$ ammette derivata destra e sinistra entrambe limitate dalla quantità al secondo membro della (7.14) che costituirà quindi una limitazione sulla costante di Lipschitz della quantità stessa su tutta la curva $x = \lambda(t)$.

Applicando ora il Teorema 7.1. si ottiene

$$|u_{1x}(x, t) - u_{2x}(x, t)| \leqslant C_{10}\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + A\|\Delta s\| + \|g_1 - g_2\| + \\ + \Delta H + \Delta F + A\|\Delta\dot{s}\| + (\hat{S}\bar{K} + C_8)\|\Delta s\|\} \ ;$$

con il che la (7.11) è dimostrata per il caso in cui gli zeri di $\Delta s(t)$ non abbiano punti di accumulazione.

In tale ultimo caso basterà confrontare separatamente $u_{1x}(x, t)$ ed $u_{2x}(x, t)$ con il gradiente della soluzione $u_3(x, t)$ di un problema del tipo (1.1) con dati, poniamo, $h_1(x)$, $f_1(t)$, $g_1(\eta, t)$ e contorno mobile $s_3(t)$ tale che esistano due numeri N, N' in modo che

$$\|s_1(t) - s_3(t)\| + \|s_2(t) - s_3(t)\| \leqslant N\|\Delta s\| \ ,$$

$$\|\dot{s}_1(t) - \dot{s}_3(t)\| + \|\dot{s}_2(t) - \dot{s}_3(t)\| \leqslant N'\|\Delta\dot{s}\|$$

e tale che, inoltre, gli zeri delle funzioni $s_1(t) - s_3(t)$ e $s_2(t) - s_3(t)$ non abbiano punti di accumulazione. La (7.11) risulta così dimostrata anche in questo caso, con un diverso valore della costante C_{11}.

In maniera sostanzialmente analoga si dimostrano i seguenti teoremi relativi alla stabilità del gradiente della soluzione del problema (5.1) rispetto ai dati ed al contorno.

TEOREMA 7.3 (stabilità di $v_x(x, t)$ rispetto ai dati). *Sia soddisfatta l'ipotesi* (SL), *valgano per* $h_1(x)$, $h_2(x)$ *la* (HL), *per* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *la* (FL) *e siano inoltre* $\varphi_1(t)$ *e* $\varphi_2(t)$ *due funzioni lipschitziane in* $[0, T]$ *e sia* $\Delta\Phi$ *la costante di Lipschitz di* $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$; *sia infine* $\varphi_1(0) - \varphi_2(0) =$

$= h_1(0) - h_2(0)$; *si ha allora*

$$(7.15)\qquad |v_{1x}(x,t) - v_{2x}(x,t)| \leq C_{12}\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \\ + \Delta H + \Delta F + \Delta\Phi\} \quad in\ D_T$$

con C_{12} *calcolabile a priori.*

Teorema 7.4 (stabilità di $v_x(x,t)$ rispetto ai dati ed al contorno). *Le funzioni* $s_1(t)$, $s_2(t)$ *abbiano in* $[0, T]$ *derivata prima hölderiana di ordine maggiore di* $\frac{1}{2}$; *le funzioni* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *abbiano derivata seconda limitata in* $[0, T]$; *le funzioni* $h_1(x)$, $h_2(x)$ *abbiano derivata seconda lipschitziana in* $[0, b_1]$, $[0, b_2]$ *rispettivamente*; *le funzioni* $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$ *abbiano derivata seconda limitata in* $[0, T]$; *e valgano infine le condizioni di raccordo*:

$$h_1(0) - h_2(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0)$$

$$h_1''(0) - h_2''(0) = \dot\varphi_1(0) - \dot\varphi_2(0)$$

ed

$$h_i(b_i) = f_i(0)\,,$$

$$\dot s_i(0) h_i'(b_i) + h_i''(b_i) = \dot f_i(0)\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Si ha allora:

$$(7.16)\qquad |v_{1x}(x,t) - v_{2x}(x,t)| \leq C_{13}\{\|h_1 - h_2\| + \|f_1 - f_2\| + \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \\ + \|\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2\| + \Delta H + \Delta F + \|\Delta s\| + \|\Delta\dot s\|\}\,, \quad 0 \leq x \leq \lambda(t)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,,$$

con C_{13} *calcolabile a priori.*

8. Osservazioni complementari circa le limitazioni su $u_x(x,t)$, $v_x(x,t)$.

Abbiamo dimostrato (Teorema 4.4) che, sotto opportune ipotesi sui dati, la soluzione $u(x,t)$ del problema (1.1) presenta sul piano $x = 0$ un comportamento non uniformemente lipschitiziano rispetto a t in $(0, T]$; precisamente il suo incremento è del tipo $\sqrt{t+\delta} - \sqrt{t}$.

Alla luce di questo risultato ci sembra interessante completare la deduzione di limitazioni a priori sulle derivate u_x, v_x, assumendo per f, nel problema (1.1), e per f e φ, nel problema (5.1) un comportamento del tipo suddetto.

Tali ipotesi non sono state introdotte nella deduzione delle limitazioni per $u_x(x, t)$ (Teoremi 3.1, 3.2, Corollario 3.2) nè, simmetricamente, nel § 5 ove si sono ottenute limitazioni per $v_x(x, t)$ (Lemmi 3.1, 3.2), sia per evitare un eccessivo appesantimento delle dimostrazioni, sia perchè esse apparivano a quel punto meno significative dal punto di vista fisico-matematico.

Desideriamo dunque dimostrare che i risultati elencati si estendono anche al caso in cui gli incrementi dei dati al contorno f, φ siano del tipo sopra descritto.

Iniziamo dimostrando la seguente estensione del Teorema 3.1:

TEOREMA 8.1. *Ferme restando le rimanenti ipotesi del Teorema* 3.1 *si sostituisca la* (FL) *con*

$$|f(t+\delta)-f(t)| \leq F_1(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq t+\delta \leq T, \tag{8.1}$$

con F_1 costante indipendente da δ. La limitazione (3.6) *è ancora valida.*

DIMOSTRAZIONE. Come più volte asserito, è sufficiente dimostrare preliminarmente il teorema nelle ipotesi (SD), (HD). Notiamo inoltre che anche in questo caso la continuità di $u_x(x, t)$ per $x = s(t)$ e $0 < t \leq T$ si può dimostrare attraverso la scomposizione (3.7). Riprendendo in esame la deduzione della (3.3) osserveremo che nel presente caso non è possibile eseguire l'integrazione per parti che conduce al terzo termine della (3.3), quello cioè contenente $\dot{f}$. Ritorniamo allora alla primitiva espressione di $u_x(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) = &-\int_0^b G_\xi(x, t;\, \xi, 0)\, h(\xi)\, d\xi - \\ &-\int_0^t N_x(x, t;\, 0, \tau)\, g[u(0, \tau), \tau]\, d\tau + \\ &+\int_0^t \{G_{\xi\xi}(x, t;\, s(\tau), \tau) - G_\xi(x, t;\, s(\tau), \tau)\, \dot{s}(\tau)\}\, f(\tau)\, d\tau + \\ &+\int_0^t N_x(x, t;\, s(\tau), \tau)\, u_x(s(\tau), \tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{8.2}$$

e notiamo che il terzo termine al secondo membro può essere scritto nella forma:

$$\int_0^t \left\{\frac{d}{d\tau} G(x, t; s(\tau), \tau)\right\} [f(t) - f(\tau)]\, d\tau + \\ + [f(t) - f(0)]\, G(x, t; b, 0) + f(0)\, G(x, t; b, 0) .$$

Perciò, integrando per parti il primo termine al secondo membro della (8.2) e passando al limite per $x \to s(t)-$, si ottiene in luogo della (3.3):

$$(8.3) \qquad \frac{1}{2} u_x(s(t), t) = \int_0^b G(s(t), t; \xi, 0)\, h'(\xi)\, d\xi - \\ - \int_0^t N_x(s(t), t; 0, \tau)\, g[u(0, \tau), \tau]\, d\tau + \\ + \lim_{x \to s(t)_-} \int_0^t \left\{\frac{d}{d\tau} G(x, t; s(\tau), \tau)\right\} [f(t) - f(\tau)]\, d\tau - \\ + [f(t) - f(0)]\, G(s(t), t; b, 0) + \int_0^t N_x(s(t), t; s(\tau), \tau)\, u_x(s(\tau), \tau)\, d\tau .$$

La limitatezza dei termini contenenti f si riconosce ora facilmente in base alla (8.1), utilizzando le maggiorazioni

$$(8.4) \qquad |f(t) - f(0)| \leqslant F_1 \sqrt{t} \quad \text{e} \quad |f(t) - f(\tau)| \leqslant F_1 \frac{t - \tau}{\sqrt{\tau}} \qquad \text{per } 0 < \tau \leqslant t \leqslant T .$$

Ne consegue una limitazione a priori per $|u_x(s(t), t)|$: ciò estende le conclusioni del Lemma 3.1. La dimostrazione del Teorema 8.1 si può infine completare seguendo il procedimento indicato nella dimostrazione del Teorema 3.1.

Il successivo Teorema 8.2 rappresenta una analoga estensione del Teorema 3.2. Si noti che come corollario del Teorema 8.2 si ottiene immediatamente la corrispondente estensione del Corollario 3.2.

TEOREMA 8.2. *Se tra le ipotesi del Teorema* 3.2 *la* (FL) *è sostituita con la* (8.1), *esiste ancora una limitazione su* $u_x(x, t)$ *indipendente dalla costante di Lipschitz di* $s(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare il Teorema 8.2, fatta ancora la scomposizione (3.7), poichè per $u^{(1)}(x, t)$ i risultati rimangono invariati, sarà sufficiente esaminare la soluzione $u^{(2)}(x, t)$ del problema (3.9), che qui riscriviamo per comodità

$$
(8.5)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{L}\, u^{(2)} = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ u^{(2)}(x, 0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ u^{(2)}\big(s(t), t\big) = f(t) - f(0)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \\ u_x^{(2)}(0, t) = 0\,, & 0 < t \leqslant T\,. \end{cases}
$$

Preso un $\bar{t} \in (0, T]$ si consideri la funzione $u^{(3)}(x, t)$ soluzione del seguente problema

$$
(8.6)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{L}\, u^{(3)} = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ u^{(3)}(x, 0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ u^{(3)}\big(s(t), t\big) = F_1 \sqrt{\bar{t}}\,, & 0 < t \leqslant \bar{t}\,; \\ u_x^{(3)}(0, t) = 0\,, & 0 < t \leqslant \bar{t}\,. \end{cases}
$$

Si hanno le seguenti disuguaglianze deducibili dal principio di massimo e dalla (8.1):

$$
(8.7)\qquad f(\bar{t}) - f(0) - F_1 \sqrt{\bar{t}} + u^{(3)}(x, t) \leqslant u^{(2)}(x, t) \leqslant f(\bar{t}) - f(0) + \\ + F_1 \sqrt{\bar{t}} - u^{(3)}(x, t)
$$

e quindi

$$
(8.8)\qquad \big| u_x^{(2)}\big(s(\bar{t}), \bar{t}\big) \big| \leqslant u_x^{(3)}\big(s(\bar{t}), \bar{t}\big)\,.
$$

Per ottenere una maggiorazione su $u_x^{(3)}\big(s(\bar{t}), \bar{t}\big)$, che è positivo per il principio di massimo, occorre minorare $u_x^{(3)}(x, t)$, il che può ottenersi, in base alla monotonia di $s(t)$, considerando la funzione $u_\infty(x, t)$ soluzione del seguente problema

$$(8.9)\qquad \begin{cases} L\, u_\infty = 0\,, & -\infty < x < s(\bar t)\,,\ 0 < t \leqslant \bar t\,; \\ u_\infty(x,0) = 0\,, & -\infty < x \leqslant s(\bar t)\,; \\ u_\infty(s(\bar t), t) = F_1\sqrt{t}\,, & 0 < t \leqslant \bar t\,. \end{cases}$$

Infatti la soluzione di (8.9) è:

$$u_\infty(x,t) = F_1\sqrt{\pi t}\ \text{ierfc}\left(\frac{s(\bar t) - x}{2\sqrt{t}}\right);$$

perciò è nulla per $t = 0$; inoltre

$$u_{\infty x}(0,t) = \frac{F_1\sqrt{\pi}}{2}\ \text{erfc}\,\frac{s(\bar t)}{2\sqrt{t}} > 0\,;$$

e infine

$$u_\infty(s(t), t) < F_1\sqrt{t}$$

per il principio di massimo.

Da ciò e dalla (8.8) si ottiene:

$$|u_x^{(2)}(s(\bar t), \bar t)| \leqslant u_{\infty x}(s(\bar t), \bar t) = \frac{F_1\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Lasciando inalterato il resto della dimostrazione fatta al paragrafo 3, otteniamo perciò

$$|u_x(s(t), t)| \leqslant \max\{G, a\} + \frac{F_1\sqrt{\pi}}{2}$$

concludendo così la dimostrazione del Teorema 8.2.

Per completezza desideriamo infine dimostrare che estensioni del tipo di quelle ottenute per il problema (1.1) sussistono anche per il problema (5.1).

Dimostriamo anzitutto il seguente:

TEOREMA 8.3. *Le conclusioni del Lemma* 5.1 *restano valide se l'ipotesi di lipschitzianità di* $f(t)$ *è sostituita dalla* (8.1) *e in luogo della lip-*

schitzianità di $\varphi(t)$ *in* $[0, T]$ *si suppone che*

$$(8.10) \qquad |\varphi(t+\delta)-\varphi(t)| \leqslant \Phi_1(\sqrt{t+\delta}-\sqrt{t}) , \qquad 0 \leqslant t \leqslant t+\delta \leqslant T ,$$

con Φ_1 *costante indipendente da* δ.

Dimostrazione. Come per la dimostrazione del Teorema 8.1 occorre anche in questo caso dedurre appropriate espressioni per $v_x(s(t), t)$ e $v_x(0, t)$. Queste si ottengono passando al limite rispettivamente per $x \to s(t)-$ e $x \to 0+$ dalla seguente formula (ove si assumono $s(t)$ e $h(x)$ derivabili):

$$(8.11) \qquad v_x(x,t) = \int_0^b N(x, t; \xi, 0)\, h'(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t \left\{\frac{d}{d\tau} N(x, t; s(\tau), \tau)\right\} [f(t)-f(\tau)]\, d\tau + [f(t)-f(0)]\, N(x, t; b, 0) -$$
$$- \int_0^t N_\tau(x, t; 0, \tau)[\varphi(t)-\varphi(\tau)]\, d\tau - [\varphi(t)-\varphi(0)]\, N(x, t; 0, 0) +$$
$$+ \int_0^t G_x(x, t; s(\tau), \tau)\, v_x(s(\tau), \tau)\, d\tau .$$

I rispettivi limiti si riconoscono limitati con la medesima tecnica usata nella dimostrazione del Teorema 8.1.

Il resto della dimostrazione segue la traccia di quella del Lemma 5.1. Dimostriamo ora, per concludere, che nel caso di contorni monotoni vale il seguente:

Teorema 8.4. *Se tra le ipotesi del Lemma* 5.2, *la* (FL) *è sostituita dalla* (8.1) *e se in luogo della lipschitzianità di* $\varphi(t)$ *si suppone che valga la* (8.10), *si ha*

$$(8.12) \qquad |v_x(x, t)| \leqslant \tilde{B}' ,$$

dove $\tilde{B}'$, *indipendente dalla costante di Lipschitz di* $s(t)$, *è calcolabile a priori.*

DIMOSTRAZIONE. Fatta la scomposizione (5.6), occupiamoci separatamente della limitazione di $v_{1x}(x, t)$ e $v_{2x}(x, t)$. Per quanto riguarda $v_{1x}(s(t), t)$ la (5.7) continua a valere senza modifiche; anche la (5.8) resta valida nelle ipotesi attuali: perciò, per ottenere la cercata limitazione su $v_{1x}(0, t)$ basterà dimostrare la limitatezza di $v'_{1x}(0, t)$, essendo $v'_1(x, t)$ la soluzione del problema, che qui riscriviamo

$$(8.13)\qquad \begin{cases} L\, v'_1 = 0\,, & \text{in } D_T\,; \\ v'_1(x, 0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant b\,; \\ v'_1(s(t), t) = 0 & 0 < t \leqslant T\,; \\ v'_1(0, t) = \varphi(t) - \varphi(0)\,, & 0 < t \leqslant T\,; \end{cases}$$

Indichiamo ora con $v\,(x, t)$ la soluzione di un problema che differisce da (8.13) perchè l'ultima condizione è sostituita da

$$v_3(0, t) = \Phi_1\sqrt{t}\;;$$

è allora immediato mostrare, in base al principio di massimo ed alla (8.10) che:

$$(8.14)\qquad |v'_{1x}(0, t)| \leqslant |v_{3x}(0, t)|\,.$$

È ora possibile minorare $v_3(x, t)$ con la soluzione del problema

$$(8.15)\qquad \begin{cases} L\, v_\infty = 0\,, & x > 0\,,\ 0 < t \leqslant T\,; \\ v_\infty(x, 0) = -\dfrac{1}{b}\,\Phi_1\sqrt{T}x\,, & x > 0\,, \\ v_\infty(0, t) = \Phi_1\sqrt{t}\,, & 0 < t \leqslant T\,; \end{cases}$$

Infatti, per asserire ciò è sufficiente, in base al principio di massimo, mostrare che $v_\infty(s(t), t) \leqslant 0$; ma è:

$$v_\infty(s(t), t) = -\frac{1}{b}\,\Phi_1\sqrt{T}\,s(t) + \Phi_1\sqrt{\pi t}\,\mathrm{ierfc}\,\frac{s(t)}{2\sqrt{t}} \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_1\sqrt{T}\left[\sqrt{\pi}\,\mathrm{ierfc}\,\frac{s(t)}{2\sqrt{t}} - 1\right] \leqslant 0\,.$$

Si ha pertanto

$$(8.16)\qquad |v'_{1x}(0, t)| \leqslant -v_{\infty x}(0, t) = \Phi_1\left\{\frac{1}{b}\sqrt{T} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}.$$

Ciò conclude la prima parte della dimostrazione del Teorema 8.4.

Per quanto riguarda la limitazione su $v_{2x}(x, t)$, noteremo che, con la stessa tecnica usata per ottenere la (5.13), si ha

$$|v_{2x}(0, t)| \leqslant \frac{1}{b} F_1 \sqrt{T} . \tag{8.17}$$

Quanto a $v_{2x}(s(t), t)$, si possono usare funzioni di confronto simili a quelle usate nelle dimostrazioni precedenti ed ottenere infine

$$|v_{2x}(s(t), t)| \leqslant F_1 \left\{\frac{1}{b}\sqrt{T} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\} . \tag{8.18}$$

Richiamando la scomposizione $v(x, t) = v_1'(x, t) + v_1''(x, t) + v_2(x, t)$, i risultati conseguiti consentono di concludere, con una immediata applicazione del principio di massimo, la dimostrazione del Teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall Inc. (1964).

[2] O. A. Ladyzenskaja - V. A. Solonnikov - N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, A. M. S. Translations, vol. 23, Providence, Rhode Island, 1968.

[3] A. M. Il'in - A. S. Kalashnikov - O. A. Oleinik, *Equazioni paraboliche lineari del secondo ordine* (in russo), Uspekhi Math. Nauk., **17** (1962), 3-146.

[4] A. Fasano - M. Primicerio, *Su un problema unidimensionale di diffusione in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari.* Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **93** (1972), 333-357.

[5] A. Fasano - M. Primicerio, *Convergence of Huber's method for heat conduction problem with change of phase*, Zeit. Ang. Math. Mech. **53** (1973), 341-348.

[6] J. R. Cannon - C. D. Hill, *Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation*, J. Math. Mech., **17** (1967), 1-20.

[7] M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. (Ser. 6), **9** (1913), 305-471.

[8] H. S. Carslaw - J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[9] B. Sherman, *Continuous dependence and differentiability properties of the solution of a free boundary problem for the heat equation*, Quart. Appl. Math., **27** (1970), 427-439.

[10] G. Prodi, *Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili. Soluzioni periodiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **23** (1953), 25-85.

[11] Chou Yu-Lin′, *Problemi al contorno per equazioni paraboliche non lineari* (in russo), Mat. Sb. (N. S.), **47** (**89**) (1959), 431-484.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 marzo 1973.