RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

COSTANTIN NASTASESCU

La filtrazione di Gabriel - II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 50 (1973), p. 189-195

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__189_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

La filtrazione di Gabriel - II.

COSTANTIN NASTASESCU (*)

0. Alcune definizioni.

Il presente lavoro continua la ricerca intrapresa in [5]. Siano A un anello commutativo e con unità e $\text{Mod } A$ la categoria degli A -moduli unitari.

Si può definire per induzione transfinita su $\text{Mod } A$ una filtrazione nel seguente modo: denotiamo con $(\text{Mod } A)_0$ la più piccola categoria localizzante di $\text{Mod } A$ [2] contenente tutti gli A -moduli semplici.

(Nel senso di Lambek [4], $(\text{Mod } A)_0$ è la minima teoria della torsione nella quale tutti gli A -moduli semplici sono di torsione).

Se α è un ordinale non limite, allora $(\text{Mod } A)_\alpha$ è la sottocategoria localizzante di $\text{Mod } A$ tale che la categoria quoziente $(\text{Mod } A)_\alpha / (\text{Mod } A)_{\alpha-1}$ sia la minima sottocategoria localizzante di $\text{Mod } A / (\text{Mod } A)_{\alpha-1}$ contenente tutti gli oggetti semplici.

Se α è un numero ordinale limite, allora $(\text{Mod } A)_\alpha$ è la più piccola categoria localizzante contenente tutte le sottocategorie $(\text{Mod } A)_\beta$ con $\beta < \alpha$. In questo modo otteniamo una successione transfinita: $(\text{Mod } A)_0 \subseteq (\text{Mod } A)_1 \subseteq \dots \subseteq (\text{Mod } A)_\alpha \subseteq (\text{Mod } A)_{\alpha+1} \subseteq \dots$ di sottocategorie localizzanti.

È chiaro che, poichè A è un insieme, che esiste un ordinale ξ tale che

$$(\text{Mod } A)_\xi = (\text{Mod } A)_{\xi+1} = \dots$$

(*) Indirizzo dell'A.: Universitatea Bucuresti, Facultatea Matematica, Mecanica - Str. Academiei 14 - Romania.

Questo lavoro è stato fatto mentre l'autore usufruiva di una borsa di ricerca per matematici stranieri del C.N.R. presso l'Università di Ferrara.

Se esiste un ordinale α tale $(\text{Mod } A)_\alpha = \text{Mod } A$ diciamo che l'anello A ha dimensione di Krull *definita*, oppure che A è semi-noetheriano (7).

In tal caso il minimo ordinale α per cui $(\text{Mod } A)_\alpha = \text{Mod } A$ si chiama la dimensione di Krull di $\text{Mod } A$ e lo si denota con $\dim_k A$.

Sia $\text{spec } A$ lo spettro primo di A (che noi considereremo senza topologia). In [5] è stata definita su $\text{spec } A$ la seguente filtrazione:

$(\text{Spec } A)_0$ è l'insieme di tutti gli ideali massimali di A ; se α è un ordinale non limite $(\text{Spec } A)_\alpha = \{P \mid P \in \text{Spec } A; \forall Q \in \text{Spec } A, P \subset Q, P \neq Q \Rightarrow Q \in (\text{Spec } A)_{\alpha-1}\}$. Se α è un ordinale limite

$$(\text{Spec } A)_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} (\text{Spec } A)_\beta .$$

È chiaro che esiste un numero ordinale η tale che:

$$(\text{Spec } A)_\eta = (\text{Spec } A)_{\eta+1} = \dots .$$

Se esiste un ordinale α tale che $(\text{Spec } A)_\alpha = \text{Spec } A$ si dice [5] che $\text{Spec } A$ ha dimensione di Krull *definita*. In [5] è stato dimostrato che $\text{Spec } A$ ha dimensione di Krull *definita* se e solo se l'anello A verifica la condizione del massimo per gli ideali primi.

1. Risultati preliminari.

Se M è un A -modulo qualunque, denotiamo con $\text{Ass}(M)$ l'insieme.

$$\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \exists x \in M, x \neq 0, \mathfrak{p} = \text{Ann}(x)\} .$$

TEOREMA 1.1 [5]. *Siano α un numero ordinale ed M un A -modulo; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- 1) $M \in (\text{Mod } A)_\alpha$;
- 2) $\text{Ass}(M/M') \neq \emptyset$ e $\text{Ass}(M/M') \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$ per ogni $M' \subseteq M, M' \neq M$.

La dimostrazione è data in [5].

COROLLARIO 1.2 [5]. *Sia A un anello commutativo con unità, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

- 1) A ha dimensione Krull *definita* (oppure è semi noetheriano);

- 2) $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ per ogni $M \neq 0$ $\text{Spec } A$ ha dimensione Krull definita;
- 3) $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ per ogni $M \neq 0$ ed A verifica la condizione del massimo per gli ideali primi;
- 4) Per ogni ideale $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{a} \neq A$, esiste $x \in A$ tale che $\{\mathfrak{a}:x\}$ è un ideale primo ed A verifica la condizione del massimo per ideali primi.

La dimostrazione è data in [5].

Ricordiamo che l'anello A ha dimensione di Krull (classica) finita se l'estremo superiore delle lunghezze delle catene di ideali primi è finita.

COROLLARIO 1.3 [5]. *Se A è un anello con dimensione Krull finita, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- 1) A ha dimensione Krull definita;
- 2) $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ per ogni $M \neq 0$, $M \in \text{Mod } A$.

COROLLARIO 1.4. *Sia A un anello di valutazione di altezza n [1]. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- 1) Il gruppo di valutazione $G \simeq \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}}_n$ (ordinato lessicografico).
- 2) A ha dimensione Krull definita.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Per $n = 1$ risulta a [5]. Supponiamo la affermazione vera per $n - 1$. Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo tale che $ht(\mathfrak{p}) = 1$ allora $A/\mathfrak{p}$ ha dimensione Krull definita (per induzione) e $A\mathfrak{p}$ è noetheriano. Quindi $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{p}^n = 0$. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale $\neq 0$ allora esiste $k \geq 1$ tale che $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{p}^k$; da qui segue $\text{Ass}(A/\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.

Per corollario 1.2 risulta 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Per $n = 1$ risulta a [5]. Sia H il gruppo isolato associato all'ideale $\mathfrak{p}(ht(\mathfrak{p}) = 1)$. Poichè $A\mathfrak{p}$ è discreto [5] allora dalla sequenza esatta:

$$0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \simeq \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

segue $G \simeq \mathbf{Z} \times H$ dove $H \simeq \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}}_{n-1}$ (per ipotesi di induzione).

Indichiamo con la F_α la topologia additiva (oppure il sistema topologizzante ed idempotente nel senso di [2]) associata alla sottocategoria localizzante $(\text{Mod } A)_\alpha$, cioè

$$F = \{\mathfrak{a} | \mathfrak{a} \subseteq A, A/\mathfrak{a} \in (\text{Mod } A)_\alpha\}$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia A un anello commutativo ed $\mathfrak{a} \subset A$ un ideale; allora le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

- 1) $\mathfrak{a} \in F_\alpha$;
- 2) per ogni ideale $\mathfrak{b} \subset A$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, esiste un elemento $x \in A$, tale che $(\mathfrak{b}:x)$ è un ideale primo e

$$(\mathfrak{b}:x) \in (\text{Spec } A)_\alpha;$$

- 3) $A/\mathfrak{a}$ è un anello con dimensione Krull definita e $\dim_k A/\mathfrak{a} \leq \alpha$.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2) Se $\mathfrak{b} \subset A$; $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, allora $\mathfrak{b} \in F_\alpha$; dunque $A/\mathfrak{b} \in (\text{Mod } A)_\alpha$. Poichè $\text{Ass}(A/\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ esiste un elemento $\hat{x} \in A/\mathfrak{b}$, tale che $\hat{x} \neq 0$ e $\text{Ann}(\hat{x})$ è un ideale primo. È chiaro che $\text{Ann}(\hat{x}) = (\mathfrak{b}:x)$ e $(\mathfrak{b}:x) \in (\text{Spec } A)_\alpha$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sia M un $A/\mathfrak{a}$ -modulo, $M \neq 0$; allora M è un A -modulo non-nullo. Consideriamo $m \in M$, $m \neq 0$. È chiaro che $\text{Ann}(m) \supseteq \mathfrak{a}$ e $\text{Ann}(m) \neq A$. Supponiamo che esista $x \in A$ tale che $\mathfrak{p} = (\text{Ann}(m):x)$ sia un ideale primo appartenente a $(\text{Spec } A)_\alpha$.

Essendo $A/\mathfrak{a} \cdot m \simeq A/\text{Ann}(m)$, allora $\mathfrak{p} \in \text{Ass } A/\mathfrak{a}(M)$.

Dal teorema 1.1 e dal Corollario 1.2 segue che $A/\mathfrak{a}$ è un anello con dimensione di Krull definita e $\dim_k A/\mathfrak{a} \leq \alpha$ 3) $\Rightarrow$ 1) Se ottiene dal teorema 1.1.

Della teorema 1.1. segue:

PROPOSIZIONE 1.6. *Sia $M \in (\text{Mod } A)_{\alpha_0}$, allora esiste una filtrazione $(M_\alpha)_{\alpha \in W}$ indicata con un insieme di numeri ordinali, con le seguenti proprietà:*

$$1) \quad M_0 = \sum_{\substack{x \in M \\ \text{Ann}(x) \text{ primo}}} Ax = \sum_{\substack{x \in M \\ \text{Ann}(x) \in (\text{Spec } A)_{\alpha_0}}} Ax,$$

2) Se α è un numero ordinale non limite, allora

$$M_\alpha / M_{\alpha-1} = \sum_{\substack{x \in M/M_{\alpha-1} \\ \text{Ann}(x) \text{ primo}}} Ax = \sum_{\substack{x \in M/M_{\alpha-1} \\ \text{Ann}(x) \in (\text{Spec } A)_{\alpha_0}}} Ax,$$

Se α è un numero ordinale limite, allora

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta.$$

$$3) \quad M = \bigcup_{\alpha \in W} M_\alpha.$$

2. La filtrazione di Gabriel associata ad un anello di polinomi.

Sia A un anello commutativo con unità, denotiamo con $A[x_1, \dots, x_n]$ l'anello di polinomi in n -variabili a coefficienti in A .

Se M è un A -modulo poniamo:

$$M[X_1, X_2, \dots, X] = M \otimes_A A[X_1, \dots, X_n].$$

TEOREMA 2.1. *Siano A un anello commutativo ed $\alpha = \theta + n$, un numero ordinale (θ ordinale limite ed n un numero naturale) Se M è un A -modulo tale che $M \in (\text{Mod } A)_\alpha$, allora:*

$$M[x] \in (\text{Mod } A[x])_\theta \text{ se } n = 0$$

$$M[x] \in (\text{Mod } A[x])_{\theta+k} \text{ dove } n \neq 0, n + 1 \leq k \leq 2n + 1$$

Se $\alpha = 0$ allora $M \in (\text{Mod } A)_0$, quindi M è uno A -modulo semiartiniano [6] e per il teorema 3.5. di [5], $M[X] \in (\text{Mod } A[x])_1$.

Supponiamo che la nostra affermazione vera per ogni numero ordinale $\beta < \alpha$ e dimostriamola per α . Sia $M \in (\text{Mod } A)_\alpha$; per la proposizione 1.6., possiamo supporre M della forma $M = A/\mathfrak{p}$ dove $\mathfrak{p} \in (\text{Spec } A)_\alpha$. Indichiamo con B , l'anello $A/\mathfrak{p}$ e con K il corpo delle frazioni di B . Se S è l'insieme di tutti elementi non-nulli di B , allora $K = B_S$, e dunque

$$K[X] = (B[X])_S.$$

Abbiamo la sequenza esatta di categorie:

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod } B[X] \rightarrow \text{Mod } K[X] \rightarrow 0$$

dove $\text{Mod } K[X]$ è una categoria quoziente dalla $\text{Mod } B[X]$ e $\mathcal{A}$ una categoria localizzata dello $\text{Mod } B[X]$, cioè:

$$\mathcal{A} = \{M \in \text{Mod } B[X], \forall x \in M, x \neq 0, \text{Ann}(x) \cap S \neq \emptyset\}.$$

Sia $M \in \mathcal{A}$ ed $x \in M, x \neq 0$, poniamo:

$$\mathfrak{a} = \text{Ann}(x) \quad \text{e} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B.$$

Poichè $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset$, allora $\mathfrak{b} \neq 0$ e quindi l'anello $B/\mathfrak{b}$ è con dimensione Krull definita ed inoltre:

$$\beta = \dim_k B/\mathfrak{b} < \alpha.$$

Da qui risulta che $B/\mathfrak{b}[X]$ è un anello con dimensione Krull definita e quindi $B/\mathfrak{b}[X]$ è un $A[X]$ -modulo che appartiene a $(\text{Mod } A[X])_{\beta+1}$.

Della sequenza esatta di $A[X]$ -moduli

$$B/\mathfrak{b}[X] \rightarrow B[X]/\mathfrak{a} \rightarrow 0$$

otteniamo che $B[X]/\mathfrak{a} \in (\text{Mod } B[X])_{\beta+l}$ e quindi $\mathcal{A} \subseteq (\text{Mod } B[X])_{\beta+l}$, cioè $\mathcal{A}$ è una categoria con dimensione Krull definita.

D'altra parte dalla proposizione 1 ([2] chap. IV) e della sequenza esatta (*) si ottiene che l'anello $B[X]$ è con dimensione Krull definita e

$$\dim_k B[X] \leq \beta + l + \dim_k K[X] = \beta + l + 2$$

($K[X]$ essendo un anello principale).

Ora se $n = 0$, allora $\alpha = \theta$ e $\beta + l + 2 < \alpha$ quindi $M[X] = B[X] \in (\text{Mod } A[X])_{\theta}$.

Se $n \neq 0$, possiamo supporre che $M = A/p \in (\text{Mod } A)_{\alpha}$ e $M \notin (\text{Mod } A)_{\alpha-1}$. In questo caso $\beta \leq \alpha - 1 = \theta + n - 1$. Allora per ipotesi $\mathcal{A} \subseteq (\text{Mod } A[X])_{\theta+k'}$, dove $n \leq k' \leq 2n - 1$.

Dalla sequenza esatta (*) e dalla prop 1 ([2], chap IV) risulta che $M[X] = B[X] \in (\text{Mod } A[X])_{\theta+k}$, dove $n + 1 \leq k \leq 2n + 1$.

COROLLARIO 2.2. *Sia A un anello commutativo, allora le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

- 1) A ha dimensione Krull definita;
- 2) $A[X_1, \dots, X_n]$ ha dimensione Krull definita.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Ragionando per induzione su n , basta provare il corollario per $n = 1$.

Poichè A ha dimensione Krull definita, allora esiste un numero ordinale α tale che $\text{Mod } A = (\text{Mod } A)_{\alpha}$.

Consideriamo un $A[X]$ -Modulo P ed il morfismo

$$\varphi_{\alpha} P[X] \rightarrow P$$

così definita

$$\varphi(p \otimes Q(x)) = Q(x) \cdot p \quad \text{con } p \in P \text{ e } Q(X) \in A[x]$$

è surettivo. D'altra parte $P \in (\text{Mod } A)_x$ e per il teorema 2.1., $P[X] \in (\text{Mod } A[X])_{x+k}$, pertanto $P \in (\text{Mod } A[X])_{x+1}$ (la sottocategoria $(\text{Mod } A[X])_{x+k}$ è localizzante). (k numero naturale, $k \geq 0$)

2) $\Rightarrow$ 1). Poichè $A \cong A[X_1, \dots, X_n]/(X_1, \dots, X_n)$ allora otteniamo da [5] che A è un anello con dimensione Krull definita.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap. 6, Paris, Hermann.
- [2] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 323-448.
- [3] J. KAPLANSKY, *Commutative Rings*, Lectures in Mathematics, Chicago.
- [4] J. LAMBEK, *Torsion theories, Additive semantics and Rings of Quotient*, Lecture Notes on Math., Springer-Verlag, 177.
- [5] C. NASTASESCU, *La filtration de Gabriel I*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (in corso di stampa).
- [6] C. NASTASESCU - N. POPESCU, *Anneaux semi-artinien*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 357-368.
- [7] N. POPESCU, *La decomposition primaires des anneaux semi-noetheriens*, Journal of Algebra, **23**, no. 3 (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1973.