RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Pseudodifferenziali definiti su aperti di una cosfera fibrata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 167-171
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__167_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Pseudodifferenziali definiti su aperti di una cosfera fibrata.

GIULIANO BRATTI (*)

§ 1. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $T^*(\Omega)$ il fibrato cotangente di base Ω. $\dot{T}^*(\Omega)$ sia $R^*(\Omega)-\{0\}$. Introdotta su $\dot{T}^*(\Omega)$ la relazione di equivalenza R, $(x, \xi)R(y, \eta)$ se e solo se $x=y$ ed esiste $t>0$ con $\xi=t\eta$, il quoziente di $\dot{T}^*(\Omega)$ modulo R si indicherà con $S^*(\Omega)$. $S^*(\Omega)$ si dice la cosfera fibrata su Ω. $S^*(\Omega)$ può esser identificata con il prodotto $\Omega\times S_{n-1}$, dove S_{n-1} indica la superficie sferica unitaria in $\mathbb{R}_n$ duale di $\mathbb{R}^n$.

Nel caso ordinario, se $A=A(x, D)$ è un operatore pseudodifferenziale di simbolo $a(x, \xi)$, (per ogni $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, $A\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int\exp[ix\xi]\,a(x, \xi)\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$, $\hat{\varphi}(\xi)$ indica la trasformata di Fourier di φ), $a(x, \xi)$ è una funzione C^∞ (**) definita su $\Omega\times\mathbb{R}_n$; oggetto di questo articolo è di dare la definizione di operatore pseudodifferenziale con simbolo definito solo su un aperto di $S^*(\Omega)$, $\mathcal{O}$.

Si otterrà, per tali operatori:

A) *un teorema di continuità tra spazi di Sobolev, relativamente definiti sull'aperto* $\mathcal{O}$; *e*

B) *un teorema di pseudolocalità.*

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 3 - I-35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R., presso la Rutgers Univeisity, New Brunswick, N. J., U.S.A.

(**) $a(x, \xi)$ soddisfa alla condizione ulteriore: se l'operatore A, di cui $a(x, \xi)$ è il simbolo, è di ordine $\leqslant m$, per ogni compatto K in Ω e per ogni coppia di multi-indici $(p, q)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n$, esiste $G_{p,q}(K)>0$ con $|D_\xi^p D_x^q a(x, \xi)|\leqslant G_{p,q}(K)(1+|\xi|)^{m-|p|}$, $x\in K$ e $\xi\in\mathbb{R}_n$, $|p|=$ lunghezza del multi-indice p, $D=(1/i)(\partial/\partial x)$.

Sarà dimostrato, inoltre, come nel caso ordinario, se $A(x, D)$ è un operatore pseudodifferenziale di ordine $\leqslant m$, $m \in \mathbf{R}$, la continuità di $A(x, D)$ tra $H_c^s(\Omega)$ e $H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbf{R}$ (*), e la sua pseudolocalità, (se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\operatorname{supp\,sing} A(x, D) u \subseteq \operatorname{supp\,sing} u$), seguono da A) e B).

Le notazioni usate sono quelle in « *An introduction to Pseudodifferential operators and to Fourier integral operators* », di Francois Treves.

§ **2.** $\pi \colon S^*(\Omega) \to \Omega$ sia la proiezione naturale della cosfera fibrata $S^*(\Omega)$ sulla sua base Ω, $\pi(x, \dot{\xi}) = x$; $\mathcal{O}$ sia un aperto in $S^*(\Omega)$ e $\mathcal{K}$ un compatto in $\mathcal{O}$.

DEFINIZIONE 1.

$$\sum(\mathcal{K}) = \{\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \colon \hat{\varphi}(x, \xi) = \int \exp[iy\xi] \varphi(x, y)\, dy$$

è zero se $(x, \dot{\xi}) \notin \mathcal{K}\}$ (**).

DEFINIZIONE 2. $s \in \mathbf{R}$, $H^s(\mathcal{K})$ *è il completamento con topologia relativa di* $\sum(\mathcal{K})$ *in* $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \mathbin{\widehat{\otimes}} H^s(\mathbf{R}^n)$.

Se $\mathcal{K}_n$ è una successione di compatti in $\mathcal{O}$ con: $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_n \subset \mathring{\mathcal{K}}_{n+1}$, $\mathring{\mathcal{K}}_{n+1}$ l'interno di $\mathcal{K}_{n+1}$,

DEFINIZIONE 3. $H^s(\mathcal{O})$ *è il limite induttivo degli F-spazi* $H^s(\mathcal{K}_n)$.

DEFINIZIONE 4. $m \in \mathbf{R}$, $S^m(\mathcal{O}) = \{a(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty$ *per ogni* $(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{O}$: *per ogni* $\mathcal{K}$ *compatto in* $\mathcal{O}$ *e per ogni* $(p, q) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$ *esiste* $C_{p,q}(\mathcal{K}) > 0$ *con* $|D_\xi^p D_x^q a(x, \xi)| \leqslant C_{pq}(\mathcal{K})(1 + |\xi|)^{m-|p|}$, *per ogni* $(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{K}\}$. *Ogni* $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$ *si dice un simbolo di ordine* $\leqslant m$ *su* O.

Se su $S^m(O)$ si pone la topologia della famiglia di seminorme $p_{\mathcal{K},p,q}$, $\mathcal{K}$, p e q come in def. 4), $p_{\mathcal{K},p,q}(a) = \inf\{C_{p,q}(\mathcal{K}) \colon C_{p,q}(\mathcal{K})$ come in def. 4)$\}$, $S^m(\mathcal{O})$ risulta F-spazio. $S^m(\Omega)$, F-spazio delle funzioni $(a(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_n)$ soddisfacenti alla proprietà di cui al (**) di § 1), si inietta continua-

(*) $H_c^s(\Omega) = H^s \cap \mathcal{E}'(\Omega)$, H^s s-spazio di Sobolev; $H_{\text{loc}}^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \colon \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),\ \varphi u \in H^s\}$. $H_c^s(\Omega)$ è il limite induttivo degli F-spazi $H^s(K)$, K compatto in Ω, con la topologia relativa da H^s, la topologia su $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ è la più debole che rende continue le mappe $m_\varphi \colon H_{\text{loc}}^s(\Omega) \to H^s$, $m_\varphi(u) = \varphi u$, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

(**) La topologia sui prodotti tensoriali è la π di Grothendieck (per la nuclearità di $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ essa coincide con la ε). Se $\xi \in \mathbf{R}_n$, $\xi \neq 0$, $\dot{\xi} = \xi/|\xi|$.

mente in $S^m(\mathcal{O})$. Se si pone: $S^{-\infty}(\mathcal{O}) = \bigcap S^m(\mathcal{O})$, $m \in \mathbf{R}$, $S^m(\Omega)$ è denso, modulo $S^{-\infty}(\mathcal{O})$, in $S^m(\mathcal{O})$ nel senso che: se $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$ si può trovare $b_n(x, \xi) \in S^m(\Omega)$, $n \in \mathbf{N}$, con $b_n(x, \xi) \to b(x, \xi)$ in $S^m(\mathcal{O})$ e $a(x, \xi) - b(x, \xi)$ e $S^{-\infty}(\mathcal{O})$.

La dimostrazione è facile: è sufficiente prendere $b_n(x, \xi) = a(x, \xi) g_n(x, \xi)$ dove $g_n(x, \xi)$ è il prolungamento naturale di $g_n(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{K}_n)$ con $g_n(x, \dot{\xi}) \equiv 1$ su $\mathcal{K}_{n-1}$. (Il prodotto $a(x, \xi) g_n(x, \xi)$ è zero se $(x, \dot{\xi}) \notin \mathcal{K}_n$).

Se $\Sigma(\mathcal{O}) = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$, per ogni $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})$, $A_r = A_r(x, D)$ sia la mappa definita su $\Sigma(\mathcal{O})$ con valori in $\mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O}))$ così ottenuta: $A_r \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}(x, \xi) d\xi$.

Definizione 5. *$\Psi^m(\mathcal{O}) = \{A_r(x, D)$, per ogni $a(x, \xi) \in S^m(\mathcal{O})\}$. Ogni $A_r(x, D) \in \Psi^m(\mathcal{O})$ si dice un pseudodifferenziale di ordine $\leqslant m$ su $\mathcal{O}$.*

A) Teorema. *Per ogni $s \in \mathbf{R}$, se $A_r = A_r(x, D) \in \Psi^m(\mathcal{O})$, A_r (è lineare e) continua da $H^s(\mathcal{O})$ in $H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\pi(\mathcal{O}))$.*

Dimostrazione. Poichè $H^s(\mathcal{O})$ è $\mathcal{LF}$-spazio, è sufficiente dimostrare che se $\varphi_n(x, y)$, $n \in \mathbf{N}$, converge a zero in $H^s(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} \in \mathcal{O}$, $A_r \varphi_n(x)$ converge a zero in $H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\pi(\mathcal{O}))$. Dire che $\varphi_n(x, y)$ converge a zero in $H^s(\mathcal{K})$ è equivalente dire che $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{\varphi}_n(x, \xi)$ converge a zero in $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} L^2(\mathbf{R}_n)$. Poichè $\hat{\varphi}_n(x, \xi)$ è nulla se $(x, \dot{\xi}) \notin \mathcal{K}$, e poichè su $\mathcal{K}$ si ha: $|a(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^m$, il prodotto $(1 + |\xi|^2)^{(s-m)/2} a(x, \xi) \hat{\varphi}_n(x, \xi)$ rimane convergente a zero in $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} L^2(\mathbf{R}_n)$. Si ha:

$$\chi_n(x, y) = (2\pi)^{-n} \int \exp[iy\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}_n(x, \xi)\, d\xi$$

è in $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ e rimane convergente a zero. La mappa $\tilde{r}|_{y=x}$: $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \otimes_\pi H^s(\mathbf{R}^n) \to H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\tilde{r}|_{y=x}(\varphi(x) \otimes u(y)) = \varphi(x) u(x)$ è continua, conseguenza del fatto che la moltiplicazione per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ è una mappa continua di $H^s(\mathbf{R}^n)$ in se stesso. Indicata con $r|_{y=x}$ il suo prolungamento per continuità, risulta, facilmente, $A_r \varphi(x) = r|_{y=x}(\chi(x, y))$, se $\chi(x, y) = (2\pi)^{-n} \int \exp[iy\xi] \cdot a(x, \xi) \hat{\varphi}(x, \xi)\, d\xi$. Il teorema è dimostrato.

R.A. Sia $\mathcal{O} \equiv S^*(\Omega)$ e φ_n, $n \in \mathbf{N}$; $\in \mathcal{C}_c^\infty(K)$, K compatto in Ω, con φ_n convergente a zero in $H^s(K)$. Se $\alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \otimes \varphi_n(y) \in H^s(S^*(\Omega))$ ed ivi converge a zero. Da A) segue facilmente che se $a(x, \xi) \in S^m(\Omega)$, $\alpha(x)(2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}_n(\xi)\, d\xi$ converge a zero in $H^{s-m}_c(\Omega)$. Allora $(2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$ converge a zero in $H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ciò dimostra che ogni operatore pseudodifferenziale di ordine $\leqslant m$ è continuo da $H^s_c(\Omega)$ in $H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Se $\mathcal{O}'$ è un aperto in $\mathcal{O}$, DEFINIZIONE 6. $\tilde{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}') = \{u(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\pi(\mathcal{O})) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O})_{x=y})$: *per ogni* $g(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{O})$ *e per ogni* $h(y) \in \mathcal{C}^\infty_c(\pi(\mathcal{O})_{x=y})$, $G_r uh(x) \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, G_r *definito da* $g(x, \xi)$, *prolungamento di* $g(x, \dot{\xi})$, $\in S^0(\mathcal{O})\}$ (*).

È facile verificare che se $S^*(\pi(\mathcal{O}))$ è la cosfera fibrata di base $\pi(\mathcal{O}) \subset \Omega$, e se $u \in \mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O}))$, $1(x) \otimes u(y) \in \tilde{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}')$ se e solo se $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}'^*)$ secondo la definizione di [2] cap. 1, § 5.

DEFINIZIONE 7. $\tilde{\mathcal{C}}^\infty(\mathcal{O}') = \bigcap H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}')$, $\forall s \in \mathbf{R}$. *Se* $u(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\pi(\mathcal{O})) \hat{\otimes}$ $\hat{\otimes}\, \mathcal{D}'(\pi(\mathcal{O})_{x=y})$, *si pone* $\mathcal{O}_u = U\{\mathcal{O}' \subset S^*(\pi(\mathcal{O}))$: $u(x, y) \in \tilde{\mathcal{C}}^\infty(\mathcal{O}')$. Si indica *con* $WF_0(u)$, *e si dice l'insieme fronte d'onda della distribuzione* u, *il complementare, in* $S^*(\pi(\mathcal{O}))$, *di* $\mathcal{O}_u$.

Si pone: $\Psi^{-\infty}(\mathcal{O}) = \bigcap \Psi^m(\mathcal{O})$, per ogni $m \in \mathbf{R}$. (Dire che $A_r \in \Psi^\infty(\mathcal{O}) =$ $= U\Psi^m(\mathcal{O})$, $m \in \mathbf{R}$, è in $\Psi^{-\infty}(\mathcal{O})$ significa dire che se $a(x\ \xi)$ è il simbolo su $\mathcal{O}$ che definisce A_r, per ogni $l \in \mathbf{N}$, per ogni $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$, per ogni coppia di multi-indici $(p, q) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, esiste $G_{p,q}(\mathcal{K}; l) > 0$ con:

$$|D^p_\xi D^q_x a(x, \xi)| \leqslant C_{p,q}(\mathcal{K}; l)\ (1 + |\xi|)^{-l}, \quad (x, \dot{\xi}) \in \mathcal{K}\,.$$

DEFINIZIONE 8. *Se* $A_r \in \Psi^\infty(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}_{A_r} = U\{\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ *aperto*: $A_r \in$ $\in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}')\}$. *Si indica con* $WF_{\mathcal{O}}(A_r)$ *il complementare in* $\mathcal{O}$, *di* $\mathcal{O}_{A_r}$.

B) TEOREMA. *Sia* $A_r \in \Psi^\infty(\mathcal{O})$ *e* $u = u(x, y) \in H^\infty(\mathcal{O}) = UH^s(\mathcal{O})$, $s \in \mathbf{R}$. $WF_0(1(x) \otimes (A_r u)(y)) \cap \mathcal{O} \subseteq WF_{\mathcal{O}}(A_r) \cap WF_0(u)$.

DIMOSTRAZIONE. *a*) sia $(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{O}_{A_r}$; si può trovare $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ con $A_r \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{O}')$. Se $u(x, y) \in H^s(\mathcal{O})$, $\hat{u}(x, \xi) \equiv 0$ se $(x, \dot{\xi}) \notin \mathcal{K} \subset O$, per qualche $\mathcal{K}$; sicchè: se $g(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{O}')$ e $g(x, \dot{\xi}) \equiv 1$ su $\mathcal{K}$, $A_r u(x) = (2\pi)^{-n} \cdot$ $\cdot \int \exp[ix\xi] b(x, \xi)\, \hat{u}(x, \xi)\, d\xi$, $b(x, \xi) = a(x, \xi)\, g(x, \xi)$ $a(x, \xi)$, che definisce A_r, $g(x, \xi)$ prolungamento di $g(x, \dot{\xi})$, (come funzione positivamente omogenea di grado zero). Sia $\alpha(x) \otimes \beta(y) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \otimes H^s(\mathbf{R}^n)$: $g_1(x, D)$ $[(2\pi)^{-n} \int \exp[ix\xi] b(x, \xi)\, \alpha(x)\, \hat{\beta}(\xi)\, d\xi] \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ non appena $g_1(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{O}')$ ed il suo prolungamento, $g_1(x, \xi)$, definisce $g_1(x, D)$. Infatti: a meno di una funzione in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $g_1(x, D)$ [...], come sopra, coincide con $(2\pi)^{-n} \cdot$ $\cdot \int \exp[ix\xi] b g_1(x, \xi)\, \hat{\beta}(\xi)\, d\xi$, con $bg_1(x, \xi) = \sum_p (1/p!)\, \partial^p_\xi g_1(x, \xi) D^p_x(b(x, \xi) \cdot$ $\cdot \alpha(x))$ (**), ed è chiaro che $bg_1(x, \xi) \in S^\infty(\Omega)$ poichè i prodotti nella serie sono non nulli solo se $(x, \dot{\xi}) \in \operatorname{supp} g_1(x, \dot{\xi}) \subset \mathcal{O}'$ ed ivi, in $\mathcal{O}'$,

---

(*) $\tilde{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}')$, come in def. 7 $\tilde{\mathcal{C}}^\infty(\mathcal{O}')$, per distinguerli dai relativi spazi su $\mathcal{O}'$ come varietà.

(**) Il modo con cui si deve intendere la convergenza di questa serie in $S^m(\Omega)$, se $a(x, \xi) \in S^m(O)$, è indicato in [2], cap. 1, § 4.

$b(x, \xi)\alpha(x) \in S^{-\infty}(\mathcal{O}')$. La mappa $g_1(x, D)$ [...], come sopra, è continua da $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \otimes_\pi H^s(\mathbf{R}^n)$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, sicchè $g_1(x, D)(A_r u) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ per ogni $g_1(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}')$. Segue: $(x, \dot{\xi}) \notin WF(1(x) \otimes A_r u(y))$.

b) Sia $(x, \dot{\xi}) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_u$: si può trovare $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ con $u \in \tilde{\mathcal{C}}^\infty(\mathcal{O}')$. Per dimostrare che $(x, \dot{\xi}) \notin WF(1(x) \otimes A_r u(y))$ il procedimento è lo stesso che in [2], cap. 1 § 5, Teorema 5.1. *B*) è completamente dimostrato.

R.B. Sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $A = A(x, D) \in \Psi^\infty(\Omega)$.

Nel caso che $\mathcal{O} = S^*(\Omega)$, *B*) dà:

$$WF_0(1(x) \otimes A(\alpha \otimes u)) \cap S^*(\Omega) \subseteq WF_0(A) \cap WF(\alpha(x) \otimes u(y)) .$$

Risulta, facilmente, $WF_0(\alpha(x) \otimes u(y)) \subseteq WF(u)$ e, per l'osservazione che segue la def. 6, $WF_0(1(x) \otimes A(\alpha \otimes u)) \equiv WF(A(\alpha \otimes u))$ (*). Allora $\forall \alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $WF(A(\alpha \otimes u)) \subseteq WF(u)$; cioè: $WF(Au) \subseteq WF(u)$.

(*) La definizione di $WF(A)$, $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$, e quello di $WF(u)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sono dati in [2], cap. 1, § 5.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Hörmander, *Fourier Integral Operators, I*, Acta Mathematica, giugno 1971.

[2] F. Treves, *An in introduction to pseudodifferntial operators and to Fourier integral operators*, in pubblicazione.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 gennaio 1973.