RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 143-166

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__143_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni.

TULLIO VALENT (*)

SUMMARY - We show that the boundary value problem for the partial differential equations of the elastic equilibrium, in the case of an elastic body with an unilateral supporting constraint without friction, has solutions belonging to an assigned function space if and only il a certain real functional admits minimum in a convenient set of stress. Then we state a sufficient condition that such a functional has minimum.

Il problema dell'equilibrio elastico in presenza di un vincolo unilaterale in superficie si traduce, analiticamente, in un sistema di equazioni alle derivate parziali con condizioni al contorno che A. Signorini ha chiamato « ambigue » (1), in considerazione del fatto che alcune di queste devono essere verificate su una parte del contorno e altre su un'altra parte del contorno disgiunta dalla prima, senza però che si conosca (a priori) quali sono queste due porzioni del contorno.

Si tratta di un problema al contorno di tipo nuovo, nel senso che

---

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica e alla Ingegneria, del C.N.R.

(1) Cfr. [7].

non rientra nelle teorie generali degli ordinari problemi al contorno per le equazioni differenziali.

A. Signorini ha indicato una via per impostare lo studio di questo problema, la quale si basa sulla possibilità di inversione del teorema della minima energia potenziale.

G. Fichera, riferendosi in una sua Memoria (2) (di fondamentale importanza) al caso dell'appoggio unilaterale liscio a supporto rigido, ha trovato una classe di spostamenti nella quale l'energia potenziale ammette minimo.

Però in questa classe di spostamenti non c'è, in generale, equivalenza tra il problema al contorno nella forma data dal Signorini e quello variazionale consistente nel rendere minima l'energia potenziale.

Il Fichera dimostra tuttavia che, assegnando le forze esterne attive in opportuni spazi funzionali, tale equivalenza sussiste purchè il problema al contorno venga formulato in maniera nuova; così egli arriva a stabilire un teorema di esistenza.

G. Grioli (3) ha proposto un'altra via per affrontare il problema in questione: l'idea è di assumere quali incognite fondamentali le componenti dello stress anzichè quelle dello spostamento (il che, tra l'altro, può rivelarsi vantaggioso per la costruzione effettiva della soluzione) e di tradurre il problema al contorno nella ricerca del minimo di un funzionale operante esclusivamente sullo stress, in un opportuno in sieme di stress.

Il presente lavoro si inserisce in questa direzione e prende in considerazione il caso del vincolo d'appoggio unilaterale liscio con supporto rigido.

Innanzitutto si considera una formulazione integrale delle equazioni di equilibrio del tipo di quella considerata da G. Caricato in [1] e dal Signorini stesso in [7]: viene assunto come insieme Γ delle soluzioni ammissibili quello degli stress con componenti cartesiane ortogonali di quadrato sommabile nella regione A occupata dal sistema nella sua configurazione di riferimento e che danno luogo, sulla parte della frontiera di A ove c'è l'appoggio, a reazioni, pure di quadrato sommabile, compatibili con il vincolo.

Facendo talune ipotesi analitiche su A e, in particolare sulle caratteristiche geometriche della superficie d'appoggio, s'è potuto dimostrare che il problema dell'esistenza e dell'unicità, nella classe Γ,

(2) Cfr. [3].
(3) Cfr. [5], [6].

di uno stress che sia «congruente» — ove la congruenza va intesa nel senso generalizzato precisato in [10] — e che dia luogo a spostamenti di cui almeno uno verifichi quasi ovunque le condizioni imposte dal vincolo, si riconduce a quello dell'esistenza del minimo in Γ dell'energia potenziale elastica espressa in funzione dello stress.

È interessante notare che gli spostamenti che si ottengono in corrispondenza dello stress minimizzante l'energia potenziale elastica in Γ appartengono alla stessa classe di vettori nella quale G. Fichera ha dimostrato (cfr. [3]) l'esistenza del minimo dell'energia potenziale espressa nello spostamento: si tratta dell'insieme dei vettori $\boldsymbol{u}$ di quadrato sommabile in A per i quali è definito, nel senso forte di Fridrichs, l'operatore differenziale $\boldsymbol{u} \to \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r})_{r,s=1,2,3}$, risultando $u_{r,s} + u_{s,r}$ di quadrato sommabile in A e tali che la loro traccia sulla porzione di frontiera ove è presente l'appoggio formi un angolo non ottuso con la normale alla frontiera orientata verso l'interno di A.

Nell'ultima parte di questo lavoro si stabilisce una condizione sufficiente per l'esistenza del minimo, in Γ, dell'energia potenziale elastica.

1. Preliminari.

Sia A un aperto connesso e limitato dello spazio reale euclideo tridimensionale R^3, ∂A la sua frontiera e $\boldsymbol{x} = (x_r)$ il punto generico di A o di ∂A.

A sia regolare nel senso che ad esso siano applicabili le formule di Gauss-Green.

Indicheremo con $L^2_R(A)$ e $L^2_R(\partial A)$ l'insieme delle funzioni reali di quadrato sommabile rispettivamente in A e su ∂A, con $C^1_R(\bar{A})$ l'insieme delle funzioni reali continue assieme alle loro derivate parziali prime in $\bar{A}$ (chiusura di A), con $L^2_{R^3}(A)$ e $C^1_{R^3}(\bar{A})$ l'insieme dei vettori a valori in R^3 le cui componenti sono funzioni rispettivamente di $L^2_R(A)$ e di $C^1_R(\bar{A})$.

Con la notazione $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ denoteremo, infine, il completamento funzionale di $C^1_{R^3}(\bar{A})$ rispetto alla norma definita, per ogni $\boldsymbol{u} = (u_r) \in C^1_{R^3}(\bar{A})$, dalla

$$(1) \qquad |||\boldsymbol{u}||| = \left[\sum_{1}^{3}{}_i \int_A u_i^2 d\boldsymbol{x} + \sum_{1}^{3}{}_{i,j} \int_A \left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}\right)^2 d\boldsymbol{x}\right]^{\frac{1}{2}},$$

ove con la virgola s'è indicato il simbolo di derivazione parziale.

I vettori $\boldsymbol{u}$ di $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ sono di quadrato sommabile in A e per essi è definito, nel senso forte di Friedrichs, l'operatore differenziale

$$\boldsymbol{u} \to \left(\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2}\right)_{i,j=1,2,3},$$

risultando $u_{i,j}+u_{j,i} \in L^2_R(A)$ (4).

Ci servirà, nel seguito, che A sia tale per cui sussistano le maggiorazioni

$$\sum_1^3{}_i \int_A e_i^2 d\boldsymbol{x} \leqslant k_1 \sum_1^3{}_{j,i} \int_A \left(\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2}\right)^2 d\boldsymbol{x}\,, \tag{2}$$

$$\sum_1^3{}_i \int_{\partial A} u_i^2 d\sigma \leqslant k_2 |||\boldsymbol{u}|||^2\,, \tag{3}$$

per ogni $\boldsymbol{u} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$, essendo $\boldsymbol{e} = (e_i)$ la « *parte equilibrata in A* » del vettore $\boldsymbol{u}$ (5) e k_1, k_2 due numeri reali dipendenti soltanto da A.

Al primo membro della (3) s'è denotato, per semplicità, la restrizione di u_i su ∂A con lo stesso simbolo u_i.

Tutte queste ipotesi fatte su A sono senz'altro verificate — per esempio — se A è un « *campo I-regolare* » (6); i campi che normalmente interessano le applicazioni sono I-regolari.

I simboli $S_3(R)$ e $S_3(L^2_R(A))$ indicheranno lo spazio vettoriale su R delle matrici simmetriche di ordine 3, rispettivamente su R e su $L^2_R(A)$.

Riferito lo spazio *geometrico* tridimensionale a una prefissata terna cartesiana ortogonale, A rappresenti la configurazione di riferimento, che supponiamo di *equilibrio naturale*, di un corpo elastico.

Supponiamo presente un vincolo di *appoggio unilaterale liscio con supporto rigido*: sia σ_1 la parte di ∂A che (nella configurazione di riferimento) si trova a contatto dell'appoggio.

Poniamo $\sigma_2 = \partial A - \sigma_1$.

Analiticamente, il problema dell'equilibrio elastico, nel caso di « piccole deformazioni », si pone — *in forma differenziale* — nel modo

---

(4) Cfr. [10].

(5) Cfr. [9].

(6) Cfr. [3], pp. 109, 110, 112, 115.

che segue [7].

$$
\left.\begin{aligned}
&(4) \qquad X_{ij,j} = F_i\,, \qquad (X_{ij} = X_{ji}) \\
&(5) \qquad \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = -a_{ijhk}X_{hk}
\end{aligned}\right\} \text{ in } A\,,
$$

$$
(6) \qquad X_{ij}N_j = \begin{cases} \phi N_i\,, \quad (\phi \geqslant 0) & \text{su } \sigma_1\,, \\ f_i & \text{su } \sigma_2\,. \end{cases}
$$

Inoltre, nei punti di σ_1, dev'essere verificata l'una o l'altra delle seguenti coppie di condizioni:

$$
(7) \qquad \begin{cases} u_iN_i = 0\,, \\ \phi > 0\,, \end{cases}
$$

$$
(8) \qquad \begin{cases} u_iN_i \geqslant 0\,, \\ \phi = 0\,. \end{cases}
$$

Le funzioni reali (note) F_i e f_i, $(i = 1, 2, 3)$, sono le componenti, nel riferimento cartesiano ortogonale prefissato, rispettivamente del vettore densità di forza di massa e del vettore densità di forza esterna superficiale assegnato su σ_2; N_j, $(j = 1, 2, 3)$, sono le componenti del versore della normale a ∂A in ogni suo punto regolare, orientata verso l'interno di A; u_i, $(i = 1, 2, 3)$, sono le componenti dell'incognito vettore spostamento; ϕ è la grandezza dell'incognita reazione vincolare su σ_1; X_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$, sono le componenti dello stress; infine le funzioni reali (note) a_{ijhk}, $(i, j, h, k = 1, 2, 3)$, sono tali che $a_{ijhk} = a_{hkij} = a_{hkji}$ e che, detta W la funzione reale definita nel prodotto cartesiano $A \times S_3(R)$ da

$$
W(\boldsymbol{x}, \gamma) = \tfrac{1}{2}a_{ijhk}(\boldsymbol{x})\gamma_{ij}\gamma_{hk}\,, \qquad [\gamma = (\gamma_{rs})]\,,
$$

W è per ogni $\boldsymbol{x} \in A$, (una forma quadratica su $S_3(R)$) *definita positiva.*

$W(\boldsymbol{x}, X) = \frac{1}{2}a_{ijhk}(\boldsymbol{x})X_{ij}X_{hk}$ esprime la densità di energia potenziale elastica nel punto $\boldsymbol{x} \in A$ e in corrispondenza dello stress $X = (X_{rs})$.

Poniamo $\boldsymbol{F} = (F_r)$, $\boldsymbol{f} = (f_r)$, $\boldsymbol{N} = (N_r)$, $\boldsymbol{u} = (u_r)$.

---

[7] È sott'inteso il segno di sommatoria da 1 a 3 su ogni indice ripetuto, in tutto il presente lavoro.

Facciamo l'ipotesi che $\boldsymbol{F}$ sia di quadrato sommabile in A, $\boldsymbol{f}$ sia di quadrato sommabile su σ_2 e che le a_{ijhk} siano funzioni misurabili ed essenzialmente limitate in A.

Supponiamo anche che il sistema di vettori $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{f}$ non sia equilibrato.

2. Una formulazione di tipo integrale delle equazioni di equilibrio.

Come primo passo verso una traduzione debole di tipo integrale del problema in questione, in cui le incognite fondamentali siano le X_{rs}, sostituiamo alle (4), (6) il sistema di (infinite) equazioni integrali

$$\int_A X_{ij} v_{i,j} d\boldsymbol{x} + \int_A F_i v_i d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i d\sigma + \int_{\sigma_2} f_i v_i d\sigma = 0\,, \qquad (\phi > 0)\,. \tag{9}$$

che si ottengono al variare di $\boldsymbol{v} = (v_i)$ in $C^1_{R^3}(\bar{A})$.

Le (9), se $X_{ij} \in C^1_R(\bar{A})$, sono perfettamente equivalenti alle (4), (6), almeno quando $\boldsymbol{F}$ è continuo in A [8].

Indichiamo con Γ *l'insieme degli stress* $X \in S_3(L^2_R(A))$ *che, con una* $\phi > 0$ *di quadrato sommabile su* σ_1, *verificano le* (9) *per ogni* $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$.

Osserviamo che, come conseguenza del fatto che l'insieme delle

---

[8] Le (9), infatti, se $X_{ij} \in C^1_R(\bar{A})$ e se F_i sono funzioni continue, in base alle formule di Green, equivalgono alle

$$\int_A (X_{ij,j} - F_i) v_i d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_1} (X_{ij} N_j - \phi N_i) v_i d\sigma + \int_{\sigma_2} (X_{ij} N_j - f_i) v_i d\sigma = 0\,,$$

le quali, ponendo

$$\psi_i = X_{ij,j} - F_i \quad \text{in } A\,, \qquad \varphi_i \begin{cases} = X_{ij} N_j - \phi N_j & \text{su } \sigma_1 \\ = X_{ij} N_j - f_i & \text{su } \sigma_2\,, \end{cases}$$

si scrivono così:

$$\int_A \psi_i v_i d\boldsymbol{x} + \int_{\partial A} \varphi_i v_i d\sigma = 0\,.$$

Queste ultime sussistono per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$ se e solo se $\psi_i = 0$ quasi ovunque in A e $\varphi_i = 0$ quasi ovunque su ∂A. (Cfr. [4], p. 95).

tracce su σ_1 dei vettori $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$ è denso in $L^2_{R^3}(\sigma_1)$ (normato, questo ultimo, nel modo consueto) ([9]), ad ogni $X \in \Gamma$ resta associata un'unica funzione ϕ verificante le ipotesi appena dette.

Ci sarà utile nel seguito l'aver provato che Γ *coincide con l'insieme degli stress* $X \in S_3\left(L^2_R(A)\right)$ *che, con una* $\phi \geqslant 0$ *di quadrato sommabile su* σ_1, *verificano le* (9) *per ogni* $\boldsymbol{v} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$.

Osserviamo innazitutto che, sussistendo la maggiorazione (3), ogni vettore di $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ può pensarsi definito anche sulla frontiera ∂A di A.

Infatti, in virtù della (3), l'applicazione lineare τ di $C^1_{R^3}(\bar{A})$ in $L^2_{R^3}(\partial A)$, che associa ad ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$ la sua restrizione (traccia) su ∂A, risulta continua qualora si assuma su $C^1_{R^3}(\bar{A})$ la norma $|||\cdot|||$ definita dalla (1) e su $L^2_{R^3}(\partial A)$ la norma naturale di tale spazio, cioè quella che a $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_i) \in L^2_{R^3}(\partial A)$ associa il numero

$$\left[\sum_1^3{}_i \int_{\partial A} \varphi_i^2 d\sigma\right]^{\frac{1}{2}} ;$$

di conseguenza τ è prolungabile a tutto $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ ed il prolungamento continuo, diciamolo $\hat{\tau}$, di τ a $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ definisce la traccia su ∂A di ogni vettore di $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$.

Premesso ciò, supponiamo che la (9) sia verificata, in corrispondenza di uno stress $X \in S_3\left(L^2_R(A)\right)$ e di una $\phi \geqslant 0$ di quadrato sommabile su σ_1, per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$ e dimostriamo che allora la (9) è verificata anche per ogni $\boldsymbol{v} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$.

Se $\boldsymbol{v} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ esiste una successione $\{\boldsymbol{v}^n\}$ in $C^1_{R^3}(\bar{A})$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_1^3{}_i \int_A (v_i^n - v_i)^2 d\boldsymbol{x} = 0 \tag{10}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_1^3{}_{i,j} \int_A \left(\frac{v^n_{i,j} + v^n_{j,i}}{2} - \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2}\right)^2 d\boldsymbol{x} = 0 \,. \tag{11}$$

([9]) $L^2_{R^3}(\sigma_1)$ è l'insieme delle funzioni (vettoriali) a valori in R^3, di cui le componenti sono funzioni di quadrato sommabile su σ_1.

Dalle (10), (11) in virtù della continuità dell'applicazione $\hat{\tau}$, segue

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{1}^{3} {}_i \int_{\partial A} (v_i^n - v_i)^2 d\sigma = 0 ,$$

e quest'ultima implica

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial A} \varphi_i v_i^n d\sigma = \int_{\partial A} \varphi_i v_i d\sigma$$

qualunque sia il vettore $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_i) \in L^2_{R^3}(\partial A)$; in particolare, perciò, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_{\sigma_1} \phi N_i v_i^n d\sigma + \int_{\sigma_2} f_i v_i^n d\sigma \right] = \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i d\sigma + \int_{\sigma_2} f_i v_i d\sigma , \tag{12}$$

atteso che ϕN e f sono, per ipotesi, vettori di quadrato sommabile rispettivamente su σ_1 e su σ_2.

Ancora dalla (10) segue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A F_i v_i^n dx = \int_A F_i v_i dx . \tag{13}$$

Essendo $X_{ij} \in L^2_R(A)$, la (11) porge

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A X_{ij} v_{i,j}^n dx = \int_A X_{ij} v_{i,j} dx . \tag{14}$$

Da (12), (13), (14) si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_A X_{ij} v_{i,j}^n dx + \int_A F_i v_i^n dx + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i^n d\sigma + \int_{\sigma_2} f_i v_i^n d\sigma \right] =$$

$$= \int_A X_{ij} v_{i,j} dx + \int_A F_i v_i dx + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i d\sigma + \int_{\sigma_2} f_i v_i d\sigma ,$$

d'onde la conclusione, essendo (per ipotesi) nulla l'espressione tra parentesi quadra a primo membro, qualunque sia n.

3. Primo legame tra il problema al contorno e quello variazionale.

Diremo che uno *stress* $X \in \Gamma$ è *congruente* se, in corrispondenza di esso, risultano integrabili le (5), potendo — nelle (5) — la derivazione parziale essere intesa in senso generalizzato.

Consideriamo il funzionale $\mathcal{F}$ a valori in R, definito per ogni $X \in S_3(L^2_R(A))$ da

$$\mathcal{F}(X) = \int_A W(\boldsymbol{u}, X)\, d\boldsymbol{u}$$

e facciamo vedere che

I) *Se uno stress X di Γ è congruente e dà luogo a spostamenti $\boldsymbol{u}$ appartenenti a $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ dei quali almeno uno verifica, quasi ovunque su σ_1, le condizioni* (7) *o* (8), *allora X è un punto di minimo — anzi è l'unico punto di minimo — per $\mathcal{F}$ nella classe Γ.*

Sia ϕN la reazione vincolare corrispondente a X tramite le (9).

Ogni altro stress di Γ è del tipo $X + \xi$, ove ξ è un elemento di $S_3(L^2_R(A))$ che verifica le

$$\int_A \xi_{ij} v_{i,j}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\sigma_1} q N_i v_i\, d\sigma = 0 \tag{15}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$, ove q è una funzione di quadrato sommabile su σ_1 tale che $\phi + q \geqslant 0$ su σ_1.

Dalla definizione di $\mathcal{F}$ e da quella di W segue

$$\mathcal{F}(X + \xi) - \mathcal{F}(X) = \int_A a_{ijhk} X_{hk} \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} + \int_A W(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\boldsymbol{x}\,. \tag{16}$$

Per le ipotesi fatte su X, esiste $\boldsymbol{u} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ tale che

$$-a_{ijhk} X_{hk} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } A \tag{17}$$

e verificante le (7) o le (8) su σ_1.

Dalla (17) segue

$$-\int_A a_{ijhk} X_{hk} \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} = \int_A u_{i,j} \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x}$$

per ogni $\xi \in S_3(L_R^2(A))$ e quindi

$$\int_A a_{ijhk} X_{hk} \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\sigma_1} q N_i u_i\, d\sigma \tag{18}$$

per ogni $\xi \in S_3(L_R^2(A))$ verificante le (15), cioè per ogni ξ tale che $X + \xi \in \Gamma$.

Dal fatto, infine, che per $\boldsymbol{u}$ e ϕ sussistano le (7) o le (8), segue

$$\int_{\sigma_1} q N_i u_i\, d\sigma \geqslant 0\ ;$$

pertanto, in base alle (16), (18) e considerando il carattere definito positivo di W per ogni $\boldsymbol{x} \in A$, si conclude che X è un punto di minimo, anzi l'uuico punto di minimo, per $\mathcal{F}$ in Γ.

La proposizione I porge, evidentemente, un teorema di unicità — espresso nello stress — per il problema al contorno (9), (5), (7), (8), ove si imponga l'appartenenza di ϕ a $L_R^2(\sigma_1)$ e di $\boldsymbol{u}$ a $\widehat{C_{R^3}^1(\bar{A})}$.

Nel caso, poi, che non esista alcun vettore $\boldsymbol{\rho} = (\varrho_i)$ del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi tangente a σ_1, (cioè verificante la $\varrho_i N_i = 0$ in ogni punto regolare di σ_1), l'unicità dello stress comporta l'unicità dello spostamento.

4. Equivalenza del problema al contorno con quello variazionale.

Veniamo ora alla parte più interessante di questo lavoro: la possibilità di inversione della proposizione I.

Dimostriamo precisamente che

II) *Nell'ipotesi che σ_1 sia tale che ogni (eventuale) vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ortogonale a $\boldsymbol{N}$ su una porzione di σ_1 risulti ortogonale a $\boldsymbol{N}$ sull'intera σ_1, se $\mathcal{F}$ ammette minimo in Γ, ogni stress minimante è congruente e dà luogo a spostamenti $\boldsymbol{u}$ appartenenti a $\widehat{C_{R^3}^1(\bar{A})}$ dei quali almeno uno soddisfa, quasi ovunque su σ_1, alle condizioni* (7) *o* (8).

Per rendere più sciolta la dimostrazione della proposizione II conviene premettere alcuni lemmi.

a) Fissato comunque $qN \in L^2_{R^3}(\sigma_1)$ *su* σ_1, *purchè ivi equilibrato, esiste* $\xi \in S_3(L^2_R(A))$ *per cui le* (15) *sono vere per ogni* $v \in C^1_{R^3}(\bar{A})$ [e quindi, per quanto s'è dimostrato al n. 2, anche per ogni $v \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$].

Considerati infatti gli operatori lineari M_1: $C^1_{R^3}(\bar{A}) \to L^2_{R^3}(\sigma_1)$, M_2: $C^1_{R^3}(\bar{A}) \to S_3(L^2_R(A))$ definiti, per ogni $v \in C^1_{R^3}(\bar{A})$, dalle

$$M_1(v) = \text{restrizione di } v \text{ su } g_1 ,$$

$$M_2(v) = \left(\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2}\right)_{i,j=1,2,3},$$

e pensando $S_3(L^2_R(A))$ dotato della struttura hilbertiana che si ottiene assumendo il prodotto scalare di due elementi α, β di $S_3(L^2_R(A))$ uguale a, (cfr. [9]),

$$\int_A \alpha_{ij}\beta_{ij}\, dx ,$$

le (15) possono mettersi nella forma

$$(\xi, M_2(v)) = -(qN, M_1(v)) , \tag{19}$$

ove il significato dei simboli è palese.

Il nucleo dell'operatore M_2 è l'insieme — diciamolo $\mathfrak{R}$ — dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.

La norma dell'elemento $[v]$ dello spazio quoziente $L^2_{R^3}(\sigma_1)/M_1(\mathfrak{R})$ è

$$\inf_{r\in\mathfrak{R}} \left[\sum_1^3{}_i \int_{\sigma_1} (v_i + r_i)^2 d\sigma\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_1^3{}_i \int_{\sigma_1} e_i^2 d\sigma\right]^{\frac{1}{2}}$$

ove con e si intende la parte equilibrata su σ_1 del vettore v ([10]).

In base a un noto Teorema generale di esistenza per le equazioni funzionali, di G. Fichera ([11]), si deduce che, assegnato comunque $qN \in L^2_{R^3}(\sigma_1)$ su σ_1, purchè ivi equilibrato, condizione necessaria e sufficiente affinchè le (19), pensate come equazioni nell'incognita ξ, ammettano soluzione in $S_3(L^2_R(A))$ è che esista una costante $k > 0$ tale

([10]) Cfr. [9].

([11]) Cfr. ad esempio [2], p. 105, teorema II.

da aversi

$$\sum_{1}^{3}{}_i \int_{\sigma_1} e_i^2 d\sigma \leqslant k \sum_{1}^{3}{}_{i,j} \int_A \left(\frac{v_{i,j}+v_{j,i}}{2}\right)^2 dx \tag{20}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$, essendo $\boldsymbol{e}$ la parte equilibrata su σ_1 di $\boldsymbol{v}$.

Con ciò il lemma *a*) resta giustificato dal momento che, per le ipotesi fatte su A al n. 1, la maggiorazione (20), nel nostro caso, sussiste.

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema*

$$\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ij}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,,$$

con $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in S_3(L^2_R(A))$, *ammetta soluzioni* (*deboli*) *appartenenti a* $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ *è che risulti*

$$\int_A \varepsilon_{ij} \xi_{ij}\, dx = 0$$

per ogni $\xi \in S_3(L^2_R(A))$ *tale che*

$$\int_A \xi_{ij} v_{i,j}\, dx = 0$$

qualunque sia $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$.

Per la dimostrazione di questo lemma si confronti [10].

c) *Sia* Σ *una superficie di* R^3 *limitata, di area finita, che ammette quasi ovunque* (cioè tranne in un sottoinsieme di misura superficiale nulla) *il piano tangente e sia* $\boldsymbol{N}$ *il versore della normale orientata a* Σ.

Se il vettore $\boldsymbol{u} \in L^2_{R^3}(\Sigma)$ *verifica la*

$$\int_\Sigma q N_i u_i\, d\sigma = 0$$

in corrispondenza di ogni vettore $q\boldsymbol{N}$ *equilibrato su* Σ *e ivi di quadrato sommabile, esiste un vettore* $\boldsymbol{\rho} = (\varrho_i)$ *del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi tale che* $u_i N_i = \varrho_i N_i$ *quasi ovunque su* Σ (12).

---

(12) Questo lemma *c*) può essere accostato al teorema che dimostrai al n. 3 di [8], nel senso che le due proprietà si completano a vicenda.

Colgo qui l'occasione per precisare un'affermazione che si trova nelle ultime righe di [8]. Il teorema del n. 3 di [8], di per sè interessante, è solo parzialmente utilizzabile per dimostrare la possibilità di inversione del teorema di Menabrea nel caso di un vincolo di appoggio unilaterale liscio con supporto rigido, mentre, in [8], scrissi che tale teorema « si presta » a questo scopo.

Per la dimostrazione dell'invertibilità del teorema di Menabrea è invece essenziale questo lemma *c*), come si vedrà nel seguito.

Questo lemma è corollario di un teorema più generale che dimostrai in [9].

d) Sia Σ una superficie del tipo considerato nel lemma c). L'insieme delle funzioni q definite e limitate su Σ e tali che $q\boldsymbol{N}$ sia equilibrato su Σ è denso nell'insieme delle funzioni $q \in L_R^2(\Sigma)$ tali che $q\boldsymbol{N}$ sia equilibrato su Σ, la norma su $L_R^2(\Sigma)$ essendo quella consueta.

Per convincersene si osservi innanzitutto che l'insieme delle funzioni limitate su Σ è denso in $L_R^2(\Sigma)$ ([13]).

Fissiamo $q \in L_R^2(\Sigma)$ tale che $q\boldsymbol{N}$ sia equilibrato su Σ; per ogni δ reale positivo esiste allora una funzione h, limitata su Σ, per cui

$$\int_\Sigma (q-h)^2 \, d\Sigma < \delta \,. \tag{21}$$

Il vettore $h\boldsymbol{N}$ appartiene a $L_{R^3}^2(\Sigma)$; per un teorema che dimostrai in [9], esistono, allora, un vettore $\boldsymbol{\rho} = (\varrho_i)$ del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi e una funzione $p \in L_R^2(\Sigma)$ tale che il vettore $p\boldsymbol{N}$ sia

([13]) $L_R^2(\Sigma)$ è lo spazio hilbertiano delle funzioni reali di quadrato sommabile su Σ, ove il prodotto scalare è quello consueto. Il fatto che l'insieme delle funzioni limitate su Σ è denso in $L_R^2(\Sigma)$ può essere giustificato — semplicemente — nel modo seguente.

Se $q \in L_R^2(\Sigma)$, la successione $\{q^n\}$ di funzioni *limitate* su Σ definite da

$$q^n(\boldsymbol{x}) \begin{cases} = q(\boldsymbol{x}) & \text{ove} \quad |q(\boldsymbol{x})| < n \\ = n & \text{ove} \quad q(\boldsymbol{x}) \geqslant n \\ = -n & \text{ove} \quad q(\boldsymbol{x}) \leqslant -n \end{cases}$$

converge, rispetto alla norma di $L_R^2(\Sigma)$, alla funzione q, cioè risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Sigma [q(\boldsymbol{x}) - q^n(\boldsymbol{x})]^2 \, d\Sigma = 0 \,. \tag{$*$}$$

Basta pensare, infatti, che, per ogni $\boldsymbol{x} \in \Sigma$, si ha

$$|q(\boldsymbol{x}) - q^n(\boldsymbol{x})|^2 \leqslant |q(\boldsymbol{x})|^2,$$

nonché

$$\lim_{n\to+\infty} [q(\boldsymbol{x}) - q^n(\boldsymbol{x})]^2 = 0 \,,$$

d'onde la ($*$) in base al teorema di convergenza di Lebesgue.

equilibrato su Σ, per cui risulta

$$h = p + \varrho_i N_i ;$$

p è senz'altro limitata su Σ in quanto sia h che $\varrho_i N_i$ sono ivi limitate.

Si ha quindi

$$\begin{aligned}(22) \qquad \int_\Sigma (q-h)^2 d\Sigma &= \int_\Sigma (q-p-\varrho_i N_i)^2 d\Sigma = \\ &= \int_\Sigma (q-p)^2 d\Sigma + \int_\Sigma (\varrho_i N_i)^2 d\Sigma - 2\int_\Sigma (q-p) N_i \varrho_i d\Sigma .\end{aligned}$$

Il fatto che $(q-p)\boldsymbol{N}$ è equilibrato su Σ implica, (cfr. [9]),

$$\int_\Sigma (q-p) N_i \varrho_i d\Sigma = 0 .$$

Da (21), (22) segue pertanto

$$\int_\Sigma (q-p)^2 d\Sigma < \delta$$

d'onde la conclusione.

Passiamo ora alla dimostrazione della proposizione II.

$\mathcal{F}$ ammetta minimo in Γ: sia $\overline{X}$ uno stress minimante e $\bar{\phi}$ la determinazione di ϕ che, nelle (9), è associata a $\overline{X}$.

Sia σ_1' la parte di σ_2 ove $\bar{\phi} > 0$; su $\sigma_1'' = \sigma_1 - \sigma_1'$ risulta allora $\bar{\phi} = 0$.

Non è escluso che σ''_1 sia vuota o abbia misura (superficiale) nulla. σ_1', invece, ha senz'altro misura positiva: la misura di σ_1' è nulla solo se $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{f}$ costituiscono un sistema di vettori equilibrato, circostanza, questa, che abbiamo escluso in precedenza.

In base alla (16) risulta

$$(23) \qquad \int_A W(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\boldsymbol{x} - \int_A \bar{\varepsilon}_{ij} \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} \geqslant 0 ,$$

ove s'è posto

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = - a_{ijhk} \overline{X}_{hk} ,$$

per ogni $\xi \in S_3(L_R^2(A))$ che, con una q di quadrato sommabile su σ_1 e tale che $\bar{\phi} + q \geqslant 0$, soddisfa alle (15) scritte per ogni $\boldsymbol{v} \in \widehat{C^1_{R^3}(\overline{A})}$.

Dovendo la (15) sussistere, in particolare, per tutti i vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, i quali sono soluzione delle $v_{i,j} + v_{j,i} = 0$, se ne deduce l'ortogonalità, in media, su σ_1, di $q\boldsymbol{N}$ con ogni vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi e ciò comporta che $q\boldsymbol{N}$ è equilibrato su σ_1 ([14]).

Se $\bar{\xi}$ è uno degli ξ (fissato arbitrariamente) per cui la (23) è valida, la (23) stessa sussiste certamente per ogni $\xi = \lambda\bar{\xi}$, con $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ([15]).

Pertanto la funzione L definita da

$$L(\lambda) = \int_A W(\boldsymbol{x}, \lambda\bar{\xi})\, d\boldsymbol{x} - \int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\, \lambda\bar{\xi}_{ij}\, d\boldsymbol{x} \tag{24}$$

è positiva o nulla per $0 < \lambda \leqslant 1$ e si annulla per $\lambda = 0$; perciò

$$L'(0) = -\int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\xi}_{ij}\, d\boldsymbol{x} \geqslant 0\ .$$

Siccome lo stesso discorso può essere fatto per ogni $\bar{\xi}$ per cui è valida la (23), risulta

$$\int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} \leqslant 0 \tag{25}$$

qualunque sia $\xi \in S_3(L^2_R(A))$ per cui sussistono le (15), scritte per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$, in corrispondenza di una $q \in L^2_R(\sigma_i)$ tale che $\bar{\phi} + q \geqslant 0$ e $q\boldsymbol{N}$ sia equilibrato su σ_1.

Se, in particolare, $\bar{\xi}$ è uno degli ξ che verificano la

$$\int_A \xi_{ij} v_{i,j}\, d\boldsymbol{x} = 0 \tag{26}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$, ogni $\xi = \lambda\bar{\xi}$, con λ arbitrario, verifica le (26) [e quindi le (15) per $q = 0$]. Di conseguenza la funzione L è positiva o nulla per ogni $\lambda \neq 0$ e nulla per $\lambda = 0$, quindi

$$\int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\xi}_{ij}\, d\boldsymbol{x} = 0\ .$$

([14]) Cfr. [9].

([15]) Non è detto, invece, che la (23) sussista per ogni $\xi = \lambda\bar{\xi}$, con λ negativo, dato che, nelle (15), è richiesto che q soddisfi alla $\phi + q \geqslant 0$.

Se ne deduce che

$$\int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\xi_{ij}\,d\boldsymbol{x} = 0 \tag{27}$$

per ogni $\xi \in S_3(L^2_R(A))$ che verifica le (26), scritte per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$.

Da quest'ultimo fatto — considerando che, per le ipotesi fatte sulle funzioni a_{ijhk}, $\bar{\varepsilon}_{ij} \in L^2_R(A)$ — segue in virtù del lemma *b*), che *il sistema*

$$\tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \bar{\varepsilon}_{ij}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,, \tag{28}$$

ammette soluzioni appartenenti a $\widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$.

Sia $\boldsymbol{u} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ una (prefissata) soluzione delle (28). Se $\boldsymbol{\rho}$ è un (arbitrario) vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\rho}$ è anch'esso una soluzione delle (28).

La (25) diventa

$$\int_A \bar{u}_{i,j}\xi_{ij}\,d\boldsymbol{x} \leqslant 0\,. \tag{29}$$

È opportuno ricordare che la (29) sussiste qualunque sia $\xi \in S_3(L^2_R(A))$ per cui valgono le (15), scritte per ogni $\boldsymbol{v} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$, in corrispondenza di qualche $q \in L^2_R(\sigma_1)$ tale che $\bar{\varphi} + q \geqslant 0$ e che $q\boldsymbol{N}$ sia equilibrato su σ_1.

Poichè $\bar{\boldsymbol{u}} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$, da (29) si ricava, avendo presente il lemma *a*),

$$\int_{\sigma_1} qN_i\bar{u}_i\,d\sigma \geqslant 0\,, \tag{30}$$

valida per *ogni* $q \in L^2_R(\sigma_1)$ tale che $\bar{\varphi} + q \geqslant 0$ e che $q\boldsymbol{N}$ sia equilibrato su σ_1.

Scriviamo la (30) nella forma

$$\int_{\sigma_1'} qN_i\bar{u}_i\,d\sigma + \int_{\sigma_2''} qN_i\bar{u}_i\,d\sigma \geqslant 0 \tag{31}$$

e dimostriamo, utilizzando l'ipotesi fatta su σ_1, che *esiste un vettore* $\boldsymbol{\rho}$ *del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi tale che*

$$(\bar{u}_i + \varrho_i)N_i = 0 \tag{32}$$

quasi ovunque su σ_1'.

Poniamo

$$\sigma'_{1,n} = \left\{ x \in \sigma'_1 : \bar{\Phi}(x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}, \qquad (n \text{ numero naturale})\,.$$

I sottoinsiemi $\sigma'_{1,n}$ di σ'_1 sono misurabili qualunque sia n; inoltre, avendo supposto non nulla la misura di σ'_1, esiste un numero naturale n_0 tale che la misura di $\sigma'_{1,n}$ è positiva per ogni $n \geqslant n_0$.

Fissato n, $(n \geqslant n_0)$, si ha, in base alla (30) o alla (31),

$$\int_{\sigma'_{1,n}} q N_i \bar{u}_i \, d\sigma = 0 \tag{33}$$

per ogni $q\boldsymbol{N}$ equilibrato su $\sigma'_{1,n}$ con $q \in L^2_R(\sigma'_{1,n})$ tale che $q \geqslant -1/n$ (su $\sigma'_{1,n}$) e quindi anche per ogni $q\boldsymbol{N}$ equilibrato su $\sigma'_{1,n}$ con q funzione limitata (su $\sigma'_{1,n}$).

In virtù del lemma *d*) la (33) sussiste per *ogni* $q\boldsymbol{N}$ equilibrato su $\sigma'_{1,n}$ con $q \in L^2_R(\sigma'_{1,n})$.

Ciò, per il lemma *c*), implica l'esistenza di un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi — sia $\boldsymbol{\rho}^n = (\varrho^n_i)$ — tale che

$$(\bar{u}_i + \varrho^n_i) N_i = 0$$

quasi ovunque su $\sigma'_{1,n}$.

Facciamo vedere che la (32) sussiste, quasi ovunque su σ'_1, con $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^{n_0}$, cioè che

$$(\bar{u}_i + \varrho^{n_0}_i) N_i = 0 \tag{34}$$

quasi ovunque su σ'_1.

A tale scopo basterà provare che la (34) vale, quasi ovunque su $\sigma'_{1,n}$, qualunque sia n $(\geqslant n_0)$.

Ciò è vero, ovviamente, se la successione $\{\boldsymbol{\rho}^n\}$ è costante. (Il che accade se non esiste alcun vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi tangente a σ_1).

Supponiamo allora che $\{\boldsymbol{\rho}^n\}$ non sia costante e sia t un numero naturale maggiore di n_0 per cui $\boldsymbol{\rho}^t \neq \boldsymbol{\rho}^{n_0}$. Risulta $(\varrho^{n_0}_i - \varrho^t_i) N_i = 0$ quasi ovunque su σ'_{1,n_0} e quindi, a causa dell'ipotesi fatta su σ_1, quasi ovunque su σ_1, d'onde $(\bar{u}_i + \varrho^{n_0}_i) N_i = 0$ quasi ovunque su $\sigma'_{1,t}$ (oltre che su σ'_{1,n_0}), come si voleva dimostrare.

Nello spazio di Hilbert $L^2_{R^3}(\sigma_1)$ ogni vettore equilibrato su σ_1 è ortogonale (in media) a ogni vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ([16]): pertanto la (31) equivale alla

$$\int_{\sigma_1'} qN_i(\bar{u}_i + \varrho_i)\,d\sigma + \int_{\sigma_1''} qN_i(\bar{u}_i + \varrho_i)\,d\sigma \geqslant 0\,,$$

che, in virtù della (32), porge

$$\int_{\sigma_1''} qN_i(\bar{u}_i + \varrho_i)\,d\sigma \geqslant 0 \tag{35}$$

per ogni qN equilibrato su σ_1 con $q \in L_R^2(\sigma_1)$ positiva su σ_1'' e verificante la $\phi + q \geqslant 0$ su σ_1'.

Se ne deduce, come ora vedremo, sfruttando ancora l'ipotesi fatta su σ_1, che, *quasi ovunque su* σ_1'', *risulta*

$$(\bar{u}_i + \varrho_i)N_i \geqslant 0\,. \tag{36}$$

Se σ_1'' ha misura (superficiale) nulla non c'è alcunchè da dire. La misura di σ_1'' sia pertanto positiva.

La deduzione della (36) dalla (35) poggia sul fatto che — in virtù dell'ipotesi ammessa per σ_1 — comunque si fissino due porzioni misurabili e disgiunte di σ_1, ogni vettore parallelo a $\boldsymbol{N}$ definito (e sommabile) su una di queste porzioni è equilibrabile con un vettore parallelo a $\boldsymbol{N}$ definito sull'altra porzione e ivi di quadrato sommabile ([17]).

Supponiamo, per assurdo, che si abbia $(\bar{u}_i + \varrho_i)N_i < 0$ su un sottoinsieme $\bar{\sigma}$ di σ''_1 di misura positiva e sia α un numero reale positivo per cui il sottoinsieme

$$\sigma'_{1,\alpha} = \{\boldsymbol{x} \in \sigma_1' : \bar{\phi}(\boldsymbol{x}) \geqslant \alpha\}$$

di σ_1' ha misura positiva.

Per quanto s'è appena detto, è facile riconoscere che esistono dei vettori $q\boldsymbol{N}$ equilibrati su σ_1, di quadrato sommabile ivi, e tali che $q > 0$ su $\bar{\sigma}$, $|q| \leqslant \alpha$ [e quindi $\bar{\phi} + q \geqslant 0$] su $\sigma'_{1,\alpha}$, $q = 0$ nei rimanenti punti di σ_1.

Se $\bar{q}\boldsymbol{N}$ è un vettore siffatto risulta

$$\int_{\sigma_1''} \bar{q}N_i(\bar{u}_i + \varrho_i)\,d\sigma = \int_{\bar{\sigma}} \bar{q}N_i(\bar{u}_i + \varrho_i)\,d\sigma < 0\,,$$

([16]) Cfr. [9], lemma II.

([17]) Cfr. [8], proposizione (c) del n. 1 e Osservazione di p. 315.

contro l'ipotesi (35). Dunque deve sussistere la (36) quasi ovunque su σ''.

Con ciò resta conclusa la dimostrazione della proposizione II.

La proposizione II costituisce, in realtà, un teorema di esistenza per il problema al contorno (9), (5), (7), (8).

Dalle proposizioni I e II segue che, sussistendo le ipotesi fatte su A (e sulla sua frontiera) e sulle forze attive assegnate, *condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano* $\boldsymbol{u} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ e $\phi \in L^2_R(\sigma_1)$ *verificanti le* (9), (5), (7), (8) *è che il funzionale* $\mathcal{F}$ *ammetta minimo in* Γ.

Se, per giunta, non esiste alcun vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi tangente a σ_1, possiamo affermare che condizione necessaria e sufficiente affinchè esista *uno ed un solo* vettore $\boldsymbol{u} \in \widehat{C^1_{R^3}(\bar{A})}$ che, con una $\phi \in L^2_R(\sigma_1)$, verifica le (9), (5), (7), (8), è che il funzionale $\mathcal{F}$ ammetta minimo in Γ.

5. Una condizione sufficiente per l'esistenza del minimo per il funzionale $\mathcal{F}$ nella classe Γ.

Consideriamo lo spazio vettoriale sui reali $S_3(L^2_R(A))$ [delle matrici simmetriche di ordine 3 su $L^2_R(A)$] già introdotto al n. 2 e atteggiamolo a spazio di Hilbert definendo su di esso il prodotto scalare nel modo seguente [18]:

$$(\alpha, \beta) = \int_A \alpha_{ij}\beta_{ij}\, dx\,; \qquad \alpha, \beta \in S_3(L^2_R(A))\,.$$

La norma su $S_3(L^2_R(A))$ resta perciò definita da

$$\|\alpha\| = \left[\sum_{i,j}^{3} {}_1 \int_A \alpha^2_{ij}\, dx\right]^{\frac{1}{2}}\,; \qquad \alpha \in S_3(L^2_R(A))\,.$$

Supponiamo che esista un numero reale positivo c tale che risulti

(37) $$\mathcal{F}(X) > c\|X\|^2$$

per ogni $X \in \Gamma$.

[18] Cfr. [10].

Osserviamo che *la* (37) *senz'altro sussiste se le funzioni* a_{ijhk} *sono continue in* $\bar{A}$ *e tali che* W *sia, per ogni* $\boldsymbol{x} \in \bar{A}$ (una forma quadratica su $S_3(R)$) *definita positiva.*

Per giustificare l'affermazione facciamo vedere che, se le a_{ijhk} sono del tipo suddetto, esiste un numero reale $c > 0$ per cui, in ogni punto $\boldsymbol{x} \in A$, risulta addirittura

$$W(\boldsymbol{x}, \gamma) \geqslant c \sum_{i,j}^{3} {}_{1} \gamma_{ij}^2$$

per ogni $\gamma = (\gamma_{ij}) \in S_3(R)$: il che implica, ovviamente, il verificarsi della (37).

Se su $S_3(R)$ è definita la norma nel modo seguente:

$$\|\gamma\| = \left[\sum_{1}^{3} {}_{i,j} \gamma_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

l'insieme $\{(\boldsymbol{x}, \gamma) \colon \boldsymbol{x} \in \bar{A}, \sum_{1}^{3}{}_{i,j} \gamma_{ij}^2 = 1\}$ è un compatto dello spazio normato $R^3 \times S_3(R)$, in quanto prodotto cartesiano di un insieme compatto in R^3 e di un insieme compatto in $S_3(R)$; pertanto W, essendo — nelle ipotesi in cui ci siamo posti — ivi continua, vi ammette minimo (assoluto).

Sia c il valore minimo di W in tale insieme: è charamente, $c > 0$ in virtù del fatto che W è, per ogni $\boldsymbol{x} \in \bar{A}$, una forma quadratica definita positiva su $S_3(R)$.

Si ha

$$\inf\left\{\frac{W(\boldsymbol{x}, \gamma)}{\sum_{1}^{3}{}_{i,j} \gamma_{ij}^2} : \boldsymbol{x} \in \bar{A}, \gamma \neq 0\right\} = \inf\left\{W(\boldsymbol{x}, \gamma) \colon \boldsymbol{x} \in \bar{A}, \sum_{1}^{3}{}_{i,j} \gamma_{ij}^2 = 1\right\} = c\,,$$

d'onde la (38).

Nei casi di interesse concreto le funzioni a_{ijhk} sono continue in $\bar{A}$; anzi, spesso sono delle costanti.

Pertanto, nel seguito, supporremo senz'altro vera la (37).

Sia

$$i = \inf_{X \in \Gamma} \mathcal{F}(X)\,.$$

Dimostriamo che

III) *Il funzionale* $\mathcal{F}$ *ammette senz'altro minimo in* Γ *se tra tutte le* *successioni* $\{X^n\}$ *in* Γ *per cui*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(X^n) = i \tag{39}$$

ve n'è (almeno) una tale che la corrispondente successione $\{\phi^n\}$ *in* $L^2_R(\sigma_1)$, *associata alla* $\{X^n\}$ *tramite la* (9), *sia limitata in norma.*

Se i è un punto isolato dell'insieme $\{\mathcal{F}(X)\colon X\in\Gamma\}$ esso è anche il minimo di tale insieme e la proposizione III è vera.

Supponiamo pertanto che i sia un punto di accumulazione per l'insieme $\{\mathcal{F}(X)\colon X\in\Gamma\}$ e sia $\{X^n\}$ una successione in Γ verificante la (39) e tale che, detta $\{\phi^n\}$ la successione associata alla $\{X^n\}$ tramite le (9), la successione $\{\|\phi^n\|_{L^2_R(\sigma_1)}\}$ sia limitata.

Poichè la successione numerica reale $\{\mathcal{F}(X^n)\}$ è convergente, esiste un numero reale $M>0$ per cui

$$\mathcal{F}(X^n) < M$$

per ogni n.

Per la (37) risulta

$$\|X^n\| < \frac{M}{c}$$

qualunque sia n.

La successione $\{X^n\}$ è dunque limitata in norma.

Di conseguenza detta successione ammette una sottosuccessione $\{X^{n_t}\}$ debolmente convergente in $S_3(L^2_R(A))$.

Indichiamo con $X\in S_3(L^2_R(A))$ il limite (debole) della successione $\{X^{n_t}\}$. Si ha, in particolare

$$\lim_{t\to+\infty}\int_A X^{n_t}_{ij} v_{i,j}\,d\boldsymbol{x} = \int_A X_{ij} v_{i,j}\,d\boldsymbol{x} \tag{40}$$

per ogni $\boldsymbol{v}\in C^2_{R^3}(\overline{A})$.

Consideriamo il funzionale lineare reale φ definito nel sottospazio lineare $G=\{g=N_i v_{i|\sigma_1}\colon \boldsymbol{v}\in C^2_{R^3}(\overline{A})\}$ di $L^2_R(\sigma_1)$ da

$$\varphi(g) = \lim_{t\to+\infty}\int_{\sigma_1}\phi^{n_t} g\,d\sigma\,.$$

φ è continuo data la limitatezza della successione $\{\|\phi^{n_t}\|_{L^2_R(\sigma_1)}\}$ e quindi, in base al teorema di Hahn-Banach, è prolungabile a tutto $L^2_R(\sigma_1)$: esiste allora $\phi \in L_R(\sigma_1)$ tale che

$$\int_{\sigma_1} \phi g \, d\sigma = \varphi(g)$$

per ogni $g \in G$, cioè

$$\int_{\sigma_1} \phi N_i v_i d\sigma = \lim_{t\to+\infty} \int_{\sigma_1} \phi^{n_t} N_i v_i d\sigma \tag{41}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^3}(\bar{A})$.

Risulta, inoltre, quasi ovunque $\phi \geqslant 0$.

Infatti: se fosse $\phi < 0$ in un sottoinsieme $\bar{\sigma}$ di σ_1 di misura positiva, detto $\boldsymbol{w}$ un vettore di $C^1_{R^3}(\bar{A})$ tale che $N_i w_i > 0$ su $\bar{\sigma}$ e $N_i w_i = 0$ su $\sigma_1 - \bar{\sigma}$, si avrebbe

$$\int_{\sigma_1} \phi w_i N_i d\sigma < 0 \ ,$$

mentre, d'altra parte, risulterebbe, essendo $\phi^{n_t} \geqslant 0$,

$$\int_{\sigma_1} \phi w_i N_i d\sigma = \lim_{t\to+\infty} \int_{\sigma_1} \phi^{n_t} w_i N_i d\sigma \geqslant 0 \ .$$

In base alle (40), (41) e al fatto che $\phi \geqslant 0$, X appartiene a Γ.

Proviamo che

$$i = \mathcal{F}(X) \ . \tag{42}$$

A tale scopo osserviamo che — è facile riconoscerlo — risulta

$$\mathcal{F}(X - X^{n_t}) = \mathcal{F}(X) - \int_A a_{ijhk} X_{ij} X^{n_t}_{hk} d\boldsymbol{x} + \mathcal{F}(X^{n_t}) \ .$$

Notiamo inoltre che, essendo $\{X^{n_t}\}$ convergente debolmente a X

ed essendo $(a_{ijhk}X_{ij})_{h,k=1,2,3}$ un elemento di $S_3(L_R^2(A))$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty}\int_A a_{ijhk}X_{ij}X_{hk}^{n_t}dx=\int_A a_{ijhk}X_{ij}X_{hk}dx=2\mathcal{F}(X)\,.$$

Di conseguenza

$$\lim_{t\to+\infty}\mathcal{F}(X-X^{n_t})=\lim_{t\to+\infty}\mathcal{F}(X^{n_t})-\mathcal{F}(X)=i-\mathcal{F}(X)\,. \tag{43}$$

Ponendo mente al fatto che, per l'appartenenza di X a Γ, dev'essere

$$i-\mathcal{F}(X)\leqslant 0$$

e che, d'altra parte, deve aversi

$$\lim_{t\to+\infty}\mathcal{F}(X-X^{n_t})\geqslant 0\,,$$

da (43) si deduce la (42).

Dunque X è un punto di minimo per $\mathcal{F}$ in Γ.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Caricato, ***Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato anisotropo e non omogeneo con stress iniziale.*** Note I e II, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, **44** (1968).

[2] G. Fichera, ***Sul concetto di problema « ben posto » per un'equazione differenziale***, Rend. di Mat. e delle sue Appl., serie V, **19** (Roma, 1960).

[3] G. Fichera, ***Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno***, Atti della Acc. Naz. dei Lincei (Memorie), serie VIII, **7** (1964).

[4] G. Grioli, ***Mathematical theory of elastic equilibrium***, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1962.

[5] G. Grioli, ***Problemi d'integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'elastostatica***, Atti del Simposio Internazionale sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cagliari-Sassari, 28 settembre-4 ottobre 1964, Ed. Cremonese, (Roma, 1965).

[6] G. Grioli, ***Sistemi a trasformazioni reversibili***, in ***Non linear continuum theories***, C.I.M.E., Ed. Cremonese, (Roma, 1966).

[7] A. Signorini, *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata*, Rend. di Mat. e delle sue Appl., serie V, **18** (Roma, 1959).
[8] T. Valent, *Qualche proprietà e applicazione di sistemi di vettori definiti su una superficie*, Rend. Sem. Mat., (Padova, 1968).
[9] T. Valent, *Una decomposizione di uno spazio hilbertiano avente interesse e significato in Meccanica*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, **52** (1972).
[10] T. Valent, *Sulla forma integrale delle condizioni di congruenza per le deformazioni di un sistema continuo*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, **52** (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 novembre 1972.