RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

W. STREB

Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 127-142

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__127_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 50 (1973)

Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen.

W. Streb (*)

Jennings [4; Theorem 1, p. 595] hat gezeigt, daß jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring ein niles Kommutatorideal R' besitzt. Da die Klasse der Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen die Klasse der Ringe mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen umfaßt, erhebt sich die Frage, ob auch jeder Ring mit auflösbarem assoziierten Lie-Ring ein niles Kommutatorideal besitzt. Hierzu zeigen wir:

Es gibt eine endliche Algebra A der Charakteristik 2, die

$$e \circ \big((d \circ c) \circ (b \circ a)\big) = 0$$

für alle $a, b, c, d, e \in A$ erfüllt, jedoch kein niles Kommutatorideal A' besitzt.

Hierbei sei für Elemente r und s und Teilmengen A und B eines Ringes R:

$$s \circ r := sr - rs\,,$$

$$B \circ A := \big(b \circ a \vert b \in B \text{ und } a \in A\big)\,.$$

Dagegen gilt: Jeder schwach hyperkommutative Ring R besitzt ein niles Kommutatorideal R'. Erfüllt R die Maximalbedingung für Ideale, so ist R' nilpotent.

Hierbei heiße ein Ring R schwach hyperkommutativ, wenn $2r \neq 0$ für alle $r \in R$ mit $r \neq 0$, und jedes nicht kommutative epimorphe

(*) Indirizzo dell'A.: Henri-Dunant-Str. 65 - Gesamt Hochschule, Fachbereich 6, Mathematik - D-43 Essen, Germania Occ.

Bild S von R eine Teilmenge M enthält, so daß

$$S \circ M \subseteq |M|, \quad M \circ M \neq 0 \quad \text{und} \quad (M \circ M) \circ (M \circ M) = 0 .$$

Die Klasse der schwach hyperkommutativen Ringe umfaßt die Klasse der Ringe R mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen, welche die Bedingung $2r \neq 0$ für alle $r \in R$ mit $r \neq 0$ erfüllen.

Während nach [9; Beispiel] Bedingungen an die Charakteristik eines Ringes alleine nicht ausreichen, damit ein lokalnilpotenter Ring hyperkommutativ [6; S. 401] ist, ist jeder schwach hyperkommutative Ring R mit Primzahlcharakteristik $p \neq 2$ hyperkommutativ.

Über Ringe R der Charakteristik 0 zeigen wir:

R ist nilpotent genau dann, wenn R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt und in R ein Gesetz $g(x) = 0$ [5; S. 562] gilt, welches nicht in die Nullform übergeht, wenn man in jedem Potenzprodukt [5; S. 560] die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet.

Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement gilt:

R ist kommutativ genau dann, wenn R ein Z_2-Ring ist.

R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt und Z_3-Ring ist.

R besitzt ein nilpotentes Kommutatorideal R' genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß ${}^nR = 0$ [6; S. 400] und R ein Z_4-Ring ist.

R ist ein Ring endlicher Klasse [3; p. 343] genau dann, wenn R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt und Z_3-und Z_4-Ring ist.

Hierbei sei Z_2 bzw. Z_3 der Ring der Matrizen

$$\begin{pmatrix} d & a & b \\ 0 & d & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen a, b, c und d und Z_4 die kanonische Erweiterung der in [7; S. 137] angegebenen Algebra A über dem Ring R der ganzen Zahlen zu einer Algebra mit Einselement.

Ein Ring R heiße Z_i-Ring genau dann, wenn in R ein nicht in Z_i gültiges Gesetz gilt.

Über schwach hyperkommutative Ringe R mit Einheitengruppe G zeigen wir: Jedes epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen kommutativen oder ordnungsfiniten Normalteiler.

Bezüglich der hier nicht eigens verabredeten Bezeichnungen verweise ich auf [6; S. 399-401 und 8; Einleitung]. Folgende Ergänzung ist notwendig:

Ist M Teilmenge eines Ringes R und n natürliche Zahl, so sei

$$nM := (nr \mid r \in M).$$

Beispiel 1. Die von einem beliebigen kommutativen nicht nilen Ring R der Charakteristik 2 erzeugte Algebra A_R der 2-2-Matrizen erfüllt

$$e \circ ((d \circ c) \circ (b \circ a)) = 0 \tag{a}$$

für alle $a, b, c, d, e \in A_R$, besitzt jedoch kein niles Kommutatorideal.

Beweis. Man rechnet unmittelbar nach:

$$b \circ a = \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d \circ c = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix},$$

wobei $r, s, t, u, v, w \in R$, also

$$(d \circ c) \circ (b \circ a) = \begin{pmatrix} vt - sw & 2(su - rv) \\ 2(rw - tu) & sw - tv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

mit $x \in R$. Nun folgt unmittelbar (a).

Da R nicht nil ist, besitzt R wenigstens ein nicht nilpotentes Element f. Das Kommutatorideal $(A_R)'$ ist nicht nil, da

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}\right]^n = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & -f \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f^n & 0 \\ 0 & f^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Für R kann speziell der Primkörper der Charakteristik 2 gewählt werden.

Lemma 1. Sei M Teilmenge des Ringes R. Aus

$$M \circ (R \circ M) = 0 \quad \text{folgt} \quad 2\{r \circ a\}^2 = 0$$

für alle $a \in M$ und $r \in R$.

Beweis. Sei $a \in M$ und $r, s, t \in R$. Aus

$$2(s \circ a)(r \circ a) = \big(a \circ (s \circ a)\big)r + s\big(a \circ (r \circ a)\big) - a \circ (sr \circ a) = 0$$

folgt $2(r \circ a)^2 = 0$ und

$$2(r \circ a)t(r \circ a) = 2(r \circ a)(tr \circ a) - 2(r \circ a)(t \circ a)r = 0 .$$

Lemma 2. Sei M Teilmenge des Ringes R. Aus

$$R \circ (M \circ M) = 0 \qquad \text{und} \qquad R \circ \big(M \circ (R \circ M)\big) = 0$$

folgt

$$2\{b \circ a\}^3 = 0$$

für alle $a, b \in M$.

Beweis. Seien $a, b \in M$. Die Behauptung folgt wegen $R \circ (M \circ M) = 0$ unmittelbar aus

$$2(b \circ a)^3 = b \circ \big(b \circ (a^2 b \circ a)\big) - a\Big(b \circ \big(b \circ (ab \circ a)\big)\Big) - \big(b \circ (b \circ a)\big)(ab \circ a) - \\ - 2(b \circ a)a\big(b \circ (b \circ a)\big) = 0 .$$

Lemma 3. Ist R schwach hyperkommutativ, so gibt es zu jedem Ideal A mit $A \subset R'$ ein Ideal B, so daß $A \subset B \subseteq R'$ und $2B^3 \subseteq A$.

Beweis. Zu dem nicht kommutativen epimorphen Bild $S := R/A$ von R gibt es eine Teilmenge N, so daß

$$S \circ N \subseteq |N| , \qquad N \circ N \neq 0 \qquad \text{und} \qquad (N \circ N) \circ (N \circ N) = 0 .$$

Nach [6; Lemma 7.(2).(a), S. 404] angewendet auf $A := B := N$ und $R := S$ gilt $S \circ (N \circ N) \subseteq |N \circ N|$, also

$$(a) \qquad (N \circ N) \circ \big(S \circ (N \circ N)\big) \subseteq (N \circ N) \circ \big(|N \circ N|\big) = 0 .$$

Weiterhin gilt

$$(b) \qquad S \circ \big(N \circ (S \circ N)\big) \subseteq S \circ \big(N \circ |N|\big) = 0 , \qquad \text{falls } S \circ (N \circ N) = 0 .$$

Wir treffen eine Fallunterscheidung:

(c) Ist $S \circ (N \circ N) \neq 0$, so wählt man $r \in S$ und $a \in N \circ N$, so daß $r \circ a \neq 0$ und setzt $C := \{r \circ a\}$. Da für $M := N \circ N$ und $R := S$ wegen (a) die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt sind, ist $2C^3 \subseteq 2C^2 = 0$. Wählt man das Ideal B so, daß $C = B/A$, so gilt für B die Behauptung.

(d) Ist $S \circ (N \circ N) = 0$, so wählt man $a, b \in N$ mit $b \circ a \neq 0$ und setzt $C := \{b \circ a\}$. Da für $M := N$ und $R := S$ wegen (b) die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt sind, gilt $2C^3 = 0$. Wählt man das Ideal B so, daß $C = B/A$, so gilt für B die Behauptung.

Satz 1. Jeder schwach hyperkommutative Ring R besitzt ein niles Kommutatorideal R'.

Beweis. Sei A maximales Element der Menge

$$(J | J \text{ niles Ideal von } R,\ J \subseteq R') .$$

Wir führen die Annahme $A \subset R'$ zum Widerspruch. Nach Lemma 3 gibt es ein Ideal B von R mit $A \subset B \subseteq R'$ und $2B^3 \subseteq A$. Für jedes Element b von B ist $2b^3$ als Element von A nil. Also gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $2^n b^{3n} = (2b^3)^n = 0$. Es folgt $b^n = 0$. Im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von A ist B nil.

Satz 2. Jeder schwach hyperkommutative Ring R, der die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, besitzt ein nilpotentes Kommutatorideal R'.

Beweis. Sei A maximales Element der Menge

$$(J | J \text{ nilpotentes Ideal von } R,\ J \subseteq R') .$$

Wir führen die Annahme $A \subset R'$ zum Widerspruch. Nach Lemma 3 gibt es ein Ideal B von R mit $A \subset B \subseteq R'$ und $2B^3 \subseteq A$. Da A nilpotent ist, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $2^n B^{3n} \subseteq (2B^3)^n \subseteq A^n = 0$. Es folgt $B^{3n} = 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von A.

Satz 3. Jeder schwach hyperkommutative Ring R mit Primzahlcharakteristik $p \neq 2$ ist hyperkommutativ.

Beweis. Sei S nicht kommutatives epimorphes Bild von R. Für alle $s \in S$ folgt aus $2s = 0$ stets $s = ps - 2((p-1)/2)s = 0$. Nach

Lemma 3 gibt es ein von 0 verschiedenes Ideal B von S mit $B \subseteq S'$, so daß $2B^3 = 0$, also $B^3 = 0$. Demnach ist R' hypernilpotent in R und nach [6; Satz 6, S. 407] R hyperkommutativ.

Satz 4. Jeder Ring R mit auflösbarem assoziierten Lie-Ring, der die Bedingung $2r \neq 0$ für alle $r \in R$ mit $r \neq 0$ erfüllt, besitzt ein lokalnilpotentes Kommutatorideal R'.

Beweis. Sei $R_0 := R$ und $R_{i+1} := R_i \circ R_i$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen i. Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $R_n = 0$. Wir haben zu zeigen: Zu jeder endlichen Teilmenge M von R' gibt es natürliche Zahlen p und q, so daß $2^p M^q = 0$. Auf Grund der Voraussetzung über die Charakteristik von R folgt unmittelbar $M^q = 0$. Wegen $R_n = 0$ reicht es zu zeigen:

(a) Für $1 \leqslant i \leqslant n-1$ gilt: Ist M Untermodul von $\{R_i\}$ mit endlicher Basis, so gibt es natürliche Zahlen p und q, so daß $2^p M^q \subseteq \{R_{i+1}\}$.

Sei M Untermodul von $\{R_i\}$ mit endlicher Basis. Es gibt eine endliche Teilmenge N von R_i, so daß $M \subseteq \{N\}$. Anwendung von Lemma 2 auf $M := R_{i-1} + \{R \circ R_i\}/\{R \circ R_i\}$ und $R := R/\{R \circ R_i\}$ liefert $2\{r\}^3 \subseteq \subseteq \{R \circ R_i\}$ für alle $r \in N$. Also gibt es eine natürliche Zahl k, so daß $2\{N\}^k \subseteq \{R \circ R_i\}$. Wegen $M \subseteq \{N\}$ folgt $2M^k \subseteq \{R \circ R_i\}$.

Sei $P := 2M^k$. Da P Modul mit endlicher Basis ist, gibt es eine endliche Teilmenge Q von $R \circ R_i$, so daß $P \subseteq \{Q\}$. Anwendung von Lemma 1 auf $M := R_i + \{R_{i+1}\}/\{R_{i+1}\}$ und $R := R/\{R_{i+1}\}$ liefert $2\{s\}^2 \subseteq \subseteq \{R_{i+1}\}$ für alle $s \in Q$. Also gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $2\{Q\}^m \subseteq \{R_{i+1}\}$. Wegen $P \subseteq \{Q\}$ folgt $2P^m \subseteq \{R_{i+1}\}$. Insgesamt folgt ($a$).

Satz 5. Für die Einheitengruppe G eines schwach hyperkommutativen Ringes R gilt: Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild $V = G/N$ von G besitzt einen von 1 verschiedenen kommutativen oder ordnungsfiniten Normalteiler.

Beweis. Ist V kommutativ, so sind wir fertig. Sei also V nicht kommutativ und C maximales Element der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } R,\ J^G \subseteq N)\,.$$

$S := R/C$ ist nicht kommutativ, da aus $R' \subseteq C$ folgen würde, daß $G' \subseteq (R')^G \subseteq C^G \subseteq N$, also V kommutativ wäre. Demnach ist

$$A := C \cap R' \subset R'\,.$$

Nach Lemma 3 gibt es ein Ideal B von R mit

$$A \subset B \subseteq R' \quad \text{und} \quad 2B^3 \subseteq A\,, \quad \text{also auch } B \not\subseteq C\,.$$

Man setzt $D := B$ bzw. $D := B^2$, je nachdem, ob $B^2 \subseteq C$ oder $B^2 \not\subseteq C$. Dann gilt

$$D \not\subseteq C\,, \quad D \subseteq R' \quad \text{und} \quad 2D^2 \subseteq C\,.$$

Wir treffen eine Fallunterscheidung: Das Kompositum von Normalteilern U und W von G sei mit UvW bezeichnet.

(a) Gilt $(C + D)^2 \subseteq C$, so ist

$$h \bullet g = 1 + h^{-1}g^{-1}(h - 1 \circ g - 1) \in C^G \subseteq N$$

für alle $g, h \in (C + D)^G$, also $\big((C + D)^G vN\big)/N$ kommutativ. Aus $D \not\subseteq C$ folgt $C \subset C + D$, also wegen der Maximaleigenschaft von C auch $N \subset (C + D)^G vN$.

(b) Gilt dagegen $(C+D)^2 \not\subseteq C$, so ist $C \subset C + D^2$, also $N \subset (C + D^2)^G vN$. Aus $2D^2 \subseteq C$ folgt $2(C + D^2) \subseteq C$. Wegen $D^2 \subseteq R'$ ist D^2 nach Satz 1 nil. Sei $1 + c + d \in (C + D^2)^G$ mit $c \in C$ und $d \in D^2$. Da D^2 nil ist, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $d^n = 0$. Es folgt

$$(1 + c + d)^{2^n} \equiv (1 + d)^{2^n} \equiv 1 + d^{2^n} \equiv 1 \text{ modulo } C\,,$$

also $(1 + c + d)^{2^n} \in C^G \subseteq N$. Insgesamt folgt, daß $\big((C + D^2)^G vN\big)/N$ ordnungsfinit ist.

Im folgenden Teil der Untersuchung benütze ich wesentlich die Ergebnisse von Specht [5]. In Abänderung der Notation [5; S. 583] sei

$$x_i \circ x_j := x_i x_j - x_j x_i \quad \big(= [x_i, x_j]\big)$$

für Unbestimmte x_i und x_j. Wir definieren folgende Formenmengen [5; S. 560]:

$$\boldsymbol{M}_1 := (x_1 \circ x_2)\,,$$

$$\boldsymbol{M}_3 := \big((x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4)\big)\,,$$

$$\boldsymbol{M}_4 := \big((x_1 \circ x_2) \circ x_3\big)$$

$$\boldsymbol{M}_2 := \boldsymbol{M}_3 \cup \boldsymbol{M}_4\,.$$

Weiter sei F der Formenring [5; S. 560], F^* der erweiterte Formenring [5; S. 563],

T_1 das von M_1 erzeugte T-Ideal [5; S. 565],

T_i das von M_i erzeugte T^*-Ideal [5; S. 565] für $2 \leqslant i \leqslant 4$,

$F_1 := F/T_1$ und $F_i := F^*/T_i$ für $2 \leqslant i \leqslant 4$.

F_i ist Ring vom Typus T_i [5; S. 562]. Wir nennen einen Ring R der Charakteristik 0 F_i-Ring, wenn in R wenigstens ein nicht in F_i gültiges Gesetz gilt.

Lemma 4. Für Formen $f(x)$ ist gleichwertig:

(1) $f(x) = 0$ ist nicht Gesetz in F_1.

(2) $f(x)$ geht nicht in die Nullform über, wenn man in jedem Potenzprodukt die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet.

Beweis. Erfüllt $f(x)$ die Bedingung (2) nicht, so ist $f(x) = 0$ Gesetz in jedem kommutativen Ring, also auch in F_1. Demnach folgt (2) aus (1). Genügt andererseits $f(x)$ der Forderung (2), so ist $f(x) = 0$ nicht Gesetz im kommutativen Ring der ganzen Zahlen, also auch nicht in F_1. Somit folgt (1) aus (2).

Lemma 5. Für jeden Ring R der Charakteristik 0 ist gleichwertig:

(1) R ist F_1-Ring.

(2) Es gibt eine natürliche Zahl m, so daß für jedes $r \in R$ in $\langle r \rangle$ ein nicht in F_1 gültiges Gesetz $g_r(x) = 0$ der Dimension m_r [5; S. 562] mit $m_r \leqslant m$ gilt.

(3) R ist beschränkt nil.

(4) Es gibt natürliche Zahlen m und n, so daß $nM^m = 0$ für jede Teilmenge M mit $M \circ M = 0$ jedes epimorphen Bildes S von R.

Beweis. Aus (1) folgt unmittelbar (2). Aus (2) folgt (3):

(a) Nach [5; Satz 3, S. 568] und dem zum Beweis dieses Satzes verwendeten Verfahren zur Herleitung mehrfach linearer Gesetze [5; S. 567] gilt für jedes $r \in R$ in $\langle r \rangle$ ein nicht in F_1 gültiges mehrfach lineares Gesetz $h_r(x) = 0$ der Dimension n_r mit $n_r \leqslant m$.

(b) Indem man die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet entsteht aus $h_r(x)$ das im kommutativen Ring $\langle r\rangle$ gültige Gesetz $p_r \prod_{i=1}^{n_r} x_i = 0$, wobei nach Lemma 4 $p_r \neq 0$.

(c) Da R die Charakteristik 0 besitzt folgt $r^m = 0$ für alle $r \in R$.

Aus (3) folgt (1), da mit dem kommutativen Ring der ganzen Zahlen auch F_1 nicht beschränkt nil ist.

Aus (1) folgt (4): Zu (a) analoge Überlegungen erbringen, daß in R und damit auch in S ein nicht in F_1 gültiges mehrfach lineares Gesetz gilt. (b) entsprechende Überlegungen liefern wegen $M \circ M = 0$ die Behauptung.

Aus (4) folgt (3): Man wendet (4) auf die einelementigen Teilmengen (r) von R an und beachtet, daß R die Charakteristik 0 besitzt.

Satz 6. Für Ringe R der Charakteristik 0 ist gleichwertig

(1) R ist nilpotent.

(2) R besitzt einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring und es gibt eine natürliche Zahl n, so daß für jedes $r \in R$ in $\langle r\rangle$ ein Gesetz $g_r(x) = 0$ der Dimension n_r mit $n_r \leqslant n$ gilt, welches nicht zur Nullform wird, wenn man in jedem Potenzprodukt die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet.

Beweis. Aus (1) folgt unmittelbar (2). Aus (2) folgt (1): Sei $R_0 := R$ und $R_{i+1} := R_i \circ R_i$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen i. Wegen $R_i \circ R_i \subseteq \{R_{i+1}\}$ gibt es unter Berücksichtigung von Lemma 4 nach Lemma 5 natürliche Zahlen p und q, so daß $q(R_i)^p \subseteq \{R_{i+1}\}$. Mit $R \circ R_i \subseteq |R_i|$ folgt $q\{R_i\}^p \subseteq \{R_{i+1}\}$. Da R die Charakteristik 0 und einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt gilt (1).

Unmittelbar aus [5; Satz 3, S. 568, Satz 9, S. 576 und Satz 15, S. 584] folgt

Lemma 6. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement folgt (2) aus (1) für $2 \leqslant i \leqslant 4$:

(1) In R gilt ein nicht in F_i gültiges Gesetz $g(x) = 0$ der Dimension m.

(2) Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n \leqslant m$, so daß in R ein nicht in F_i gültiges Gesetz $f(x) = \sum n_j f_j(x) = 0$ gilt, wobei alle Formen $f_j(x)$ normierte Kommutatorprodukte in n Unbestimmten und n_j ganze Zahlen sind.

Satz 7. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) Für alle $r, s \in R$ ist $\langle 1, r, s\rangle$ F_2-Ring.

(2) R ist kommutativ.

(3) Für alle $r, s \in R$ ist $\langle 1, r, s\rangle$ Z_2-Ring.

Beweis. Aus (1) folgt (2): Da in F_2 die Gesetze

$$(a) \qquad (x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4) = 0 \quad \text{und} \quad (x_1 \circ x_2) \circ x_3 = 0$$

gelten, ist bei Anwendung von Lemma 6 auf $i = 2$ notwendig $n = 2$. Da $x_1 \circ x_2$ das einzige normierte Kommutatorprodukt in zwei Unbestimmten ist, ist $\langle 1, r, s\rangle$ für alle $r, s \in R$ und damit R kommutativ.

Aus (2) folgt (3), da Z_2 nicht kommutativ ist.

Aus (3) folgt (1), da in Z_2 die Gesetze (a) gelten.

Aus Satz 7 folgt unmittelbar

Korollar 1. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) R ist F_2-Ring.

(2) R ist kommutativ.

(3) R ist Z_2-Ring.

Insbesondere besitzen F_2 und Z_2 den gleichen Typus.

Satz 8. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) Es gibt eine natürliche Zahl d, so daß für alle $r, s \in R$ in $\langle 1, r, s\rangle$ ein nicht in F_3 gültiges Gesetz $g_{rs}(x) = 0$ der Dimension d_{rs} mit $d_{rs} \leqslant d$ gilt.

(2) R erfüllt die beschränkte Engelbedingung.

(3) Es gibt eine natürliche Zahl d, so daß für alle $r, s \in R$ in $\langle 1, r, s\rangle$ ein nicht in Z_3 gültiges Gesetz $g_{rs}(x) = 0$ der Dimension d_{rs} mit $d_{rs} \leqslant d$ gilt.

BEWEIS. Aus (1) folgt (2): Nach Lemma 6 gilt für $r, s \in R$ in $S := \langle 1, r, s \rangle$ ein nicht in F_3 gültiges Gesetz

$$(a) \qquad f(x) = \sum n_i f_i(x) + \sum m_i g_i(x) = 0 \, ,$$

wobei $f_i(x)$ normierte Kommutatorprodukte in n Unbestimmten mit $n \leqslant d$ sind, welche wenigstens zwei aufbauende (höhere) Kommutatorfaktoren [5; S. 583] besitzen, $g_i(x)$ normierte (höhere) Kommutatoren in n Unbestimmten und n_i und m_i ganze Zahlen sind. Mit Hilfe von

$$(b) \qquad \Big(\Big(\big((x_1 \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}\big) \ldots \circ x_{i_k}\Big) \circ x_{i_{k+1}}\Big) \ldots \circ x_{i_n} =$$

$$\Big(\Big(\big((x_1 \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}\big) \ldots \circ x_{i_{k+1}}\Big) \circ x_{i_k}\Big) \ldots \circ x_{i_n} +$$

$$(c) \qquad \Big(\big((x_1 \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}\big) \ldots \circ (x_{i_k} \circ x_{i_{k+1}})\Big) \ldots \circ x_{i_n} \, .$$

werde die Darstellung (a) folgendermaßen abgeändert:

Die Formen g_i sind paarweise verschiedene normierte (höhere) Kommutatoren der Gestalt (b) mit $i_3 < i_4 < \ldots < i_n$. Die Formen $f_i(x)$ sind normierte Kommutatorprodukte mit wenigstens zwei (höheren) Kommutatorfaktoren oder Formen der Gestalt (c), wobei $k > 2$.

Da in F_3 alle Gesetze $f_i(x) = 0$ gelten, gibt es wenigstens eine von Null verschiedene ganze Zahl m_j. Für die Form g_j der Gestalt (b) kann o.B.d.A. $i_2 = 2$ angenommen werden. Da durch die Substitutionen

$$x_i \to x_1 \quad \text{für } i \neq 2 \text{ und } x_2 \to x_1 \circ x_2$$

das in S gültige Gesetz $f(x) = 0$ in ein wiederum in S gültiges Gesetz übergeht und alle Formen in der abgeänderten Darstellung (a) von $f(x)$ bis auf

$$g_j = \big((x_1 \circ (x_1 \circ x_2)) \circ x_1\big) \ldots \circ x_1 = \Big(\big((x_2 \circ x_1) \circ x_1\big) \circ x_1\Big) \ldots \circ x_1$$

zu Nullformen werden, gilt in S das Gesetz $g_j(x) = 0$.

Die Durchführung dieser Überlegungen für alle $r, s \in R$ erbringt, daß R die d-te Engelbedingung erfüllt.

Aus (2) folgt (3): Wegen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt Z_3 die beschränkte Engelbedingung nicht.

Aus (3) folgt (1), da in Z_3 das Gesetz $(x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4) = 0$ gilt.
Man folgert sofort aus Satz 8

KOROLLAR 2. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) R ist F_3-Ring.

(2) R erfüllt die beschränkte Engelbedingung.

(3) R ist Z_3-Ring.

Insbesondere besitzen F_3 und Z_3 den gleichen Typus.
Mit [2; Theorem 1, p. 9] folgt aus Satz 8 und Korollar 2

SATZ 9. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement und auflösbaren assoziierten Lie-Ringen ist gleichwertig:

(1) R ist Z_3-Ring.

(2) R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

(3) Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß für alle $r, s \in R$ in $\langle 1, r, s\rangle$ ein nicht in Z_3 gültiges Gesetz $g_{rs}(x) = 0$ Der Dimension n_{rs} mit $n_{rs} \leq n$ gilt.

LEMMA 7. Für eigentlich $2n$-fach lineare Formen $g(x)$ ist gleichwertig:

(1) $g(x) \notin F_4$.

(2) $g(x) \equiv m \prod_{i=1}^{n} (x_{2i-1} \circ x_{2i})$ modulo T mit $m \neq 0$.

(3) $g(x) \notin Z_4$.

Insbesondere besitzen F_4 und Z_4 den gleichen Typus.
Hierbei sei T das eindeutig bestimmte kleinste Ideal des Formenringes F, welches die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

$$(x_1 \circ x_2) \circ x_3 \in T\,.$$

Gehört die Form $g(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ zu T, so gehört auch die Form $h(x) = g\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)\big)$ zu T, die aus $g(x)$ durch die formalen Substitutionen $x_i \to f_i(x)$ für $1 \leqslant i \leqslant l$ mit beliebigen Formen $f_i(x)$ aus F erhalten wird.

Beweis. Es gilt

$$g(x) = \sum n_i g_i(x) + \sum m_i f_i(x) ,$$

wobei $g_i(x)$ normierte Kommutatorprodukte in $2n$ Unbestimmten sind, welche nur Kommutatorfaktoren der Länge 2 besitzen, $f_i(x)$ normierte Kommutatorprodukte in $2n$ Unbestimmten sind, welche wenigstens einen Kommutatorfaktor der Länge 3 besitzen und n_i und m_i ganze Zahlen sind. Es folgt unmittelbar

$$g(x) \equiv \sum n_i g_i(x) \text{ modulo } T .$$

Wegen

$$(x_j \circ x_k)(x_p \circ x_q) = -(x_j \circ x_p)(x_k \circ x_q) + (x_j \circ x_p) \circ (x_k \circ x_q) + \\ + (x_j \circ x_k x_p) \circ x_q - \big((x_j \circ x_k) \circ x_q\big) x_p - x_k\big((x_j \circ x_p) \circ x_q\big)$$

und

$$(x_j \circ x_k) = -(x_k \circ x_j)$$

können in jedem $g_i(x)$ zwei beliebige formal benachbarte Unbestimmte bei gleichzeitigem Wechsel des Vorzeichens von n_i modulo T vertauscht werden. Hierdurch wird insgesamt (2) erreicht, wobei $m \neq 0$ wegen $T \subseteq T_4$:

Aus (2) folgt (3): Nach [7; S. 137] gilt $g(x)$ nicht in Z_4, da der Typus von Z_4 das Ideal T umfaßt.

Da in Z_4 das Gesetz $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = 0$ gilt, folgt unmittelbar (1) aus (3).

Lemma 8. Für jeden Ring R mit ${}^2R = 0$ gilt $\{{}_2R\}^2 = 0$.

Beweis. Seien $a, b, c, e, f, g, h \in R$. Indem man in

$$(a \circ b)(c \circ d) = (a \circ bc) \circ d - (b \circ d)(a \circ c) - \big((\alpha \circ b) \circ d\big) c - b\big((a \circ c) \circ d\big)$$

für b bzw. d die Kommutatoren $e \circ f$ bzw. $g \circ h$ einsetzt folgt

$$\big(a \circ (e \circ f)\big)\big(c \circ (g \circ h)\big) = 0 .$$

Satz 10. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) Das Kommutatorideal R' von R ist nilpotent.

(2) Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß ${}^{k}R = 0$ und R ist Z_4-Ring.

Beweis. (2) folgt unmittelbar aus (1). Aus (2) folgt (1): Alle folgenden Überlegungen gelten für $0 \leqslant i \leqslant k-2$: Nach Lemma 8 ist $({}_2({}^iR))^2 \subseteq \{{}^{i+2}R\}$. Nach [6; Lemma 7.(3), S. 404] ist $R \circ_2 ({}^iR) \subseteq |{}_2({}^iR)|$ und deshalb weiter

$$(a) \qquad \{{}_2({}^iR)\}^2 \subseteq \{{}^{i+2}R\} .$$

Nach Lemma 6 gilt in R ein eigentlich mehrfach lineares nicht in F_4 gültiges Gesetz $g(x) = 0$, welches Linearkombination von normierten Kommutatorprodukten ist. Da für eine ungerade Anzahl von Unbestimmten jede Linearkombination von Kommutatorprodukten Gesetz in F_4 ist, muß die Anzahl $2n$ der Unbestimmten von $g(x)$ gerade sein. Nach Lemma 7 gilt

$$g(x) = m \prod_{i=1}^{n} (x_{2i-1} \circ x_{2i}) + f \text{ mit } f \in T \text{ und } m \neq 0 .$$

Also gilt für jeden Unterring S von R $m(S')^n \subseteq S''$. Speziell gilt $m({}^{i+1}R)^n \subseteq \{{}_2({}^iR)\}$, also wegen $R \circ ({}^{i+1}R) \subseteq |{}^{i+1}R|$

$$(b) \qquad m\{({}^{i+1}R)\}^n \subseteq \{{}_2({}^iR)\} .$$

Aus (a) und (b) folgt

$$m^2\{({}^{i+1}R)\}^{2n} \subseteq \{{}^{i+2}R\} .$$

Da R die Charakteristik 0 besitzt und ${}^{k}R = 0$ gilt, ist R' nilpotent.

Satz. 11. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) R ist Ring endlicher Klasse.

(2) R besitzt einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring und R ist Z_3- und Z_4-Ring.

Beweis. (a) Nach [3; Theorem 6.5, S. 353 und Theorem 5.6, S. 350] ist R Ring endlicher Klasse genau dann, wenn R' nilpotent ist und R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt.

Nach den Sätzen 9 und 10 folgt mit (*a*) aus (1) unmittelbar (2).

Aus (2) folgt (1): Nach Satz 9 besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Nach [4; Theorem 1, S. 595] ist R'' nilpotent. Also gibt es eine natürliche Zahl k, so daß ${}^kR = 0$. Nach Satz 10 ist R' nilpotent. Insgesamt folgt wegen (*a*) die Behauptung.

Beispiel 2. Wir bezeichnen mit $\beta(i_1, i_2, \dots, i_n)$ das Vorzeichen der Permutation $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ i_1, & i_2, & \dots, & i_n \end{pmatrix}$. Gilt in einem Ring R ein n-fach lineares Gesetz

$$\sum_{i=1}^{n!} n_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = 0$$

mit $\sum_{i=1}^{n!} n_i \beta(i_1, i_2, \dots, i_n) \neq 0$, so ist R ein Z_4-Ring, wie man unmittelbar nachprüft.

Da nach [1; Lemma 2.35, p. 117] jede Algebra der Dimension $n-1$ über einem Körper F der Charakteristik 0 der Standardidentität

$$(a) \qquad \sum \beta(i_1, i_2, \dots, i_n) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$$

genügt, ist jede dieser Algebren Z_4-Ring. Hierbei wird in (*a*) über alle Permutationen von $(1. 2, \dots, n)$ summiert.

LITERATUR

[1] I. N. Herstein, *Theory of rings*, University of Chicago, Mathematics Lecture Notes, Spring, 1961.

[2] P. J. Higgins, *Lie-Rings satisfying the Engelcondition*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 50.

[3] S. A. Jennings, *Central chains of ideals in an associative ring*, Duke Mathematical Journal, vol. 9, pp. 341-355.

[4] S. A. Jennings, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53, pp. 593-597.

[5] W. Specht, *Gesetze in Ringen, I*, Mathematische Zeitschrift, Band 52, S. 557-589.

[6] W. Streb, *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLIV, S. 399-409.
[7] W. Streb, *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLVI, S. 137-139.
[8] W. Streb, *Über Ringe, die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLVII.
[9] W. Streb, *Über die Endlichkeit niler Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLVIII.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 ottobre 1972.