RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. SALCE

Classi di gruppi abeliani chiuse rispetto alle immagini omomorfe ed ai limiti proiettivi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 49 (1973), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 49 (1973)

Classi di gruppi abeliani chiuse rispetto alle immagini omomorfe ed ai limiti proiettivi.

L. SALCE (*)

In [1], L. Fuchs ha posto i seguenti problemi, uno duale dell'altro: determinare le classi di gruppi abeliani chiuse rispetto a: 1) sottogruppi e limiti iniettivi; 2) immagini omomorfe e limiti proiettivi. P. Hill ha dato in [2] una soluzione del primo problema. In questa nota diamo la soluzione del secondo.

Diremo che una classe di gruppi abeliani è ($\leftarrow$) chiusa se è chiusa rispetto alle immagini omomorfe ed ai limiti proiettivi. Indicheremo con $\mathfrak{A}$ la classe di tutti i gruppi abeliani e con $\mathfrak{D}$ la classe dei gruppi abeliani divisibili. D'ora in poi, salvo esplicita menzione, con la parola gruppo intenderemo gruppo abeliano. Indicheremo con: Z il gruppo degli interi; $Z(n)$ il gruppo ciclico di ordine n; $Z(p^\infty)$ il gruppo di Prüfer relativo al numero primo p; $\hat{Z}_p$ il gruppo additivo degli interi p-adici; Q_p il gruppo additivo del corpo dei numeri p-adici; N l'insieme dei numeri naturali; P l'insieme dei numeri primi. Per ogni gruppo G, $T(G)$ indica il sottogruppo di torsione di G, G_p la componente p-primaria di $T(G)$, $\hat{G}$ il completamento naturale di G.

Un primo risultato che semplifica molto il problema è dato dalla seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Una classe ($\leftarrow$) chiusa che contiene un gruppo non di esponente finito coincide con* $\mathfrak{A}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Premettiamo i seguenti lemmi:

LEMMA 1 ([1], Esempio 1, pag. 62). *Sia* $\{G_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di gruppi e* $\mathcal{C}$ *una classe* $(\leftarrow)$ *chiusa. Se per ogni sottoinsieme finito* F *di* I *risulta* $\sum_{i\in F} G_i \in \mathcal{C}$, *allora* $\prod_{i\in I} G_i \in \mathcal{C}$.

Se w è un numero cardinale, indichiamo con $\sum_w G$ e $\prod_w G$ rispettivamente la somma ed il prodotto diretto di w copie del gruppo G.

COROLLARIO 1. *Se* $\mathcal{C}$ *è una classe* $(\leftarrow)$ *chiusa di spazi vettoriali su un corpo* K, *e se per ogni* $n \in N$, $\mathcal{C}$ *contiene uno spazio di dimensione* n, *allora* $\mathcal{C}$ *è la classe di tutti gli spazi vettoriali su* K.

Infatti per il lemma 1, $\prod_w K \in \mathcal{C}$ per ogni numero cardinale w, e, poichè $\sum_w K$ è un addendo diretto di $\prod_w K$, $\sum_w K \in \mathcal{C}$.

LEMMA 2 ([1], Esercizio 2, pag. 64). *Sia* N *dotato dell'ordine naturale. Sia* $\{A_i, \pi_j^i\}$ $(i, j \in N; i \geqslant j)$ *il sistema inverso così definito*: $A_i = Z(p^\infty)$, $\forall i \in N$; $\pi_j^i(x) = p^{i-j}\, x (x \in A_i)$. *Allora* $\varprojlim A_i = Q_p$.

LEMMA 3. *Z è limite proiettivo di gruppi divisibili.*

Mostriamo che Z si ottiene come intersezione di una catena strettamente decrescente e infinita (quindi come limite proiettivo) di sottogruppi divisibili del gruppo: $Q \oplus \sum_{i\in N} A_i$, dove $A_i = Z(2^\infty)$, $\forall i \in N$. Chiamiamo a_i il primo generatore di A_i. Per ogni $i \in N$ si ha: $2a_i = 0$. Consideriamo i sottogruppi di $Q \oplus \sum_{i\in N} A_i$:

$$H_1 = \langle 1, \{1/2! + a_i\}_{i\geqslant 1}, \{1/3! + a_i/3\}_{i\geqslant 1}, \dots, \{1/n! + a_i/3\cdot 4 \dots n\}_{i\geqslant 1}, \dots\rangle$$

$$H_2 = \langle 1, \{1/2! + a_i\}_{i\geqslant 2}, \{1/3! + a_i/3\}_{\geqslant 2}, \dots, \{1/n! + a_i/3\cdot 4 \dots n\}_{i\geqslant 2}, \dots\rangle$$

....

$$H_j = \langle 1, \{1/2! + a_i\}_{i\geqslant j}, \{1/3! + a_i/3\}_{i\geqslant j}, \dots, \{1/n! + a_i/3\cdot 4 \dots n\}_{i\geqslant j}, \dots\rangle$$

....

È chiaro che $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_j \supseteq \dots$, e che ogni H_j è divisibile perchè ogni generatore è divisibile per ogni intero. Inoltre $\bigcap_j H_j = \langle 1 \rangle = Z$.

COROLLARIO 2. *Ogni gruppo libero è limite proiettivo di gruppi divisibili.*

Sia $F = \sum_w Z$. Nelle notazioni precedenti sia $B = \sum_w \left(Q \oplus \sum_{i\in N} A_i\right)$.

Poniamo: $K_1 = \sum_w H_1$; $K_2 = \sum_w H_2$; ...; $K_j = \sum_w H_j$; ....

Risulta: $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_j \supseteq \ldots$, ogni K_j è divisibile e $\bigcap_j K_j = \sum_w Z = F$.

Dimostrazione della proposizione 1:

Sia G il gruppo non di esponente finito che appartiene alla classe $(\leftarrow)$ chiusa $\mathfrak{C}$. Se G non è ridotto, per un opportuno $p \in P$, $Z(p^\infty)$ è immagine omomorfa di G e quindi sta in $\mathfrak{C}$. Se G è ridotto distinguiamo due casi:

a) G è di torsione. Ne segue ([1], 40.3) che G non è completo nella topologia naturale. Se φ è l'omomorfismo canonico di G in $\hat{G}$, $\hat{G}/\varphi(G)$ è divisibile, diverso da 0 e sta in G. Esiste allora un $p \in P$ tale che $Z(p^\infty) \in \mathfrak{C}$.

b) G non è di torsione. Si ha ([1], 39.8): $\hat{G} = (T(G))^\wedge \oplus (G/T(G))^\wedge$. $(G/T(G))^\wedge$ è libero da torsione, quindi contiene un addendo diretto isomorfo a $\hat{Z}_p$ per qualche $p \in P$. Perciò anche in questo caso esiste un $p \in P$ tale che $Z(p^\infty) \in \mathfrak{C}$.

In ogni caso dunque, $Z(p^\infty) \in \mathfrak{C}$ per qualche $p \in P$. Dal lemma 2 segue che $Q_p \in \mathfrak{C}$. Ma $Q_p \cong \sum_c Q$ $(c = 2^{\aleph_0})$, perciò $\mathfrak{C}$ contiene, per il corollario 1, $\sum_w Q$ per ogni numero cardinale w. Poichè ogni gruppo divisibile è immagine omomorfa di $\sum_w Q$ per qualche numero cardinale w, si ha che $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$. Ma allora, per il corollario 2, $\mathfrak{C}$ contiene tutti i gruppi liberi e quindi $\mathfrak{C} = \mathfrak{U}$.

L'intersezione di una famiglia di classi $(\leftarrow)$ chiuse è $(\leftarrow)$ cifusa. Ciò consente di parlare di classi $(\leftarrow)$ chiuse generate da una famiglia di gruppi. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di gruppi, indichiamo con $\langle\{A_i\}_{i\in I}\rangle$ la classe $(\leftarrow)$ chiusa generata dalla famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$. Si hanno le nozioni di classi $(\leftarrow)$ chiuse cicliche e finitamente generate. Per la proposizione 1, il problema si riduce alla ricerca delle classi che contengono solo gruppi di esponente finito. Tuttavia non ogni classe $(\leftarrow)$ chiusa generata da gruppi di esponente fiinito è diversa da $\mathfrak{U}$, come mostra la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2. *Se* $\mathfrak{C}$ *è una classe* $(\leftarrow)$ *chiusa tale che per un* $p \in P$, *per ogni* $n \in N$, $\mathfrak{C}$ *contiene un* p*-gruppo di esponente finito* G_n *tale che* $p^n G_n \neq 0$, *allora* $\mathfrak{C} = \mathfrak{U}$.

Infatti G_n è somma diretta di p-gruppi ciclici, tra i quali ce ne è uno del tipo $Z(p^k)$, con $k \geqslant n$. Quindi $\mathcal{C}$ contiene, per ogni $n \in N$, un gruppo del tipo $Z(p^k)$, con $k \geqslant n$. Ne segue che $\varprojlim Z(p^k) = \hat{Z}_p \in \mathcal{C}$, quindi $\mathcal{C} = \mathcal{U}$.

Diremo che una famiglia $\{G_i\}_{i \in I}$ di gruppi è limitata se esiste un intero positivo n tale che $nG_i = 0$, per ogni $i \in I$. Per quanto visto nella proposizione 2, una classe $(\leftarrow)$ chiusa di p-gruppi andrà cercata tra le classi limitate. Un esempio è dato dalla classe di tutti i p-gruppi di esponente finito e $\leqslant$ di p^n, per un fissato $n \in N$, che è generata da $\sum_{\aleph_0} Z(p^n)$.

I risultati che seguono sono analoghi a quelli ottenuti da P. Hill in [2] per il problema duale.

PROPOSIZIONE 3. *Se* $\mathcal{C} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ *è una classe* $(\leftarrow)$ *chiusa finitamente generata,* $\mathcal{C} = \langle A_1 \rangle \cup \langle A_2 \rangle \cup \ldots \cup \langle A_n \rangle$.

Se $n = 1$ la proposizione è banale. Supponiamola vera per $n - 1$. È chiaro che $\langle A_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle A_n \rangle \subseteq \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$. Se un gruppo X è limite proiettivo di un sistema inverso $\{X_i, \pi_j^i\}$ $(i, j \in I; i \geqslant j)$, in cui ogni gruppo X_i appartiene ad una classe $\langle A_k \rangle$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, sia J un sottoinsieme cofinale di I tale che, se $j \in J$, $X_j \in \langle A_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle A_{n-1} \rangle$. Se ciò non è possibile, sia J cofinale con I e tale che, se $j \in J$, $X_j \in \langle A_n \rangle$. In ogni caso, poichè $\varprojlim X_j = \varprojlim X_i$ $(j \in J, i \in I)$, si ha: $X \in \langle A_1, \ldots, A_{n-1} \rangle \cup \cup \langle A_n \rangle = \langle A_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle A_{n-1} \rangle \cup \langle A_n \rangle$.

PROPOSIZIONE 4. *Una classe* $(\leftarrow)$ *chiusa di p-gruppi* $\mathcal{C}$ *è finitamente generata.*

Per quanto visto nella proposizione 2, $\mathcal{C}$ deve essere limitata da un intero positivo del tipo p^n $(p \in P, n \in N)$. Ragioniamo per induzione su n. Per $n = 1$ si ha una classe $(\leftarrow)$ chiusa di spazi vettoriali su Z/pZ. Una tale classe coincide o con la classe di tutti gli spazi vettoriali su Z/pZ, generata da $\sum_{\aleph_0} Z/pZ$, o con la classe di tutti gli spazi vettoriali su Z/pZ di dimensione minore od uguale ad un intero positivo m, che è generata da $\sum_{m} Z/pZ$ ed è $(\leftarrow)$ chiusa. Infatti è ovviamente chiusa rispetto alle immagini omomorfe; se poi $\{A_i, \pi_j^i\}$ è un sistema inverso $(i, j \in I; i \geqslant j)$, con A_i spazio vettoriale su Z/pZ di dimensione $\leqslant m$ per ogni $i \in I$, mostriamo che $A = \varprojlim A_i$ è pure uno spazio vettoriale di dimensione $\leqslant m$. Supponiamo che A sia di dimensione maggiore di m. Sia π_i la proiezione canonica di A in A_i; se $i \geqslant j$

risulta: $\mathrm{Ker}\,\pi_i \leqslant \mathrm{Ker}\,\pi_j$. Per $i \geqslant$ di un opportuno i_0, deve essere $\mathrm{Ker}\,\pi_i = \mathrm{Ker}\,\pi_{i_0}$, perchè altrimenti per qualche indice i si avrebbe che $A/\mathrm{Ker}\,\pi_i$ è di dimensione maggiore di m. Esiste quindi un sottoinsieme di I, J, cofinale con I e tale che, se $j \in J$, $\mathrm{Ker}\,\pi_j = \mathrm{Ker}\,\pi_{i_0}$. Poichè $\mathrm{Ker}\,\pi_{i_0}$ è diverso da 0 e $\varprojlim A_j = \varprojlim A_i$ $(j \in J, i \in I)$, non può essere $A = \varprojlim A_i$ perchè, per $j \in J$, π_j si fattorizza secondo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\pi_j"'] & A/\mathrm{Ker}\,\pi_{i_0} \arrow[r] & A_j \end{tikzcd}$$

È quindi assurdo supporre che la dimensione di A sia maggiore di m.

Sia ora $\mathcal{C}$ una classe $(\leftarrow)$ chiusa di p-gruppi di esponente finito e $\leqslant p^{n+1}$. Se $\mathcal{C}$ è la classe di tutti i gruppi di questo tipo, allora $\mathcal{C} = \left\langle \sum_{\aleph_0} Z(p^{n+1}) \right\rangle$. Infatti, per il lemma 1, $\prod_w Z(p^{n+1}) \in \mathcal{C}$ per ogni numero cardinale w. Essendo $\sum_w Z(p^{n+1})$ addendo diretto di $\prod_w Z(p^{n+1})$, appartiene a $\mathcal{C}$. Ogni p-gruppo di esponente finito e $\leqslant p^{n+1}$ è immagine omomorfa di $\sum_w Z(p^{n+1})$ per qualche w, e quindi sta in $\mathcal{C}$.

Se $\mathcal{C}$ non è la classe di tutti i p-gruppi di esponente fiinito e $\leqslant p^{n+1}$ esiste un $r \in N$ tale che $\sum_{r+1} Z(p^{n+1}) \notin \mathcal{C}$, mentre $\sum_r Z(p^{n+1}) \in \mathcal{C}$. Definiamo delle classi di p-gruppi $\mathfrak{D}_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ in questo modo:

$$\mathfrak{D}_i = \left\{ G \mid p^n G = 0 \ \text{ e } \ G \oplus \sum_i Z(p^{n+1}) \in \mathcal{C} \right\}.$$

Si verifica facilmente che le classi $\mathfrak{D}_i$ sono $(\leftarrow)$ chiuse; essendo tali classi p^n-limitate, per l'ipotesi di induzione sono finitamente generate. Se $\mathfrak{D}_i = \langle \{A_{ij}\}_{j \in F_i} \rangle$, con F_i insieme finito, si ha:

$$\mathcal{C} = \left\langle \left\{ A_{ij} \oplus \sum_i Z(p^{n+1}) \right\}_{ij} \right\rangle \qquad (1 \leqslant i \leqslant r,\ j \in F_i)\,.$$

Segue che $\mathcal{C}$ è finitamente generata.

Per quanto visto nelle proposizioni 3 e 4, le classi $(\leftarrow)$ chiuse di p-gruppi saranno completamente determinate non appena si caratterizzino le classi $(\leftarrow)$ chiuse cicliche di p-gruppi. Diamo a tal fine la seguente:

Definizione. Fissata una k-pla di numeri, interi non negativi o ∞: $(n_1, \dots, n_k)$, con $n_k \neq 0$, indichiamo con $\mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$ la classe dei p-gruppi del tipo $\sum_{i=1}^{k} \sum_{m_i} Z(p^i)$ tali che: $\sum_{i=t}^{k} m_i \leqslant \sum_{i=t}^{k} n_i$, per ogni t tale che $1 \leqslant t \leqslant k$, dove gli m_i sono numeri cardinali.

Si intende che per ogni numero cardinale m, $m < \infty$; se $n \in N$, $n + \infty = \infty + \infty = \infty$.

Proposizione 5. *Le classi del tipo* $\mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$ *sono* $(\leftarrow)$ *chiuse e cicliche. Viceversa, una classe di p-gruppi* $(\leftarrow)$ *chiusa e ciclica è del tipo* $\mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$.

Si verifica facilmente che $\mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$ è chiusa rispetto alle immagini omomorfe. Se poi $\{A_j, \pi_h^j\}$ $(j, h \in J; j \geqslant h)$ è un sistema inverso, con $A_j \in \mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$ $\forall j \in J$, sia $\varprojlim A_j = A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r_i} Z(p^i)$, con gli r_i numeri cardinali. Se $A \notin \mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$ esiste un t compreso tra 1 e k per cui si ha: $\sum_{i=t}^{k} r_i > \sum_{i=t}^{k} n_i$. Sia t_0 il massimo t per cui è valida la precedente relazione. Poniamo $A_0 = \sum_{i=t_0}^{k} \sum_{r_i} Z(p^i)$. Per ogni $j \in J$ detta π_j la proiezione canonica di A in A_j, risulta: $\operatorname{Ker}\pi_j \cap A_0 \neq 0$. Posto $B_j = \operatorname{Ker}\pi_j \cap A_0$ esiste un j_0 tale che, per $j \geqslant j_0$, si ha: $B_j = B_{j_0}$, perchè $\sum_{i=t_0}^{k} n_i$ è finito. Ma allora non sarebbe $A = \varprojlim A_j$, perchè, per ogni $j \geqslant j_0$, $\pi_j\colon A \to A_j$ si fattorizza secondo il diagramma commutativo: $\underbrace{A \to A/B_{j_0} \to A_j}_{\pi_j}$. Quindi $A \in \mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$. Tale classe è ovviamente ciclica, generata dal gruppo $\sum_{i=1}^{k} \sum_{n'_i} Z(p^i)$, dove $n'_i = n_i$ se $n_i \in N$ $n'_i = \aleph_0$ se $n_i = \infty$. Viceversa se $\mathcal{C}$ è una classe $(\leftarrow)$ chiusa ciclica di p-gruppi generata da $A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n'} Z(p^i)$, con k intero positivo e gli n'_i numeri cardinali, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p(n_1, \dots, n_k)$ dove $n_i = n'_i$ se $n'_i \in N$, $n_i = \infty$ se $n'_i \geqslant \aleph_0$.

Dalle proposizioni 3, 4 e 5 segue che le classi $(\leftarrow)$ chiuse di p-gruppi sono $\aleph_0$. Passando al caso generale, si ottiene ancora una semplice caratterizzazione delle classi $(\leftarrow)$ chiuse cicliche:

Proposizione 6. *Una classe* $(\leftarrow)$ *chiusa ciclica diversa da* $\mathcal{U}$, $\mathcal{C} = \langle A \rangle$, *è del tipo*: $\left\{G = \sum_p G_p \mid G_p \in \langle A_p \rangle\right\}$.

A è un gruppo di esponente finito, quindi del tipo: $A = \sum_{p_i \in F} A_{p_i}$, con $F = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ sottoinsieme finito di P. Posto $\mathcal{B} = \left\{G = \sum_p G_p \mid G_p \in \langle A_p \rangle\right\}$, si verifica facilmente che $\mathcal{B}$ è $(\leftarrow)$ chiusa, perciò $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Se $G \in \mathcal{B}$, $G_{p_1} \oplus \sum_{i=2}^{n} A_{p_i} \in \mathcal{C}$, $G_{p_1} \oplus G_{p_2} \oplus \sum_{i=3}^{n} A_{p_i} \in \mathcal{C}$, ecc.; segue che $G \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Non tutte le classi $(\leftarrow)$ chiuse sono finitamente generate; ad esempio non è finitamente generata la classe $\langle \{Z(p)\}_{p\in P} \rangle$ dove p percorre tutto P. La caratterizzazione delle classi $(\leftarrow)$ chiuse diverse da $\mathcal{U}$ è data, nel caso generale, dalla:

PROPOSIZIONE 7. *Una classe $(\leftarrow)$ chiusa è diversa da $\mathcal{U}$ se e solo se è generata da una famiglia di gruppi finiti $\{A_i\}_{i\in I}$ soddisfacenti alla seguente proprietà: detto E l'insieme degli esponenti dci gruppi A_i, E non è cofinale con nessuna sottocatena infinita di N, ordinato col seguente preordine filtrante: $m \leqslant n$ se e solo se m divide n.*

Se $\mathcal{C} \neq \mathcal{U}$ e $G \in \mathcal{C}$, G è di esponente fiinito. G è generato da gruppi finiti e quindi tale è $\mathcal{C}$. Sia $\mathcal{C} = \langle \{A_i\}_{i\in I} \rangle$. Se E è cofinale con una sottocatena infinita di N, o $\hat{Z}_p \in \mathcal{C}$ per qualche $p \in P$, o $\prod_{p\in R} Z(p) \in \mathcal{C}$, con R sottoinsieme infinito di P, e tali gruppi non sono di esponente fiinito. Viceversa sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi finiti con la proprietà detta. È ovvio che l'esponente di una immagine omomorfa di un gruppo A_i è divisore dell'esponente di A_i. Se A è limite proiettivo di un sistema inverso $\{A_j, \pi_h^j\}$ $(j, h \in J, j \geqslant h)$, con $A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$ $\forall j \in J$, A è di esponente fiinito ed ancora il suo esponente è divisore di quello di un A_j per un opportuno $j \in J$. Segue che, se $G \in \langle \{A_i\}_{i\in I} \rangle$, G è di esponente finito ed il suo esponente è divisore di quello di qualche A_i $(i \in I)$. Perciò $\mathcal{C} \neq \mathcal{U}$.

Dalla proposizione 7 segue che le classi $(\leftarrow)$ chiuse sono al più $2^{\aleph_0}$ Per provare l'esistenza di $2^{\aleph_0}$ classi $(\leftarrow)$ chiuse distinte basta osservare che, se P_1 e P_2 sono due sottoinsiemi distinti di P, le classi: $\langle \{Z(p)\}_{p\in P_1} \rangle$ e $\langle \{Z(p)\}_{p\in P_2} \rangle$ sono distinte.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. FUCHS, *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, New York, 1970.

[2] P. HILL, *Classes of Abelian groups closed under taking subgroups and direct limits*, Universal Algebra 1/1, 1971.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 maggio 1972.