Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Fulvio Mora

Permanenza di proprietà nella henselizzazione degli anelli non noetheriani

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 49 (1973), p. 137-156

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__137_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 49 (1973)

Permanenza di proprietà nella henselizzazione degli anelli non noetheriani.

FULVIO MORA (*)

SUMMARY - Given a pair $(A,\mathfrak{m})$, A a commutative ring, $\mathfrak{m}$ an ideal of A, we prove that, if A is a locally unibranch ring and $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$, the henselization of A is a domain if and only if A is a domain and $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$ is connected (th. 2.11). From this it follows that ${}^hA$ is a domain if and only if A is a domain and $\mathrm{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ is connected, where $\bar{A}$ is the integral closure of A in its total ring of fractions (th. 2.13). This extends a well known result on local unibranch rings, and allows us to define « Unibranch » pair. At the end, after some remarks about unique factorization domains, we apply the above results to the factoriality of henselization.

Introduzione.

In questo lavoro ci proponiamo di studiare alcune proprietà della henselizzazione di un anello nel caso che esso non sia noetheriano, estendendo alcuni dei risultati provati da S. Greco (cfr. [4] e [8]) per gli anelli noetheriani.

Nel n. 1 si studiano le proprietà degli spazi topologici irriducibili da cui si deduce che un anello A con un numero finito di primi minimali è integro se e solo se è localmente integro e $\mathrm{spec}(A)$ è connesso (prop. 1.11).

(*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Durante la preparazione del presente lavoro, l'A. ha fruito di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi.

Nel n. 2 si applicano i risultati ottenuti alla henselizzazione, provando, dapprima, che se A è un anello *localmente unibranche* (in particolare normale) la sua henselizzazione rispetto a un ideale $\mathfrak{m}$ contenuto nel radicale, è integra se e solo se A è integro e $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso (teor. 2.11); si elimina quindi l'ipotesi « A localmente unibranche » dando condizioni più deboli sulla chiusura integrale di A nell'anello totale delle frazioni (teor. 2.13). Si elimina infine anche la condizione $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$ (teor. 2.14).

Il teor. 2.13 permette di dare una definizione di *Coppia Unibranche* che estende il concetto di anello locale unibranche: tale nozione viene poi applicata per estendere un risultato di [9] sull'henselizzazione di un anello a fibre formali geometricamente normali (teor. 2.20).

Nel n. 3, dopo alcune osservazioni sugli anelli fattoriali e localmente fattoriali non noetheriani, si applicano i risultati precedenti alla fattorialità della henselizzazione.

Tutti gli anelli e le algebre considerati sono commutativi con identità.

1. In questo paragrafo, dopo alcuni richiami sulle proprietà degli spazi topologici irriducibili, stabiliremo una relazione tra connessione e irriducibilità (cor. 1.5) che sarà utile per trovare condizioni equivalenti alla integrità di un anello (prop. 1.11).

Per maggiori dettagli sugli spazi irriducibili cfr. [10] 0_{I} § 2 oppure [2] ch. II, § 4, n. 1.

DEFINIZIONE 1.1. *Uno spazio topologico X si dice* irriducibile *se l'intersezione di due aperti non vuoti di X è non vuota, ovvero se X non è unione di due sottoinsiemi chiusi diversi da X.*

Una parte di X si dice irriducibile *se è irriducibile come sottospazio di X.*

DEFINIZIONE 1.2. *Sia X uno spazio topologico e sia x un punto di X, una* generizzazione *di x è un punto $y \in X$ tale che $x \in \overline{\{y\}}$ (chiusura di $\{y\}$). Notiamo con X_x il sottospazio delle generizzazioni di x.*

DEFINIZIONE 1.3. *Sia X uno spazio irriducibile, un punto x di X dicesi* punto generico *di X se la sua chiusura coincide con X (cioè se è denso in X).*

Sia ora X uno spazio topologico quasi-compatto e di Kolmogoroff (uno spazio topologico si dice di Kolmogoroff se verifica l'assioma T_0: se x e y sono punti di X e $x \neq y$, esiste un aperto contenente uno dei due punti e non l'altro) tale che ogni componente irriducibile ammetta un punto generico (e uno solo, essendo X di Kolmogoroff).

In queste ipotesi vale allora la seguente:

PROPOSIZIONE 1.4. *Sia X uno spazio topologico con un numero finito di componenti irriducibili. Sono condizioni equivalenti*:

i) *X_x è irriducibile per ogni punto chiuso x di X.*

ii) *Le componenti irriducibili di X a due a due sono disgiunte.*

iii) *X è unione disgiunta di un numero finito di sottospazi irriducibili.*

iv) *Le componenti connesse di X sono irriducibili.*

DIM.

i) $\Rightarrow$ ii). Siano $F_1, \ldots, F_n$ le componenti irriducibili distinte di X, supponiamo per assurdo che esistano due indici h e k distinti tali che $F_h \cap F_k \neq \emptyset$, poichè $F_h \cap F_k$ è chiuso, per la quasi-compattezza di X, $F_h \cap F_k$ contiene una parte chiusa non vuota minimale che, essendo X di Kolmogoroff, è ridotta ad un solo punto (cfr. [10], 0_{I}, 2.1.3); sia x tale punto, poichè x è chiuso X_x è, per ipotesi, irriducibile, quindi è contenuto in una componente irriducibile F_p, siano allora y_h, y_k, y_p i punti generici di F_h, F_k, F_p.

$x \in X_x \subset F_p$ e $\overline{\{y_p\}} = F_p$ quindi $y_p \in X_x$, d'altronde $x \in F_h = \overline{\{y_h\}}$ quindi anche $y_h \in X_x$ e perciò $y_h \in F_p$, allora (cfr. [10], 0_{I}, 2.1.6) $y_h = y_p$ cioè $F_h = F_p$; per le stesse ragioni si ha che $F_k = F_p$, perciò $F_h = F_k$, contro l'ipotesi che F_h e F_k fossero distinte.

ii) $\Rightarrow$ iii) ovvio.

iii) $\Leftrightarrow$ iv) È immediato perchè le componenti connesse sono unione di componenti irriducibili.

iii) $\Rightarrow$ ii) Ovvio perchè le componenti irriducibili sono connesse.

ii) $\Rightarrow$ i) Siano $F_1, \ldots, F_n$ le componenti irriducibili disgiunte di X e sia x un punto chiuso di X allora esiste un solo indice i tale che $x \in F_i$, per ipotesi F_i ammette un punto generico y_i e $y_i \in X_x$. Inoltre $X_x \subset F_i$: infatti per ogni punto z di X_x la chiusura di z è contenuta in F_j per qualche indice j poichè F_j è chiuso, allora essendo $x \in \overline{\{z\}} \subset F_j$, abbiamo che $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, quindi $i = j$.

Sia ora Y la chiusura di X_x in X. Si ha $Y \subset F_i$ poichè F_i è chiuso; d'altronde il punto generico y_i di F_i appartiene a Y quindi $F_i \subset Y$, cioè $F_i = Y$, allora Y è irriducibile e poichè un insieme è irriducibile se e solo se lo è la sua chiusura (cfr. [2], ch. II, § 4, n. 1, prop. 2) si ha che X_x è irriducibile.

Cor. 1.5. *Nelle ipotesi della prop.* 1.4 *sono condizioni equivalenti*:

i) X *è irriducibile.*

ii) X *è connesso e* X_x *è irriducibile per ogni punto chiuso* $x \in X$.

Dim.

i) $\Rightarrow$ii): segue immediatamente dalla prop. 1.4 poichè ogni spazio irriducibile è connesso.

ii) $\Rightarrow$ i): sempre per la prop. 1.4 se $F_1, \ldots, F_n$ sono le componenti irriducibili distinte di X, $F_i \cap F_j = \emptyset$ se $i \neq j$, perciò $F_i \cap \left(\bigcup\limits_{i \neq j} F_j\right) = \emptyset$ e $F_i \cup \left(\bigcup\limits_{i \neq j} F_j\right) = X$ e poichè gli F_j sono in numero finito la loro unione è un chiuso di X, allora, se $n > 1$, X è unione di due chiusi disgiunti, contro l'ipotesi che X sia connesso. Perciò $n = 1$ e $X = F_1$ è irriducibile.

Applichiamo ora i risultati precedenti all'integrità di un anello.

Sia A un anello, indichiamo con $\operatorname{spec}(A)$ l'insieme degli ideali primi di A munito della topologia che ha per chiusi i sottoinsiemi del tipo $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(A) \text{ t.c. } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$ dove $\mathfrak{a}$ è un ideale di A. (per maggiori dettagli cfr. [2], ch. II, § 4, n. 3).

Definizione 1.6. Un anello A dicesi *localmente integro* se $A_{\mathfrak{m}}$ è integro per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.

Un anello dicesi *ridotto* se il suo nilradicale (cioè l'intersezione degli ideali primi minimali di A) è l'ideale nullo.

Teorema 1.7. *Sia A un anello e sia F un chiuso di* $\operatorname{spec}(A) = X$, *allora F è irriducibile se e soltanto se $F = V(\mathfrak{p})$ per qualche ideale primo $\mathfrak{p}$ di A e le componenti irriducibili di X sono in corrispondenza biunivoca con i primi minimali di A.*

Dim. Vedi [2], ch. II, § 4, n. 3, prop. 14 e cor. 2 alla prop. 14.

Corollario 1.8. *Sia A un anello e sia R il suo nilradicale, allora* $\operatorname{spec}(A)$ *è irriducibile se e solo se A/R è integro.*

Dim. Vedi [2], ch. II, § 4, n. 3, cor. 1 alla prop. 14.

TEOREMA 1.9. *Sia A un anello,* spec(A) *è connesso se e solo se A non contiene idempotenti diversi da* 0 *e* 1.

DIM. Vedi [2], cap. II, § 4, n. 3, cor. 2 al lemma 2.

TEOREMA 1.10. *Sia A un anello con un numero finito di primi minimali.*

Sono condizioni equivalenti:

i) *A è localmente integro.*

ii) *A è ridotto e ogni ideale massimale di A contiene uno ed un solo primo minimale.*

iii) *A è ridotto e le componenti irriducibili di* spec(A) *sono disgiunte.*

DIM. $X = \operatorname{spec}(A)$ ha un numero finito di componenti irriducibili per il teor. 1.7, inoltre è uno spazio di Kolmogoroff (cfr. [10], I, 1.1.8), quasi compatto ([10], I, 1.1.10 ii)) e ogni parte irriducibile ammette uno e un solo punto generico ([10] I, 1.1.14 ii)); inoltre se $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sono ideali primi di A, $\mathfrak{q}$ è una generizzazione di $\mathfrak{p}$ in spec(A) se e solo se $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ in A (cfr. [10], I, 1.1.7), infine il sottospazio delle generizzazioni di un punto $\mathfrak{p}$, $X_\mathfrak{p}$ è omeomorfo a spec$(A_\mathfrak{p})$ (cfr. [10], I, 1.2.6).

i) $\Rightarrow$ii): per [3] cor. 2.4 un anello localmente integro è ridotto, inoltre poichè esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di A contenuti in un massimale $\mathfrak{m}$ e i primi di $A_\mathfrak{m}$, essendo $A_\mathfrak{m}$ integro esso contiene un solo primo minimale (l'ideale nullo) e quindi, in A, $\mathfrak{m}$ contiene un solo primo minimale.

ii) $\Rightarrow$iii): siano, per assurdo, F_i e F_j due componenti irriducibili distinte di X tali che $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ allora se $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$ sono i corrispondenti primi minimali, poichè $V(\mathfrak{p}_i) \cap V(\mathfrak{p}_j) = V(\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j) \neq \emptyset$ si ha che $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \neq (1)$, allora esiste un ideale massimale che contiene $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$ e quindi contiene $\mathfrak{p}_i$ e $\mathfrak{p}_j$, contro l'ipotesi.

iii) $\Rightarrow$i): per la prop. 1.4 $X_\mathfrak{m}$ è irriducibile per ogni punto $\mathfrak{m}$ chiuso di X, cioè spec$(A_\mathfrak{m})$ è irriducibile per ogni massimale $\mathfrak{m}$ di A, inoltre $A_\mathfrak{m}$ è ridotto poichè A è ridotto (cfr. [3], cor. 2.4) quindi $A_\mathfrak{m}$ è integro, cioè A è localmente integro.

È possibile ora provare la seguente prop. 1.11 già nota nel caso in cui l'anello A sia *noetheriano* (cfr. [3], prop. 2.6).

PROPOSIZIONE 1.11. *Sia A un anello con un numero finito di primi minimali.*

Sono condizioni equivalenti:

i) A *è integro.*

ii) A *è localmente integro e non contiene idempotenti diversi da* 0 *e* 1.

iii) A *è localmente integro e* $\operatorname{spec}(A)$ *è connesso.*

iv) A *è ridotto e* $\operatorname{spec}(A)$ *è irriducibile.*

DIM:

i) $\Rightarrow$ ii): ovvio.

ii) $\Rightarrow$iii): segue dal teor. 1.9.

iii) $\Rightarrow$iv): segue subito dal cor. 1.5 e dalla prop. 1.10.

iv) $\Rightarrow$ i): segue dal cor. 1.8.

DEFINIZIONE 1.12. Un anello A dicesi *normale* se per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ è integro e integralmente chiuso.

COROLLARIO 1.13. *Sia A un anello con un numero finito di primi minimali* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$.
Sono condizioni equivalenti:

i) A *è localmente integro.*

ii) $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ *con* $A_i = A/\mathfrak{p}_i$.

iii) $A = A_1 \times \ldots \times A_s$ *con gli* A_i *integri per ogni* i.

Inoltre A è normale se e solo se gli A_i sono integri e normali.

DIM:

i) $\Rightarrow$ii): definiamo $f\colon A \to A/\mathfrak{p}_1 \times \ldots \times A/\mathfrak{p}_n$ in questo modo $f(a) = (a + \mathfrak{p}_1, \ldots, a + \mathfrak{p}_n)$, per [1], prop. 1.10 f è un isomorfismo infatti $\bigcap_1^n \mathfrak{p}_i = \operatorname{nil}(A) = (0)$ poichè A è localmente integro e quindi ridotto; inoltre se $i \neq j$, $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ infatti per la prop. 1.10 le componenti irriducibili di $\operatorname{spec}(A)$ sono disgiunte cioè

$$V(\mathfrak{p}_i) \cap V(\mathfrak{p}_j) = V(\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j) = \emptyset .$$

ii) $\Rightarrow$iii): ovvio.

iii) $\Rightarrow$ i): si ha subito da [3] lemma 2.9.

Infine, sempre per [3] lemma 2.9, $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale in A se e solo se $\mathfrak{m} = A_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_i \times \ldots \times A_n$ con $\mathfrak{m}_i$ massimale in A_i e $A_{\mathfrak{m}}$ è isomorfo ad $(A_i)_{\mathfrak{m}_i}$, perciò A è normale se e solo se tutti gli A_i sono integri e normali.

Diamo ora un altro criterio di integrità (cor. 1.17) che sarà utile nel seguito.

TEOREMA 1.14. *Sia X uno spazio topologico quasi-compatto di Kolmogoroff e sia Y un sottospazio di X contenente tutti i punti chiusi di X.*
Allora se Y è connesso X è connesso.

DIM. Poichè Y è connesso esiste una componente connessa C di X che contiene Y, supponiamo che esista un'altra componente connessa D di X distinta da C, D è chiusa in X e poichè X è quasi compatto D contiene una parte chiusa non vuota minimale che, essendo X di Kolmogoroff, è ridotta ad un punto (cfr. [10], 0_{I}, 2. 1. 3), per ipotesi questo punto appartiene ad $Y \subset C$ quindi $C \cap D \neq \emptyset$, assurdo, quindi X è connesso.

COROLLARIO 1.15. *Sia X uno spazio topologico che verifica le condizioni equivalenti della prop.* 1.4 *e sia Y un sottospazio di X contenente tutti i punti chiusi di X. Se Y è connesso allora X è irriducibile.*

DIM. Per il teor. 1.14 X è connesso quindi per il cor. 1.5 è irriducibile.

Si può ora dare una dimostrazione del seguente teor. 1.16 più semplice di quella di [3] prop. 1.3 usando esclusivamente proprietà topologiche di $\operatorname{spec}(A)$.

TEOREMA 1.16. *Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A. Se* $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso allora* $\operatorname{spec}(A)$ *è connesso.*

DIM. Se $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Rad}(A)$ ogni ideale massimale di A contiene $\mathfrak{m}$, quindi, in $\operatorname{spec}(A)$, $V(\mathfrak{m})$ contiene tutti i punti chiusi di $\operatorname{spec}(A)$, ma $V(\mathfrak{m})$ è omeomorfo a $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ (cfr. [10], I, 1.1.11), quindi per il teor. 1.14 se $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso $\operatorname{spec}(A)$ è connesso.

Da questo teorema e dal cor. 1.15 si ha subito il seguente:

COROLLARIO 1.17. *Sia A un anello localmente integro con un numero finito di primi minimali e sia $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Rad}(A)$. Se* $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso allora A è integro.*

OSSERVAZIONE. Non sappiamo se esistono anelli localmente integri a spettro connesso ma non integri.

È comunque necessario che esista almeno un punto dello spettro tale che ogni suo intorno abbia un numero infinito di componenti irriducibili. (In caso contrario le componenti irriducibili sono aperte e perciò coincidono con le componenti connesse, cfr. [2], es. 6, pag. 171).

2. Applichiamo ora i risultati del § 1 alla integrità e alla normalità della henselizzazione di un anello rispetto ad un ideale.

Iniziamo richiamando alcuni fatti.

DEFINIZIONE 2.1. Sia A un anello e $\mathfrak{m}$ un ideale di A, la coppia $(A, \mathfrak{m})$ dicesi *H-coppia* (o *coppia henseliana*) se verifica una delle condizioni equivalenti del teor. 1 di [8] (in particolare se verifica la tesi del lemma di Hensel).

DEFINIZIONE 2.2. Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia, un polinomio monico di $A[X]$ si dice *N-polinomio* su $(A, \mathfrak{m})$ se il suo termine noto appartiene ad $\mathfrak{m}$ e il coefficiente del termine di grado 1 è invertibile modulo $\mathfrak{m}$.

DEFINIZIONE 2.3. Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia, $F(X)$ un N-polinomio su $(A, \mathfrak{m})$, poniamo $A[x] = A[X]/(F(X))$, $S = 1 + (\mathfrak{m}, x)A[x]$, $B = S^{-1}A[x]$. La coppia $(B, \mathfrak{m}B)$ dicesi *N-estensione semplice* di $(A, \mathfrak{m})$. Una *N-estensione* di $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia $(A', \mathfrak{m}')$ ottenuta con un numero finito di N-estensioni semplici.

DEFINIZIONE 2.4. Siano $(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ due coppie, un omomorfismo di anelli $f\colon A \to B$ si dice *morfismo di coppie* se $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$. Un morfismo f di coppie si dice *stretto* se 1) $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ (dove $\mathfrak{m}B$ indica $f(\mathfrak{m})B$); 2) f induce un isomorfismo tra $A/\mathfrak{m}$ e $B/\mathfrak{n}$.

DEFINIZIONE 2.5. Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia, una H-coppia $(B, \mathfrak{n})$ insieme ad un morfismo di coppie $f\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ dicesi *una H-chiusura* (o *henselizzazione*) di $(A, \mathfrak{m})$ se per ogni H-coppia $(B', \mathfrak{n}')$ e ogni morfismo di coppie $g\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B', \mathfrak{n}')$ esiste uno ed un solo morfismo di coppie $g'\colon (B, \mathfrak{n}) \to (B', \mathfrak{n}')$ tale che $g = g' \circ f$.

Vale il seguente:

TEOREMA 2.6. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia, l'insieme delle N-estensioni di $(A, \mathfrak{m})$ è un sistema diretto il cui limite diretto è la henselizzazione di $(A, \mathfrak{m})$ e si nota con ${}^h(A, \mathfrak{m})$. Inoltre l'omomorfismo canonico di $(A, \mathfrak{m}) \to {}^h(A, \mathfrak{m})$ è stretto e piatto.*

DIM. Vedi [8] teor. 2 (per altre proprietà della henselizzazione cfr. [4] e [8]).

Per stabilire se l'henselizzazione ${}^h(A, \mathfrak{m})$ di una coppia $(A, \mathfrak{m})$ è un anello integro basta allora vedere se sono tali le N-estensioni di $(A, \mathfrak{m})$. Per questo ci occorre sapere quando una N-estensione ha un numero finito di primi minimali (prop. 2.9) in modo da poter applicare la prop. 1.11.

LEMMA 2.7. *Sia A un anello e sia B una A-algebra finita piatta su A. Se A ha un numero finito di primi minimali allora B ha un numero finito di primi minimali.*

DIM. Poichè B è piatta su A la contrazione di un primo minimale di B è un primo minimale di A (cfr. [6], Lemma 1.4), inoltre essendo B di tipo finito per [2], ch. V, § 2, n. 1, prop. 3 i primi di B sopra un ideale primo di A sono in numero finito e la tesi segue facilmente.

LEMMA 2.8. *Sia A un anello e B un sopra anello di A. Se B ha un numero finito di primi minimali allora A ha un numero finito di primi minimali.*

DIM. Sia $\mathfrak{p}$ un primo minimale di A allora per [2], ch. II, § 2, n. 6, prop. 16 esiste un primo minimale $\mathfrak{q}$ di B tale che $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, perciò i primi minimali di A sono in numero finito.

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia con $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$, $(B, \mathfrak{n})$ una N-estensione di $(A, \mathfrak{m})$. A ha un numero finito di primi minimali se e solo se B ha un numero finito di primi minimali.*

DIM. Possiamo sempre supporre che B sia una N-estensione semplice (poichè ogni N-estensione si ottiene da un numero finito di N-estensioni semplici) e quindi del tipo $S^{-1}A[x]$ con $A[x] = A[X]/(F(X))$ (dove $F(X)$ è un N-polinomio) e con $S = 1 + (\mathfrak{m}, x)A[x]$.

Poichè B è piatta su A (cfr. [4] lemma 3.9) la contrazione di un primo minimale di B è primo minimale di A, inoltre i primi di B sono in corrispondenza biunivoca con i primi di $A[x]$ che non incontrano S ed essendo $A[x]$ una A-algebra finita per il lemma 2.7 i primi minimali di $A[x]$, e quindi i primi minimali di B, sono in numero finito.

Il viceversa segue dal lemma 2.8 in quanto se $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$ A si può identificare ad un sottoanello di B.

DEFINIZIONE 2.10. Un anello locale A si dice *unibranche* se, posto $A_{red} = A/\mathrm{nil}(A)$, si ha che:

i) A_{red} è integro;

ii) la chiusura integrale di A_{red} è un anello locale.

(Cfr. anche [10], 0_{IV}, 23.2.1).

Un anello B qualsiasi si dice *localmente unibranche* se per ogni ideale massimale $\mathfrak{q}$, $B_{\mathfrak{q}}$ è *unibranche.*

Il seguente teor. 2.11 è già noto per gli anelli *noetheriani* localmente unibranche (cfr. [4], teor. 9.2).

TEOREMA 2.11. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una coppia con* $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}\,(A)$ *e* A *localmente unibranche, sia* ${}^h(A, \mathfrak{m}) = {}^hA$ *l'henselizzazione di* $(A, \mathfrak{m})$.

Sono condizioni equivalenti:

i) ${}^hA$ *è integro.*

ii) A *è integro e* $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso.*

iii) A *è ridotto con un numero finito di primi minimali e* $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso.*

DIM:

i) $\Rightarrow$ii): poichè ${}^hA$ è integro $\mathrm{spec}({}^hA)$ è connesso quindi per [3] prop. 1.3 $\mathrm{spec}({}^hA/{}^h\mathfrak{m})$ è connesso, ma per [4], teor. 6.1 iii) ${}^hA/{}^h\mathfrak{m}$ è isomorfo ad $A/\mathfrak{m}$ quindi $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso.

Essendo $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$ per [4], cor. 6.7 A si può identificare ad un sottoanello di ${}^hA$ e quindi A è integro.

ii) $\Rightarrow$iii): Ovvio.

iii) $\Rightarrow$ i): Per ogni N estensione $(B, \mathfrak{n})$ di $(A, \mathfrak{m})$ $\mathrm{spec}(B)$ è connesso, infatti per [4] prop. 2.6 $B/\mathfrak{n}$ è isomorfo ad $A/\mathfrak{m}$ perciò $\mathrm{spec}(B/\mathfrak{n})$ è connesso e quindi (cfr. teor. 1.16) $\mathrm{spec}(B)$ è connesso.

Per [4], cor. 7.9 ${}^hA$ è localmente integro perciò anche B è localmente integro ma, per la prop. 2.9, B ha un numero finito di primi minimali quindi per la prop. 1.11 è integro, allora ${}^hA$ risulta integro essendo limite diretto di anelli integri.

Il teorema precedente può essere ulteriormente generalizzato, indebolendo l'ipotesi *localmente unibranche* (cfr. teor. 2.13).

Indichiamo con $\bar{A}$ la chiusura integrale di un anello A nel suo anello totale delle frazioni $[A]_0$, ricordiamo che A si dice integralmente chiuso se $A = \bar{A}$.

COROLLARIO 2.12. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una coppia con* $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$. *Sono condizioni equivalenti*:

i) ${}^hA$ *è integro e integralmente chiuso.*

ii) A *è integro e integralmente chiuso e* $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso.*

DIM. È noto che un anello integro è normale se e solo se è integralmente chiuso (cfr. [1], prop. 5.13). Inoltre ${}^hA$ è normale se e solo se A è tale (cfr. [4], cor. 7.6.); la tesi segue allora dal teor. 2.11, in quanto un anello normale è in modo ovvio localmente unibranche.
Si giunge così al seguente:

TEOREMA 2.13. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una coppia con* $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$. *Sono condizioni equivalenti*:

i) ${}^hA$ *è integro.*

ii) ${}^h(\bar{A})$ *è integro, dove* ${}^h(\bar{A}) = {}^h(\bar{A}, \mathfrak{m}\bar{A})$.

iii) $\bar{A}$ *è integro e* $\mathrm{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ *è connesso.*

iv) A *è integro e* $\mathrm{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ *è connesso.*

v) A *è localmente integro, con un numero finito di primi minimali e* $\mathrm{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ *è connesso.*

DIM. Si ha subito che $\mathfrak{m}\bar{A} \subset \mathrm{Rad}(\bar{A})$ infatti se $\mathfrak{q}$ è un ideale massimale di $\bar{A}$ per [2], ch. V, § 2, n. 1, prop. 1 $\mathfrak{q}$ si contrae ad un massimale di A, quindi $\mathfrak{m}\bar{A} \subset \mathfrak{q}$ (cfr. [1], prop. 1.17 i)).

i) $\Rightarrow$ii): A è integro come sottoanello di ${}^hA$ (vedi teor. 2.11), sia allora $S = A - \{0\}$, S è moltiplicativamente chiuso in A e quindi in ${}^hA$, posto $S^{-1}A = K$ (corpo delle frazioni di A), abbiamo (cfr. [2], ch. II, § 2, n. 7, prop. 18) che $S^{-1}({}^hA) = K \otimes_A {}^hA$ è integro poichè lo è ${}^hA$. Allora per la piattezza di ${}^hA$ (cfr. [4], teor. 6.5) la successione esatta $0 \to \bar{A} \xrightarrow{j} K$ (dove j è l'immersione canonica) dà luogo alla successione esatta $0 \to \bar{A} \otimes_A {}^hA \to K \otimes_A {}^hA$ quindi $\bar{A} \otimes_A {}^hA$ è integro, ma per [6], prop. 5.11 $\bar{A} \otimes_A {}^hA = {}^h(\bar{A}, \mathfrak{m}\bar{A})$ perciò ${}^h(\bar{A})$ è integro.

ii) $\Rightarrow$iii): poichè $\mathfrak{m}\bar{A} \subset \mathrm{Rad}(\bar{A})$, $\bar{A}$ è sottoanello di ${}^h(\bar{A})$ ed è quindi integro, essendo poi $\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A} = {}^h(\bar{A})/\mathfrak{m}{}^h(\bar{A})$ si ha che $\mathrm{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso.

iii) $\Rightarrow$iv): Ovvio perchè A è un sottoanello di $\bar{A}$.

iv) $\Rightarrow$ v): Ovvio.

v) $\Rightarrow$ i): Per il teor. 1.16 spec$(\bar{A})$ è connesso, quindi, essendo surgettiva l'applicazione continua (indotta dall'immersione di A in $\bar{A}$) da Spec$(\bar{A})$ su spec(A) (cfr. [1] teor. 5.10) anche Spec(A) è connesso allora per la prop. 1.11 A è integro, perciò $\bar{A}$ è integro e integralmente chiuso cioè (cfr. cor. 2.12) ${}^h(\bar{A}) = {}^hA \otimes_A \bar{A}$ è integro. Per la piattezza di ${}^hA$ la successione esatta $0 \to A \xrightarrow{i} \bar{A}$ (dove i è l'immersione canonica) dà luogo alla successione esatta $0 \to A \otimes_A {}^hA \to \bar{A} \otimes_A {}^hA$ perciò ${}^hA$ si può identificare ad un sottoanello di ${}^h(\bar{A})$ ed è quindi integro.

Osservazione. Il teor. 2.13 è una effettiva estensione del teor. 2.11 infatti se A è un anello integro qualsiasi (quindi anche non localmente unibranche) e se $\mathfrak{m} = (0)$ allora ${}^h(A, \mathfrak{m}) = A$ è integro e spec$(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A}) =$ $=$ spec$(\bar{A})$ è connesso.

Con alcune lievi modifiche si può infine eliminare la condizione $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$, basta ricordare che, posto $S = 1 + \mathfrak{m}$, ${}^h(A, \mathfrak{m}) =$ $= {}^h(S^{-1}A, \mathfrak{m}S^{-1}A)$ (cfr. [4] lemma 6.6). Gli inconvenienti sorgono dal fatto che se $\mathfrak{m} \not\subset \mathrm{Rad}(A)$ l'applicazione canonica $f\colon (A, \mathfrak{m}) \to {}^h(A, \mathfrak{m})$ non è sempre iniettiva, infatti per [4] cor. 6.7 $\ker(f) = \{x \in A : \exists m \in \mathfrak{m} \text{ t.c. } x = xm\}$. Basterà allora imporre la condizione che l'insieme $1 + \mathfrak{m}$ non contenga zero-divisori in A.

Data una coppia $(A, \mathfrak{m})$, sia $S = 1 + \mathfrak{m}$, $B = S^{-1}A$ e $\bar{B}$ la chiusura integrale di B nel suo anello totale delle frazioni.

Si hanno allora i seguenti teoremi:

Teorema 2.14. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia. Sono condizioni equivalenti:*

i) *${}^hA$ è integro ed S non contiene 0-divisori in A.*

ii) *A è integro e spec$(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso.*

iii) *A è localmente integro con un numero finito di primi minimali, spec$(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso, e S non contiene 0-divisori in A.*

Dim:

i) $\Rightarrow$ ii): Ovviamente A è integro se e solo se B è integro e S non contiene 0-divisori in A quindi poichè per [4] lemma 6.6 si ha ${}^hA = {}^h(B, \mathfrak{m}B)$ e $\mathfrak{m}B \subset \mathrm{Rad}(B)$, per teor. 2.13 B è integro e spec$(\bar{B}/\mathfrak{m}\bar{B})$ è connesso quindi A è integro, inoltre $\bar{B} = S^{-1}\bar{A}$ quindi

$$\bar{B}/\mathfrak{m}\bar{B} = \bar{B} \otimes_A A/\mathfrak{m} = (\bar{A} \otimes_A B) \otimes_A A/\mathfrak{m} = \bar{A} \otimes_A (A \otimes_A S^{-1}(A/\mathfrak{m})) =$$
$$= \bar{A} \otimes_A A/\mathfrak{m} = \bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A}$$

(poichè l'immagine di S in $A/\mathfrak{m}$ si riduce al solo punto 1) quindi $\operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso.

ii) $\Rightarrow$iii): Ovvio.

iii) $\Rightarrow$ i): B è localmente integro (cfr. [2], ch. II, § 2, n. 5, prop. 11 iii)) $\operatorname{spec}(\bar{B}/\mathfrak{m}\bar{B}) = \operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso quindi per teor. 2.13 v) ${}^hB$ è integro, cioè ${}^hA$ è integro.

Osservazione. Per provare, nel teorema precedente, che iii) $\Rightarrow {}^hA$ integro, non è necessario fare alcuna ipotesi su S.

Dal teor. 2.11 e dal teor. 2.14 si ha immediatamente:

Corollario 2.15. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia con A integro localmente unibranche.*

Sono condizioni equivalenti:

i) $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso.*

ii) $\operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ *è connesso.*

Dim. Posto $S = 1 + \mathfrak{m}$ e $B = S^{-1}A$ per ogni massimale $\mathfrak{q}$ di B esiste un massimale $\mathfrak{p}$ di A tale che $\mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{p}$ e $B_\mathfrak{q} \simeq A_\mathfrak{p}$ (cfr. [2], ch. II, § 2, n. 5, prop. 11 iii)) quindi se A è localmente unibranche anche B lo è.

i) $\Rightarrow$ii): Essendo $\mathfrak{m}B \subset \operatorname{Rad}(B)$ e $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m}) = \operatorname{spec}(B/\mathfrak{m}B)$ per il teor. 2.11 ${}^hB$ è integro cioè ${}^hA$ è integro quindi per teor. 2.14 $\operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso.

ii) $\Rightarrow$ i): Per teor. 2.14 ${}^hA$ è integro quindi $\operatorname{spec}({}^hA/{}^h\mathfrak{m}) = \operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ è connesso.

Osservazione. In generale, data una coppia $(A, \mathfrak{m})$ con A integro, non è vero che $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ connesso implichi $\operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ connesso basta considerare il seguente:

Esempio 2.16. Sia k un corpo e $A = k[t^2 - 1, t(t^2 - 1)]$, sia $\mathfrak{n}$ l'ideale massimale $(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$, sia $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}A_\mathfrak{n}$, allora $A_\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$ è un corpo, perciò il suo spettro è connesso.

Per [2], ch. V, § 1, n. 5, cor. 1 alla prop. 16 la chiusura integrale di $A_\mathfrak{n}$ è $(\bar{A})_\mathfrak{n}$ ma $\bar{A} = k[t]$ (infatti t è intero su A e $k[t]$ è contenuto nel corpo delle frazioni di A, inoltre $k[t]$ è integralmente chiuso).

$(k[t])_\mathfrak{n}$ è allora la chiusura integrale di $A_\mathfrak{n}$ ma $((k[t])_\mathfrak{n})/\mathfrak{m}(k[t])_\mathfrak{n}$ contiene idempotenti non banali infatti la classe di $\frac{1}{2}(t + 1)$ è uguale alla classe di $\frac{1}{4}(t^2+1+2t)$ poichè t^2 è equivalente a 1 perciò $\frac{1}{2}(t+1)$ è equivalente a $(\frac{1}{2}(t+1))^2$ quindi, per teor. 1.9, $\operatorname{spec}\big(((k[t])_{\mathfrak{n}})/\mathfrak{m}(k[t])_{\mathfrak{n}}\big)$ non è connesso.

COROLLARIO 2.17. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una coppia; sono condizioni equivalenti:*

i) $\operatorname{spec}({}^hA)$ *è irriducibile e* $S = 1 + \mathfrak{m}A_{\mathrm{red}}$ *non contiene* 0*-divisori.*

ii) $\operatorname{spec}(A)$ *è irriducibile e* $\operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ *è connesso.*

DIM. Affermare che $\operatorname{spec}(A)$ (risp. $\operatorname{spec}({}^hA)$) è irriducibile è equivalente ad affermare che A_{red}(risp. $({}^hA)_{\mathrm{red}}$) è integro.

i) $\Rightarrow$ii): Per teor. 2.14 A_{red} è integro e $\operatorname{spec}((\overline{A_{\mathrm{red}}})/\mathfrak{m}(\overline{A_{\mathrm{red}}}))$ è connesso, ma $(\overline{A_{\mathrm{red}}})/\mathfrak{m}(\overline{A_{\mathrm{red}}})$ è intero su $(\bar{A})_{\mathrm{red}}/\mathfrak{m}(\bar{A})_{\mathrm{red}}$ (cfr. [1], prop. 5.6) quindi l'applicazione canonica sugli spettri è surgettiva (cfr. [1], prop. 5.10) quindi $\operatorname{spec}((\bar{A})_{\mathrm{red}}/\mathfrak{m}(\bar{A})_{\mathrm{red}})$ è connesso, perciò per [4], lemma 9.4 $\operatorname{spec}(\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A})$ è connesso.

ii) $\Rightarrow$ i): $(\bar{A})_{\mathrm{red}}$ è localmente unibranche e $\operatorname{spec}((\bar{A})_{\mathrm{red}}/\mathfrak{m}(\bar{A})_{\mathrm{red}})$ è connesso per [4] lemma 9.4, quindi ${}^h((\bar{A})_{\mathrm{red}})$ è integro ma ${}^h((\bar{A})_{\mathrm{red}}) = ({}^h(\bar{A}))_{\mathrm{red}}$ (cfr. [4], teor. 8.7) ed essendo ${}^hA$ piatto su A la successione esatta $0 \to A \to \bar{A}$ dà luogo alla successione esatta $0 \to A \otimes_A {}^hA \to \bar{A} \otimes_A {}^hA = {}^h(\bar{A})$, inoltre $\operatorname{nil}({}^hA) = \operatorname{nil}({}^h(\bar{A})) \cap {}^hA$ perciò $({}^hA)_{\mathrm{red}}$ si può identificare a un sottoanello di $({}^h(\bar{A}))_{\mathrm{red}}$ ed è quindi integro.

Si può allora porre la seguente:

DEFINIZIONE 2.18. La coppia $(A, \mathfrak{m})$ dicesi *coppia unibranche* (e si nota C.U.) se $(A_{\mathrm{red}}, \mathfrak{m}A_{\mathrm{red}})$ verifica una delle condizioni equivalenti del teor. 2.14.

OSSERVAZIONE. Se A è un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$, la coppia $(A, \mathfrak{m})$ è C.U. se e solo se A è un anello unibranche nel senso della def. 2.10. Infatti per [10], IV, 18.6.12 A è unibranche se e solo se $\operatorname{spec}({}^hA)$ è irriducibile.

Ricordando il corollario 2.15 si ha subito il seguente

COROLLARIO 2.19. *Sia* A *integro localmente unibranche. Allora* $(A, \mathfrak{m})$ *è* C.U. *se e solo se* $\operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$ *è connesso.*

Applichiamo ora i teoremi precedenti al completamento di un anello.

TEOREMA 2.20. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una* C.U. *con* A *anello noetheriano ridotto a fibre formali geometricamente normali* (cfr. [10], IV, § 7.3).

Allora se $A^\wedge$ *è il completamento di* A *rispetto alla topologia* $\mathfrak{m}$*-adica, si ha:*

a) $A^\wedge$ *è un anello integro.*

b) ${}^hA$ *coincide con la chiusura algebrica di* A *in* $A^\wedge$*.*

DIM. Per [10], IV, 18.7.2 e [4], teor. 7.4, iii) ${}^hA$ è a fibre formali geometricamente normali, quindi l'omomorfismo canonico da ${}^h(A, \mathfrak{m})$ in $({}^h(A, \mathfrak{m}))^\wedge$ è normale. Ma per il teor. 2.14 ${}^hA$ è integro ed essendo $({}^hA)^\wedge = A^\wedge$ (cfr. [4], th. 6.1) si ha che $A^\wedge$ è integro poichè $({}^hA)^\wedge$ è integro (cfr. [9], teor. 1 *a*)). La *b*) segue subito da [9] cor. 4.

3. In questo paragrafo consideriamo alcune proprietà degli anelli fattoriali e localmente fattoriali nel caso non noetheriano.

Per maggiori dettagli cfr. [2], ch. II e ch. VII e [12].

Sia A un anello, indicheremo con $P(A)$ (gruppo di Picard di A) il *gruppo delle classi di* A*-moduli proiettivi di rango* 1, indicheremo con $J(A)$ il *gruppo delle classi di ideali frazionari invertibili di* A.

TEOREMA 3.1. *Sia* A *un anello integro, allora* $P(A)$ *e* $J(A)$ *sono isomorfi.*

DIM. Cfr., ad esempio, [5], prop. 1.5.

Sia ora A un anello integro, K il suo corpo delle frazioni, $K^* = K - \{0\}$, $I(A)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli preordinato con la relazione $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ se e solo se tutti gli ideali frazionari principali contenenti $\mathfrak{a}$ contengono anche $\mathfrak{b}$, sia R la relazione di equivalenza indotta ($\mathfrak{a} R \mathfrak{b}$ se e solo se $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{a}$) poniamo $D(A) = I(A)/R$, gli elementi di $D(A)$ si chiamano *divisori di* A, se $\mathfrak{a} \in I(A)$ la classe di $\mathfrak{a}$ in $D(A)$ si nota $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$.

Sia $x \in K^*$ e sia $\operatorname{div}(xA) = \operatorname{div}(x)$, sia $\sim$ la relazione di equivalenza in $D(A)$: $P \sim Q$ se e solo se $P = Q + \operatorname{div}(x)$ (ricordo che $D(A)$ è un monoide commutativo e associativo con l'operazione $+$: $\operatorname{div}(\mathfrak{a}) + \operatorname{div}(\mathfrak{b}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$). Allora $D(A)/\sim$ è il monoide delle classi dei divisori di A.

TEOREMA 3.2. $J(A)$ *si identifica a un sottogruppo di* $D(A)$ (*con l'omomorfismo* $\mathfrak{a} \mapsto \operatorname{div}(\mathfrak{a})$) *e l'immagine canonica di* $J(A)$ *in* $D(A)/\sim$ *si identifica al gruppo* $P(A)$.

DIM. Cfr. [2], ch. II, § 5, n. 7, cor. 2 a prop. 12 e Rem. 1, e ch. VII, § 1, n. 2.

Diamo ora alcuni teoremi riguardanti il gruppo $P(A)$ e la fattorialità.

TEOREMA 3.3. *Sia A un anello integro. Sono condizioni equivalenti*

i) $P(A)=0$,

ii) *ogni ideale invertibile di A è libero,*

iii) *ogni ideale proiettivo di A è libero.*

DIM. Per teor. 4.1 $P(A)=J(A)$ quindi i)$\Leftrightarrow$ii).

Poichè ogni ideale proiettivo di A non nullo è non degenere (cioè contiene qualche elemento non 0-divisore) essendo A integro, l'equivalenza ii)$\Leftrightarrow$iii) segue da [5] teor. 1.1.

Se A è un anello integro le seguenti condizioni sono equivalenti (cfr. [12], pagg. 7 e 8):

i) *Ogni insieme nuo vuoto di ideali principali ammette un elemento massimale.*

ii) *Ogni elemento non invertibile di $A-\{0\}$ si decompone nel prodotto finito di elementi irriducibili.*

Indicheremo con (M) l'una o l'altra delle due condizioni.

TEOREMA 3.4. *Sia A un anello integro. Sono condizioni equivalenti:*

i) *A è fattoriale.*

ii) *Vale la condizione (M) e ogni elemento irriducibile di A genera un ideale primo.*

iii) *(M) e ogni ideale primo di altezza 1 è principale.*

iv) *(M) e l'intersezione di due ideali principali è principale.*

DIM.

i)$\Leftrightarrow$ ii): Cfr. [2], ch. VII, § 3, n. 1, teor. 1.

i) $\Rightarrow$iii): Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo tale che $ht(\mathfrak{p})=1$ poichè $\mathfrak{p}\neq(0)$ esiste in $\mathfrak{p}$ un elemento non nullo a che, per la fattorialità di A si decompone nel prodotto $a=up_1p_2\ldots p_n$ dove u è invertibile e $p_1,\ldots,p_n$ sono primi, poichè $u\notin\mathfrak{p}$ esiste un indice j tale che $p_j\in\mathfrak{p}$ quindi l'ideale generato da p_j è contenuto in $\mathfrak{p}$, ma per ii) l'ideale generato da p_j è primo quindi coincide con $\mathfrak{p}$, essendo $\mathfrak{p}$ di altezza 1.

iii) $\Rightarrow$ i): Cfr. [11], teor. 13.1, pag. 42 (l'ipotesi di noetherianità si usa solo nel provare la (M)).

i) $\Rightarrow$ iv): Per ii) vale (M). Siano ora $a, b \in A - \{0\}$, a, b non invertibili, allora esiste il minimo comune multiplo di a e b: mcm (a, b) (cfr. [12], pag. 10) quindi sempre per [12], ch. 1, § 3, n. 1, pag. 13 $aA \cap bA$ è un ideale principale.

iv) $\Rightarrow$ ii): Per [12] ch. 1, § 2, pag. 13 esiste mcm (a, b) e quindi anche MCD (a, b) (massimo comun divisore) (cfr. [12], cor. 1, pag. 4) sia allora p un elemento irriducibile tale che $p|ab$ (p divide ab) allora $p|a$ o $p|b$, cioè p genera un ideale primo; infatti se p non divide a, sia $q =$ MCD (p, a) allora $q|p$ e $q \neq p$, ma p è irriducibile quindi $q = 1$, inoltre, poichè $p|ab$ e $p|pb$ si ha che $p|$MCD (ab, pb) ma per [12], ch. I, pag. 4, MCD $(ab, pb) = b \cdot$MCD $(a, p) = b \cdot 1 = b$ quindi $p|b$.

TEOREMA 3.5. *Sia A un anello integro fattoriale. Allora $P(A) = 0$.*

DIM. Per [2], ch. VII, § 3, n. 1, def. 1 si ha che $D(A)/\sim = 0$ quindi $J(A) = 0$ cioè (cfr. teor. 3.1) $P(A) = 0$.

DEFINIZIONE 3.6. Un anello A si dice *localmente fattoriale* se $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale per ogni massimale $\mathfrak{m}$.

Per gli anelli localmente fattoriali vale il seguente teorema (che non sarà usato nel seguito), già noto nelle ipotesi A integro e noetheriano (cfr. [5], prop. 1.2).

TEOREMA 3.7. *Sia A un anello integro localmente fattoriale, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ un ideale invertibile. Allora ogni primo minimale contenente $\mathfrak{a}$ ha altezza* 1.

DIM. Sia $\mathfrak{p}$ un primo minimale contenente $\mathfrak{a}$ e sia $\mathfrak{m}$ un massimale contenente $\mathfrak{p}$, sia $f\colon A \to A_{\mathfrak{m}}$ l'omomorfismo canonico.

Allora $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ è primo minimale che contiene $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$, infatti se $\mathfrak{q}$ è un primo tale che $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$, si ha in A che $\mathfrak{a} \subset f^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$ e, per la corrispondenza biunivoca tra i primi di $A_{\mathfrak{m}}$ e i primi di A contenuti in $\mathfrak{m}$, per la minimalità di $\mathfrak{p}$, $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ cioè $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$. Per [5], teor. 1.1, iv) essendo $\mathfrak{a}$ invertibile $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$ è principale, quindi se a è un generatore, per la fattorialità di $A_{\mathfrak{m}}a = p_1 \dots p_n$ con i p_i primi e per la minimalità di $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ esiste un indice j tale che $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}} = p_j A_{\mathfrak{m}}$, quindi $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ è principale.

Sia ora $ht(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}) \geqslant 1$ allora esiste una successione di ideali primi $(0) \subset \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \dots \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ ma $\mathfrak{q}_1$ ha altezza 1 quindi per il teor. 3.4 è principale, sia q un suo generatore, q/p_j e q è irriducibile perciò $qA_{\mathfrak{m}} = p_j A_{\mathfrak{m}}$ cioè $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$. Allora $ht(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}) = 1$ e quindi $ht(\mathfrak{p}) = 1$.

PROPOSIZIONE 3.8 *Sia A un anello integro, sono equivalenti*:

i) *A è fattoriale.*

ii) *A è localmente fattoriale, $P(A) = 0$, vale la condizione (M) e ogni primo di altezza 1 è finitamente generato.*

DIM.

i) $\Rightarrow$ii): Ovvio dai teor. 3.4 e 3.5.

ii) $\Rightarrow$ i): Sia $\mathfrak{p}$ un primo di altezza 1, per ogni massimale $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ ha altezza 1 e, per la fattorialità di $A_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ è principale quindi per [5] teor. 1.1 $\mathfrak{p}$ è invertibile (essendo finitamente generato). Poichè $P(A) = 0$ per il teor. 3.3 $\mathfrak{p}$ è libero e perciò principale. Allora per il teorema 3.4 iii) A è fattoriale.

Applichiamo i risultati precedenti alla henselizzazione.

LEMMA 3.9. *Siano A e B anelli con $A \subseteq B$, B fedelmente piatto su A. Allora ogni elemento di A invertibile in B è invertibile in A.*

DIM. Sia $a \in A$ tale che $a^{-1} \in B$ e sia (a) l'ideale generato da a in A. $A/(a) \otimes_A B \simeq A \otimes_A B/aB = 0$ perchè $a^{-1} \in B$, per la fedele piattezza di B si ha che $A/(a) = 0$ cioè $(a) = A$, quindi $a^{-1} \in A$.

TEOREMA 3.10. *Nelle ipotesi precedenti se B è fattoriale e $P(A) = 0$ allora A è fattoriale.*

DIM. Usiamo la condizione iv) del teor. 3.4.

i) Sia $a \in A - \{0\}$, a non invertibile in A, per il lemma precedente $a^{-1} \notin B$, allora se a è riducibile in A è anche riducibile in B, sia quindi $a = b_1 \dots b_n$ la decomposizione (unica) di a in fattori irriducibili di B, sia, in A, $a = xy$ (x, y non invertibili); in B $x = b_{i_1} \dots b_{i_k}$ poichè in B $x | b_1 \dots b_n$, inoltre poichè x non è associato ad a in A (cioè y non è invertibile in A), esso non lo è neppure in B quindi esiste un indice s tale che $b_s | a$ e b_s non divide x. Se x non è irriducibile in A si decompone ulteriormente in $x = x'x''$ e esiste un $b_{i_{j'}}$ (risp. $b_{i_{j''}}$) che non divide x' (risp. x'').

Il procedimento termina dopo un numero finito di passaggi perchè i $b_1, \dots, b_n$ sono in numero finito. Ripetendo il ragionamento per y si prova che esiste in A una decomposizione di a nel prodotto di un numero finito di elementi irriducibili, cioè vale la condizione (M).

ii) Se $a, b \in A$, $aA \cap bA$ è un ideale principale. Per la piattezza di B si ha che $(aA \cap bA) \otimes_A B = aB \cap bB$ (cfr. [2], ch. I, § 2, n. 6, prop. 6) e per la fattorialità di B, $aB \cap bB$ è un ideale principale, quindi è un B-modulo proiettivo di rango 1.

Poichè B è fedelmente piatto, $aA \cap bA$ è un A-modulo proiettivo (cfr. [2], ch. I, § 3, n. 6, prop. 12) e ha rango 1 (cfr. [5], th. 1.1) ed essendo non degenere (A è integro), poichè $P(A) = 0$, si ha che $aA \cap bA$ è libero, quindi principale.

OSSERVAZIONE. Il teorema precedente era già noto nel caso che A e B fossero anelli *noetheriani* (cfr. [7], lemma 3.1).

TEOREMA 3.11. *Sia A un anello e B un sopra anello di A fedelmente piatto su A. Se B è localmente fattoriale allora A è localmente fattoriale.*

DIM. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A, per la fedele piattezza di B esiste un massimale $\mathfrak{n}$ di B tale che $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$, $B_{\mathfrak{n}}$ è fedelmente piatto su $A_{\mathfrak{m}}$ (cfr. [2], ch. II, § 3, n. 4, prop. 13) ed è fattoriale, inoltre $P(A_{\mathfrak{m}}) = 0$ perchè $A_{\mathfrak{m}}$ è locale (cfr. [2], ch. II, § 5, n. 4, prop. 5) quindi per il teor. 3.10 $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale.

Si può giungere così alla seguente:

PROPOSIZIONE 3.12. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia con $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$, ${}^h(A, \mathfrak{m}) = {}^hA$ la sua henselizzazione. Allora se ${}^hA$ è localmente fattoriale, A è localmente fattoriale.*

DIM. Poichè ${}^hA$ è fedelmente piatto su A (cfr. [4], teor. 6.5) la tesi segue subito dal teor. 3.11.

COROLLARIO 3.13. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia e supponiamo che per ogni massimale $\mathfrak{p}$ l'henselizzazione di $A_{\mathfrak{p}}$ sia fattoriale. Allora ${}^hA$ è localmente fattoriale.*

DIM. Per [4], teor. 7.4 iii) $A_{\mathfrak{p}}$ e $({}^hA)_{\mathfrak{p}^hA}$ hanno la stessa henselizzazione per ogni massimale $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$, inoltre ${}^h(A_{\mathfrak{p}})$ è fedelmente piatto su $({}^hA)_{\mathfrak{p}^hA}$: allora per la prop. 3.12 ${}^hA$ è localmente fattoriale.

TEOREMA 3.14. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia con $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$. Allora se ${}^hA$ è fattoriale A è fattoriale.*

DIM. Per il teor. 3.5 $P({}^hA) = 0$ e per [7] teor. 1.18 $P({}^hA) = P({}^hA/{}^h\mathfrak{m})$ ma poichè ${}^hA/{}^h\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$ (cfr. [4], teor. 6.1, iii)) si ha che $P(A/\mathfrak{m}) = 0$. Allora da [7], prop. 1.4 $P(A) = 0$, quindi essendo ${}^hA$ fedelmente piatto su A per il teor. 3.10 A è fattoriale.

Dalla prop. 3.7 si ha facilmente la seguente:

PROPOSIZIONE 3.15. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ C.U. (*cfr. def.* 2.18) *e supponiamo che* ${}^h(A_\mathfrak{p})$ *sia fattoriale per ogni ideale massimale* $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$. *Sono condizioni equivalenti*:

i) ${}^hA$ *è fattoriale.*

ii) *Vale la condizione* (M), *ogni primo di altezza* 1 *in* ${}^hA$ *è finitamente generato e* $P(A/\mathfrak{m}) = 0$.

DIM. Per ipotesi ${}^hA$ è integro ed è localmente fattoriale per cor. 3.13 inoltre poichè ${}^hA/{}^h\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$ e $P({}^hA) = P({}^hA/{}^h\mathfrak{m})$ si ha che $P({}^hA) = P(A/\mathfrak{m})$. La tesi segue allora facilmente dalla prop. 3.8.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. ATIYAH - I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Ser. in Math., Reading, Mass., 1969.
[2] N. BOURBAKI, *Algebre Commutative*, ch. I a VII, Hermann, Paris, 1961-65.
[3] S. GRECO, *Sulla integrità e la fattorialità dei completamenti* $\mathfrak{m}$-*adici*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36** (1966), 50-65.
[4] S. GRECO, *Henselization of a ring with respect to an ideal*, Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), 43-65.
[5] S. GRECO, *Sugli ideali frazionari invertibili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36** (1966), 315-333.
[6] S. GRECO, *Sugli omomorfismi piatti e non ramificati*, Le Matematiche, (Catania), **24** (1969), 392-415.
[7] S. GRECO - M. AREZZO, *Sul gruppo delle classi di ideali*, Ann. Scuola Norm. Sup. (Pisa), **21**, fasc. IV (1967), 459-483.
[8] S. GRECO, *Anelli Henseliani*, C.I.M.E., appunti corso tenuto a Varenna (Como), 13-21 settembre 1971.
[9] S. GRECO, *Una generalizzazione del lemma di Hensel*, Ist. Naz. di Alta Mat., Symposia Mathematica, **8** (1972), 379-386.
[10] A. GROTHENDIECK, *Elements de Geometrie Algebrique*, ch. I e IV, Publ. Math., n. 4, 20, 24 e 32, I.H.E.S., 1960-68.
[11] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience Publ., New York, 1962.
[12] P. SAMUEL, *Anneaux Factoriels*, Bull. Soc. Math., Saõ Paulo, 1962.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 luglio 1972.