RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SILVANA PETRUCCI

Sui lemmi di preparazione per gli anelli di serie ristrette

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 49 (1973), p. 125-135

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__125_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 49 (1973)

Sui lemmi di preparazione per gli anelli di serie ristrette.

SILVANA PETRUCCI (*)

SOMMARIO - Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna costituita da un anello commutativo A, un ideale $\mathfrak{m}$ di A e da una topologia lineare τ in A. Si dimostra che la prima forma del lemma di preparazione per l'anello delle serie ristrette $A\{X\}$ (ogni serie la cui ridotta modulo $\mathfrak{m}$ è un polinomio è associata ad un polinomio) vale se e solo se la terna $(A, \overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ è henseliana e gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti. La seconda forma del lemma di preparazione (« divisibilità » per una serie la cui ridotta modulo $\mathfrak{m}$ è un polinomio) sussiste invece se e solo se A è τ-completo e gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti.

SUMMARY - Let A be a commutative ring, $\mathfrak{m}$ an ideal of A, τ a linear topology in A. Then the first version of the preparation lemma for the ring of restricted power series $A\{X\}$ (a series, which is a polynomial modulo $\mathfrak{m}$, is associate with a polynomial) holds if and only if $(A, \overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ is a henselian triple and the elements of $\mathfrak{m}$ are topologically nilpotent. On the contrary, the second version of the lemma (the divisibility property for series which are polynomial modulo $\mathfrak{m}$) holds if and only if A is τ-complete and the elements of $\mathfrak{m}$ are topologically nilpotent.

1. Richiameremo in questo numero alcuni fatti generali relativi agli anelli topologici, in particolare a quelli muniti di una topologia lineare. Le nozioni che più interessano ai fini del presente lavoro sono quella di completamento rispetto ad una topologia e quella di terna henseliana data in [3] in cui intervengono gli anelli di serie ristrette. Richiameremo quindi le due versioni del lemma di preparazione per

---

(*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Durante la preparazione del presente lavoro, l'A. ha fruito di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi.

gli anelli di serie ristrette date in [2] che vogliamo caratterizzare rispettivamente in termini di terna henseliana e di anello completo colla condizione aggiuntiva che certi elementi siano topologicamente nilpotenti. Le suddette caratterizzazioni, in cui consistono i risultati essenziali del presente lavoro, sono espresse dal teorema 2 e dal teorema 3.

Sia A un anello commutativo con identità. Si dice che A è un anello topologico se A è dotato di una struttura topologica τ compatibile colla struttura di anello. Si dice che A è linearmente topologizzato (oppure che la topologia τ è lineare) se esiste un sistema fondamentale di intorni di 0 costituito da ideali di A.

Nel seguito noi considereremo esclusivamente anelli linearmente topologizzati A per i quali esiste una base numerabile per gli intorni di 0; in tal caso si può supporre che la topologia in A sia data da una successione di ideali $\mathfrak{a}_n$ ($n \in \mathrm{N}$) tali che $A = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n \supset \ldots$. Noi supporremo inoltre che la topologia sia separata, cioè sia: $\bigcap\limits_{n \in N} \mathfrak{a}_n = (0)$

Una successione $(x_n)_{n \in N}$ di elementi di A dicesi di Cauchy se, per ogni intero k, esiste un intero n_k tale che $x_m - x_n \in \mathfrak{a}_k$ per ogni $m, n \geqslant n_k$. Nell'insieme I delle successioni di Cauchy sia $\mathfrak{R}$ la relazione di equivalenza data da $(x_n)\,\mathfrak{R}(y_n) \Leftrightarrow x_n - y_n \to 0$. L'insieme $\hat{A} = I/\mathfrak{R}$ dicesi il completamento di A per la topologia τ; esso è dotato di una struttura naturale di anello e si ha un'immersione canonica $\varphi\colon A \to \hat{A}$ ponendo $\varphi(x) =$ classe di equivalenza della successione costante $x_n = x$ (si ha $\ker \varphi = \cap\, \mathfrak{a}_n = (0)$).

In modo analogo si può definire il completamento $\hat{\mathfrak{m}}$ di un ideale $\mathfrak{m}$ di A che si immerge canonicamente in $\hat{A}$. L'anello $\hat{A}$ viene munito della topologia lineare $\hat{\tau}$ data dagli ideali $\hat{\mathfrak{a}}_n$; rispetto a tale topologia $\hat{A}$ è separato ed è anche completo, cioè in $\hat{A}$ ogni successione di Cauchy converge. L'ideale $\hat{\mathfrak{m}}$ è chiuso in $\hat{A}$ essendo completo in uno spazio separato e quindi è chiuso anche in $A + \hat{\mathfrak{m}}$ (munito della topologia τ' indotta dalla $\hat{\tau}$).

Si può anche definire il completamento di un anello A, con topologia lineare $\tau = (\mathfrak{a}_n)_{n \in N}$ in modo puramente algebrico e spesso utile ai fini del nostro lavoro. Posto infatti $\tilde{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}_n$, si può provare che $\tilde{A}$ è canonicamente isomorfo a $\hat{A}$. Mediante tale isomorfismo si ottiene anche $\hat{\mathfrak{m}} \simeq \varprojlim \mathfrak{m}/(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_n) \simeq \varprojlim (\mathfrak{m} + \mathfrak{a}_n)/\mathfrak{a}_n$.

Definizione 1. Sia A un anello topologico e sia x un elemento di A. Si dice che x è *topologicamente nilpotente* se 0 è un limite della successione $(x^n)_{n \geqslant 0}$.

Se A è dotato di topologia lineare $\tau = (\mathfrak{a}_n)_{n\in N}$, l'insieme $\mathfrak{n}$ di *tutti* gli elementi topologicamente nilpotenti è un ideale chiuso di A. Se, infatti, $\varphi: A \to \hat{A}$ è l'omomorfismo canonico si ha $\mathfrak{n} = \varphi^{-1}(\varprojlim \mathfrak{n}_n)$ dove $\mathfrak{n}_n = \operatorname{nil}(A/\mathfrak{a}_n)$. Se A è separato e completo, si ha inoltre $\mathfrak{n} \subset \operatorname{rad} A$ (cfr. [1], pag. 83).

Richiamiamo ora alcune definizioni e proprietà relative alle serie ristrette.

DEFINIZIONE 2. Sia A un anello topologico e sia

$$f = \sum_{(i_1,\dots,i_r)} a_{i_1,\dots,i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}$$

una serie formale dell'anello $A[\![X_1, \dots, X_r]\!]$. La serie f si dice *ristretta* se per ogni intorno V di 0 tutti i coefficienti della serie, tranne al più un numero finito, appartengono a V.

Se A è un anello dotato di una topologia lineare $\tau = (\mathfrak{a}_n)$, le serie formali ristrette su A costituiscono un sottoanello di $A[\![X_1, \dots, X_r]\!]$ che si indica con $A\{X_1, \dots, X_r\}$. Sia $\tilde{\mathfrak{a}}_n$ l'ideale di $A\{X_1, \dots, X_r\}$ costituito da tutte le serie ristrette a coefficienti in $\mathfrak{a}_n$. Indichiamo con $\tilde{\tau}$, o semplicemente con τ se non vi è ambiguità, la topologia di $A\{X_1, \dots, X_r\}$ data dagli ideali $\tilde{\mathfrak{a}}_n$. Indichiamo invece con σ la topologia di $A\{X_1, \dots, X_r\}$ data dagli ideali $\tilde{\mathfrak{a}}_n(X_1, \dots, X_r)^k$, al variare di n, k in $\mathbb{N}^+$. Si può provare che $A\{X_1, \dots, X_r\}$ è separato e completo per σ (vedi [2], prop. 1).

Nel seguito indicheremo con $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna costituita da un anello A, da un ideale $\mathfrak{m}$ di A, e da una topologia lineare τ in A.

DEFINIZIONE 3. Una terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ si dice terna *henseliana*, oppure H-terna, se soddisfa alle condizioni seguenti:

1) $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A$;

2) per ogni serie ristretta $r \in A\{X\}$, la cui immagine canonica in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è prodotto di un polinomio unitario $\bar{p}$ e di una serie ristretta $\bar{q}$, con $\bar{p}$, $\bar{q}$ coprimi, esiste un'unica coppia (p, q) formata da un polinomio unitario $p \in A[X]$ e da una serie ristretta $q \in A\{X\}$ (tra loro coprimi) (1)

(1) La condizione che la serie q e il polinomio p siano coprimi è superflua in quanto è sempre verificata (cfr. [4], pag. 310, teor. 2). In un primo tempo Valabrega aveva chiamato terne henseliane quelle per cui la condizione suddetta non era richiesta e terne henseliane forti quelle soddisfacenti a quella condizione; successivamente Valabrega ha dimostrato l'equivalenza delle due nozioni, onde l'aggettivo «forte» è stato da noi omesso nelle definizioni.

tali che $r = pq$ e le immagini canoniche di p e q in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ siano rispettivamente $\bar{p}$ e $\bar{q}$. Inoltre, se r è un polinomio, anche q è un polinomio.

La denominazione « terna henseliana » nella def. 3 è giustificata dal seguente risultato che estende un teorema classico:

Lemma di Hensel (versione Bourbaki). *Siano A un anello separato e completo per una topologia lineare τ, $\mathfrak{m}$ un ideale chiuso di A costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Allora la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è henseliana.*

Dim. Cfr. [1], pag. 84 (vi è solo da osservare che dalle ipotesi del teorema si trae subito che $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A$).

Osservazione. P. Valabrega ha mostrato in [3] (cfr. pag. 292, teor. 5) che l'ipotesi « gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti » può essere sostituita dalla « $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia henseliana » (coppia henseliana = terna henseliana quando τ è la topologia discreta).

Diamo invece adesso l'esempio di un anello A separato e completo per una topologia τ e di un ideale $\mathfrak{m}$ non chiuso e costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Sia $A = k[\![X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots]\!]$ munito della topologia $(X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$-adica e sia $\mathfrak{m} = (X_0 - X_1, X_0 - X_2^2, \ldots, X_0 - X_n^n, \ldots)$; si ha $X_0 \notin \mathfrak{m}$, $X_0 \in \bar{\mathfrak{m}}$, dunque $\mathfrak{m}$ non è chiuso, mentre è ovvio che ogni elemento di $\mathfrak{m}$ è topologicamente nilpotente.

Diamo adesso le due versioni del lemma di preparazione per le serie ristrette dimostrate in [2] (cfr. teor. 10 e cor. 1 al teor. 11); lo scopo essenziale del presente lavoro è, come già detto all'inizio, di caratterizzare le terne $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ per cui è valido uno dei due lemmi.

Teorema. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna tale che: A è τ-completo, $\mathfrak{m}$ è chiuso e costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Si ha allora:*

1) Lemma di preparazione « prima forma »: *per ogni serie ristretta $f \in A\{X\}$ la cui serie ridotta è un polinomio unitario di grado n, esiste una ed una sola coppia (p, u) costituita da un polinomio unitario $p \in A[X]$ e da una serie ristretta invertibile $u \in A\{X\}$ tale che $f = pu$, e p ha grado n.*

2) Lemma di preparazione « seconda forma ». *Sia $f \in A\{X\}$ una serie ristretta la cui serie ridotta è un polinomio unitario di grado n. Per ogni serie $g \in A\{X\}$ esiste una ed una sola coppia costituita da una serie $h \in A\{X\}$ e da un polinomio $r \in A[X]$ di grado $\leqslant n-1$ tali che $g = hf + r$.*

2. In questo numero diamo alcune proprietà relative alle terne henseliane che serviranno per le successive applicazioni.

LEMMA 1. *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna tale che* $\mathfrak{m}$ *è costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Allora anche gli elementi di* $\hat{\mathfrak{m}}$ *sono topologicamente nilpotenti ed inoltre si ha*: $\hat{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{rad} \hat{A}$.

DIM. Si ha $\hat{\mathfrak{m}} = \varprojlim \mathfrak{m}_n$ dove $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_n$.

Poichè gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti, gli elementi di $\mathfrak{m}_n$ sono nilpotenti, per ogni $n \in \mathrm{N}$. Se infatti $\bar{x} \in \mathfrak{m}_n$, si ha $x = m + a$ con $m \in \mathfrak{m}$, $a \in \mathfrak{a}_n$; esiste allora un intero k tale che $m^k \in \mathfrak{a}_n$, da cui $x_k \in \mathfrak{a}_n$, cioè $\bar{x}^k = 0$.

Si ha quindi $\hat{\mathfrak{m}} = \varprojlim \mathfrak{m}_n \subset \varprojlim \operatorname{nil}(A/\mathfrak{a}_n) = \mathfrak{n}$ dove $\mathfrak{n}$ è l'insieme degli elementi topologicamente nilpotenti di $\hat{A}$, donde il primo asserto.

Il secondo asserto è conseguenza del primo, in quanto $\hat{A}$ è separato e completo (cfr. n° 1).

LEMMA 2. *Siano* A *un anello,* $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A *tali che* $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A$. *Se* A' *è un sottoanello di* A *contenente* $\mathfrak{m}$, *si ha* $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A'$.

DIM. Sia $x \in \mathfrak{m}$, allora esiste $z \in A$ tale che $(1 + x)z = 1$. Basta dimostrare che $z \in A'$. Poichè $z = 1 - xz \in 1 + \mathfrak{m} \subset A'$ si ha la tesi.

Il seguente lemma compare anche in [4] (cfr. proposizione 2) con l'ipotesi aggiuntiva, peraltro non sfruttata, che A sia completo. Noi preferiamo, per completezza, riscrivere la dimostrazione, aggiungendovi qualche dettaglio.

LEMMA 3. *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna henseliana. Se* A' *è un sottoanello topologico di* A *contenente* $\mathfrak{m}$, *allora la terna* $(A', \mathfrak{m}, \tau')$ *è henseliana* (τ' *essendo la topologia indotta dalla* τ *in* A').

DIM. Per ipotesi si ha $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A$ e $\mathfrak{m} \subset A'$; dal lemma 2 si trae allora $\mathfrak{m} \subset \operatorname{rad} A'$. Basta quindi provare che vale la tesi del lemma di Hensel per la terna $(A', \mathfrak{m}, \tau')$.

L'immersione $A' \to A$ e gli omomorfismi canonici $A \to A/\mathfrak{m}$, $A' \to A'/\mathfrak{m}$, $A'/\mathfrak{m} \to A/\mathfrak{m}$ possono estendersi agli anelli di serie ristrette, in modo da ottenere il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{array}{ccc} A'\{X\} & \xrightarrow{i} & A\{X\} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ (A'/\mathfrak{m})\{X\} & \xrightarrow[j]{} & (A/\mathfrak{m})\{X\} \end{array}$$

di cui $A'\{X\}$ e $(A'/\mathfrak{m})\{X\}$ possono riguardarsi come sottoanelli rispettivi di $A\{X\}$ e $(A/\mathfrak{m})\{X\}$.

Sia $r \in A'\{X\}$ tale che per $\bar{r} \in (A'/\mathfrak{m})\{X\}$ si abbia la decomposizione $\bar{r} = \overline{pq}$ con $\bar{q} \in (A'/\mathfrak{m})\{X\}$ e $\bar{p} \in (A'/\mathfrak{m})[X]$ polinomio unitario coprimo con $\bar{q}$.

La decomposizione $\bar{r} = \overline{pq}$ vale anche in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ e la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è henseliana; esiste allora un'unica coppia (p, q) con $p \in A[X]$ polinomio unitario e $q \in A\{X\}$, aventi rispettivamente immagine $\bar{p}$ e $\bar{q}$ in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ e tali che $r = pq$ in $A\{X\}$. Proviamo che i coefficienti di p e q stanno in A'.

Posto $q = \sum_0^\infty a_k X^k$, si ha $\psi(q) = \sum_0^\infty \bar{a}_k X^k = \bar{q} \in (A'/\mathfrak{m})\{X\}$ e quindi per ogni a_k esiste $a'_k \in A'$ tale che $\bar{a}_k = \bar{a}'_k$, donde $a_k - a'_k \in \mathfrak{m} \subset A'$. Ne segue $a_k \in A'$ e quindi $q \in A'\{X\}$. Analogamente si prova che $p \in A'[X]$. Inoltre la decomposizione di r in $A'\{X\}$ è unica, essendo tale la decomposizione in $A\{X\}$.

Indicheremo sempre, da ora in poi, con τ' la topologia indotta in $A + \hat{\mathfrak{m}}$ dalla topologia $\hat{\tau}$ di $\hat{A}$.

PROPOSIZIONE 1 *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna. Se $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti, allora la terna $(A + \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau')$ è henseliana.*

DIM. L'anello $\hat{A}$ è separato e completo, $\hat{\mathfrak{m}}$ è chiuso e gli elementi di $\hat{\mathfrak{m}}$ sono topologicamente nilpotenti in virtù del lemma 1; allora valgono le ipotesi, e quindi la tesi del lemma di Hensel; inoltre $\hat{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{rad} \hat{A}$, sempre in virtù del lemma 1. La terna $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\tau})$ risulta perciò henseliana.

La conclusione segue allora dal lemma 3, in quanto $A + \hat{\mathfrak{m}}$ è un sottoanello topologico di $\hat{A}$ contenente $\hat{\mathfrak{m}}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna. Sia x un elemento di $\hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_n$; esiste allora un elemento $y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_n$ tale che $x - y \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$.*

DIM. Fissato $x \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_n$, sia (y_k) una successione di elementi di $\mathfrak{m}$ tale che $x = \lim y_k$. Si ha allora $x - y_k \in \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$ se $k \geqslant k_n$. Sia $y = y_k$, per un certo $k \geqslant k_n$; poichè $y \in \mathfrak{m} \subset \hat{\mathfrak{m}}$ e $x \in \hat{\mathfrak{m}}$ si ha: $x - y \in \hat{\mathfrak{m}}$ e inoltre $x - y \in \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$, quindi $x - y \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$. Dalle relazioni $x \in \hat{\mathfrak{a}}_n$, $x - y \in \hat{\mathfrak{a}}_{n+1} \subset \hat{\mathfrak{a}}_n$, segue $y \in \hat{\mathfrak{a}}_n \cap A = \mathfrak{a}_n$ (in quanto $\mathfrak{a}_n$ è chiuso) e quindi $y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_n$ come volevasi.

3. In questo numero vogliamo caratterizzare le terne $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ che soddisfano alla prima forma del lemma di preparazione per le serie ristrette.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna per cui valga il 1° lemma di preparazione per le serie ristrette; allora gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti.*

DIM. Sia m un elemento di $\mathfrak{m}$; posto $f(X) = 1 - mX$, $f(X)$ è una serie ristretta avente immagine canonica $\bar{f} = \bar{1}$ in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$. Poichè la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa al 1° lemma di preparazione per ipotesi, $f(X)$ è invertibile in $A\{X\}$; ciò comporta che $g(X) = \sum\limits_0^\infty m^k X^k \in A[\![X]\!]$ sia una serie ristretta. Ne deriva che $\lim m^k = 0$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 4. *Se $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è una terna per cui vale il 1° lemma di preparazione, la terna $(A + \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau')$ è henseliana.*

DIM. Gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti in virtù della prop. 3; valgono quindi le ipotesi della prop. 1, dalla quale si trae l'asserto.

LEMMA 4. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna per cui valga la 1ª forma del lemma di preparazione per le serie ristrette. Se $f(X) = \sum\limits_0^\infty a_k X^k$ è una serie ristretta la cui serie ridotta in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è un polinomio unitario di grado n e se (p, u) è la coppia che dà la decomposizione di $f(X)$ si ha: $p(X) = X^n + \sum\limits_0^{n-1} (a_k + m_k) X^k$ con $m_k \in \overline{\mathfrak{m}}$ e $u(X) = \sum\limits_0^\infty b_k X^k$ con $b_0 \in 1 + \overline{\mathfrak{m}}$ e $b_k \in \overline{\mathfrak{m}}$ per $k \geqslant 1$.*

DIM. Indichiamo con $\bar{f}$, $\bar{p}$, $\bar{u}$ le serie ridotte in $(A/\overline{\mathfrak{m}})\{X\}$ di f, p, u rispettivamente. Vale l'uguaglianza $\bar{f} = \bar{p}\bar{u}$ dove $\bar{f}$ è un polinomio unitario di grado n, poichè è tale la serie ridotta di f in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$, ed anche $\bar{p}$ è un polinomio unitario di grado n, essendo tale $p \in A[X]$.

Poichè $A/\overline{\mathfrak{m}}$ è separato, si può applicare il lemma 7 di [2] alla decomposizione $\bar{f} = \bar{p}\bar{u}$; si deduce che $\bar{u} = \bar{1}$ e, di conseguenza, che $\bar{f} = \bar{p}$. Dalle due uguaglianze ottenute si ha subito l'asserto.

TEOREMA 1. *Se la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa al 1° lemma di preparazione, vale l'uguaglianza $\overline{\mathfrak{m}} = \hat{\mathfrak{m}}$.*

DIM. È sufficiente provare l'inclusione $\hat{\mathfrak{m}} \subset \overline{\mathfrak{m}}$, in cui quanto l'inclusione opposta è diretta conseguenza delle definizioni di chiusura e di completamento di un ideale.

Sia dunque $y \in \hat{\mathfrak{m}}$. Allora $1 + y$ è invertibile in $A + \hat{\mathfrak{m}}$ in quanto dalla prop. 4 si trae in particolare $\hat{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{rad}(A + \hat{\mathfrak{m}})$. Posto $z = 1 + y$, si ha allora $1 = z^{-1}(1 + y)$ da cui $1 - z^{-1} \in \hat{\mathfrak{m}}$.

Poniamo $h(X) = 1 + y + X$. Ci proponiamo di determinare una successione $\{b_n\}$ di elementi di $A + \hat{\mathfrak{m}}$ tale che, posto $g(X) = z^{-1} + b_1 X + + \ldots b_n X^n + \ldots$ si abbia $g(X) \in (A + \hat{\mathfrak{m}})\{X\}$ (anello di serie ristrette rispetto alla topologia τ') e $h(X) g(X) \in A\{X\}$.

Poniamo $b_1 = (1 - z^{-1}) z^{-1}$, da quanto precede risulta $b_1 \in \hat{\mathfrak{m}} = \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_0$. Dalla prop. 2 si deduce l'esistenza di un elemento $a_1 \in \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_0$ tale che $a_1 - b_1 \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_1$. Poniamo adesso $b_2 = (a_1 - b_1) z^{-1}$ e si ha quindi $b_2 \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_1$.

Procediamo ora per induzione; cioè, determinato $b_{n-1} \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n-2}$, poniamo $b_n = (a_{n-1} - b_{n-1}) z^{-1}$ dove a_{n-1} è un elemento di $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_{n-2}$ tale che $a_{n-1} - b_{n-1} \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n-1}$ (l'esistenza di a_{n-1} è assicurata sempre dalla prop. 2); si ottiene pertanto $b_n \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n-1}$.

La serie $g(X)$ è ristretta per costruzione; inoltre, mediante calcolo diretto, si verifica che, posto $f(X) = h(X) g(X)$, si ha $f(X) = 1 + X + + a_1 X^2 + \ldots a_{n-1} X^n + \ldots$, da cui risulta che $f(X)$ è una serie ristretta a coefficienti in A, in quanto a_n è un elemento di $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_{n-1}$ per ogni n.

Poichè la terna $(A + \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau')$ è henseliana in virtù della prop. 4 e la serie ridotta di $f(X)$ in $(A + \hat{\mathfrak{m}}/\hat{\mathfrak{m}})\{X\}$ è $\bar{1} + X$, $f(X)$ si decompone in $(A + \hat{\mathfrak{m}})\{X\}$ in modo unico nel prodotto di un polinomio unitario e di una serie ristretta aventi rispettivamente immagini $\bar{1} + X$ e $\bar{1}$ in $(A + \hat{\mathfrak{m}}/\hat{\mathfrak{m}})\{X\}$. Ora il polinomio e la serie suddetti sono proprio $h(X)$ e $g(X)$; infatti la serie ridotta di $h(X) = 1 + y + X$ è $\bar{1} + X$ e la ridotta di $g(X)$ è $\bar{1}$ in quanto $z^{-1} \in 1 + \hat{\mathfrak{m}}$ e $b_n \in \hat{\mathfrak{m}}$ per ogni n.

Applichiamo il lemma 4 alla serie $f(X) \in A\{X\}$; otteniamo una decomposizione $f(X) = (1 + m + X) u(X)$ dove $m \in \overline{\mathfrak{m}}$ e le ridotte rispetrispettive di $1 + m + X$ e $u(X)$ in $(A/\overline{\mathfrak{m}})\{X\}$ (e quindi anche in $(A + \hat{\mathfrak{m}}/\hat{\mathfrak{m}})\{X\}$) sono $\bar{1} + X$ e $\bar{1}$. Dalla unicità della decomposizione di $f(X)$ in $(A + \hat{\mathfrak{m}})\{X\}$ si trae allora $h(X) = 1 + y + X = 1 + m + X$ da cui segue $y = m \in \overline{\mathfrak{m}}$, cioè $\hat{\mathfrak{m}} \subset \overline{\mathfrak{m}}$, c.v.d

TEOREMA 2. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna. Sono condizioni equivalenti:*

i) *il primo lemma di preparazione vale per la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$;*

ii) *la terna $(A, \overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ è henseliana e l'ideale $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti.*

DIM. Se vale la condizione i), l'ideale $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti in virtù della prop. 3. Inoltre la terna $(A+\hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau')$, che risulta henseliana per la prop. 4, coincide con la terna $(A, \overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ in virtù del teor. 1. È così provata la prima implicazione.

Dimostriamo ora che ii) implica i). La dimostrazione ricalca sostanzialmente quella data nel teor. 10 di [2].

Sia $f(X) \in A\{X\}$ una serie ristretta la cui serie ridotta in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è un polinomio unitario di grado n; allora la serie ridotta $\bar{f}(X) \in (A/\overline{\mathfrak{m}})\{X\}$ è ancora un polinomio unitario di grado n. Dall'ipotesi che la terna $(A, \overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ è henseliana e dalla decomposizione $\bar{f} = \bar{f} \cdot \bar{1}$ in $(A/\overline{\mathfrak{m}})\{X\}$ seguono l'esistenza e l'unicità di un polinomio $p(X) \in A[X]$ e di una serie $u(X) \in A\{X\}$ tali che $f(X) = p(X)u(X)$ e $\bar{f} = \bar{p}$, $\bar{u} = \bar{1}$ in $(A/\overline{\mathfrak{m}})\{X\}$.

Posto $u(X) = \sum_0^\infty u_k X^k$ si ha $u_0 \in 1 + \overline{\mathfrak{m}}$, $u_k \in \overline{\mathfrak{m}}$ se $k \geqslant 1$. Si ha per ipotesi $\overline{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{rad} A$ e quindi u_0 è invertibile in A; inoltre, se $\mathfrak{n}$ è l'ideale di tutti gli elementi topologicamente nilpotenti, $\mathfrak{n}$ è chiuso (cfr. n° 1) e quindi, poichè $\overline{\mathfrak{m}} \subset \overline{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$, anche $\overline{\mathfrak{m}}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti. La serie $u(X)$ è pertanto invertibile ([2], prop. 2).

L'unicità della decomposizione $f(X) = p(X)u(X)$ si dimostra poi come nel teor. 10 di [2] (sostituendo a $\mathfrak{m}$ la chiusura $\overline{\mathfrak{m}}$).

4. In questo numero caratterizziamo mediante il teorema 3 le terne che soddisfano al secondo lemma di preparazione.

PROPOSIZIONE 5. *Se $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è una terna per cui vale il 2° lemma di preparazione, gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti.*

DIM. Sia m un elemento di $\mathfrak{m}$. Posto $f(X) = 1 - mX$, l'immagine canonica della serie $f(X)$ in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è $\bar{f}(X) = \bar{1}$. Per ipotesi vale il 2° lemma di preparazione; esiste quindi una serie $h(X) \in A\{X\}$ tale che $1 = (1 - mX)h(X)$, in quanto il resto è necessariamente nullo. Ne segue $h(X) = \sum_0^\infty m^k X^k$, onde la serie $\sum_0^\infty m^k X^k$ è ristretta e quindi $\lim m^k = 0$ come volevasi.

PROPOSIZIONE 6. *Se $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è una terna per cui vale il 2° lemma di preparazione, l'anello A è completo per la topologia τ.*

DIM. Sia $(a_n)_{n \in N}$ una successione di Cauchy di elementi di A; per ogni intero k esiste un intero n_k tale che $a_{n+1} - a_n \in \mathfrak{a}_k$ se $n \geqslant n_k$.

Se poniamo $f_n(X) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})X^k$, la successione $(f_n(X))_{n\in N}$ è una successione di Cauchy per la topologia σ di $A\{X\}$ (cfr. n° 1). Infatti, comunque fissati due interi k ed r, se $n \geqslant \max(n_k, r)$ si ha $f_{n+1}(X) - f_n(X) = (a_{n+1} - a_n)X^{n+1} \in \mathfrak{a}_k X^{n+1} \subset \tilde{\mathfrak{a}}_k X^r$. L'anello $A\{X\}$ è separato e completo per σ (cfr. n° 1), esiste quindi, ed è unica, una serie $f(X) \in A\{X\}$ tale che $f(X) = \lim_{n\to\infty} f_n(X)$ (nella topologia σ e quindi anche nella topologia $\tilde{\tau}$).

L'immersione canonica $\varphi: A \to \hat{A}$ si estende ad un unico omomorfismo continuo $u: A\{X\} \to \hat{A}$ tale che $u(a) = a$ per ogni elemento $a \in A$ e $u(X) = 1$ (cfr. [1], prop. 4, pag. 82). Dalla continuità di u e dal fatto che $f_n(X) \to f(X)$ si deduce che $f_n(1) \to u(f) \in \hat{A}$, cioè che $a_n \to u(f) \in \hat{A}$.

Per ipotesi la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa al 2° lemma di preparazione; esistono quindi $h(X) \in A\{X\}$ ed $r \in A$ tali che $f(X) = (X-1)h(X) + r$. Dal confronto delle immagini secondo u dei due membri della relazione precedente si trae: $u(f) = u(r) = r \in A$. Possiamo quindi concludere che $a_n \to u(f) = r \in A$, cioè che l'anello A è completo per τ.

TEOREMA 3. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna. Sono condizioni equivalenti:*

i) *il secondo lemma di preparazione vale per la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$;*

ii) *l'anello A è completo per la topologia τ e l'ideale $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti.*

DIM. Se vale la condizione i), l'anello A è completo in virtù della prop. 6 e l'ideale $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti in virtù della prop. 5.

Supponiamo ora che valga ii).

Segue subito dal teorema 2 che per la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ vale il 1° lemma di preparazione. Infatti, come già osservato, gli elementi di $\overline{\mathfrak{m}}$ sono topologicamente nilpotenti e di conseguenza la terna $(A, \overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ è henseliana (lemma di Hensel).

Ogni serie $f \in A\{X\}$, la cui immagine in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è un polinomio unitario di grado n, si decompone pertanto, in modo unico, nel prodotto di un polinomio unitario $p \in A[X]$ di grado n e di una serie invertibile $u \in A\{X\}$. Ne segue $p = fu^{-1}$.

Siano ora rispettivamente $h \in A\{X\}$ e $r \in A[X]$ la serie ristretta e il polinomio di grado inferiore ad n che verificano la relazione $g = ph + r$ (cfr. [2], teor. 11). Si ha allora $g = f(u^{-1}h) + r$; tale decomposizione di g è unica, essendo unica la decomposizione di f. La terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa pertanto alla condizione i) ed il teorema è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, Capp. III, IV, Hermann, Paris, 1961.
[2] P. SALMON, *Sur les series formelles restreintes*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 385-410.
[3] P. VALABREGA, *Anelli henseliani topologici, I*, Annali di Matematica pura e applicata, **4** (1972), 283-303.
[4] P. VALABREGA, *Anelli henseliani topologici, II*, Annali di Matematica pura e applicata, **4** (1972), 305-316.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 luglio 1972.