

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA GRAZIA MARINARI

**Successioni di Gorenstein e proprietà  $G_n$**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 48 (1972), p. 67-93

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1972\\_\\_48\\_\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__67_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUCCESSIONI DI GORENSTEIN E PROPRIETÀ $\mathbf{G}_n$

MARIA GRAZIA MARINARI \*)

### Introduzione.

È noto che un anello locale noetheriano  $A$  è di Gorenstein se e solo se:

(i)  $A$  è di Macaulay, ossia esiste un sistema di parametri di  $A$  che forma un' $A$ -successione;

(ii) ogni sistema di parametri di  $A$  genera un ideale irriducibile, ossia un ideale che non è intersezione di altri due ideali che lo contengono propriamente.

Si può inoltre dimostrare che se  $A$  è di Gorenstein, ogni ideale generato da un' $A$ -successione ha le componenti primarie (isolate) irriducibili. Ciò suggerisce di definire le « successioni di Gorenstein » di un anello  $A$  ( $\mathbf{G}$ -successioni di  $A$ ) e di studiarne le proprietà ispirandosi alle analogie esistenti tra gli anelli di Macaulay e di Gorenstein. Ad esempio, mediante le  $\mathbf{G}$ -successioni si possono definire la  $\mathbf{G}$ -profondità e la proprietà  $\mathbf{G}_n$  (analoghe alla profondità e alla proprietà  $S_n$  definite mediante le  $A$ -successioni) il cui studio è lo scopo principale di questo lavoro.

Da quanto precede risulta chiaro che i problemi riguardanti le  $\mathbf{G}$ -successioni sono in gran parte riconducibili all'irriducibilità di certi ideali.

Per questo motivo nel paragrafo 1 abbiamo studiato alcuni fatti riguardanti tali ideali con particolare riferimento alla localizzazione e alla discesa per fedele piattezza degli ideali irriducibili.

---

\*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica, Via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

Nei paragrafi 2 e 3 abbiamo studiato alcune proprietà delle  $\mathbf{G}$ -successioni tra le quali la localizzazione, il passaggio dal locale al globale, la discesa per fedele piatezza e l'incondizionamento. Finora però abbiamo provato quest'ultima proprietà delle  $\mathbf{G}$ -successioni solo per gli anelli locali che verificano la condizione  $\dim A = \dim A/\mathfrak{p} + \dim A_{\mathfrak{p}}$  per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  mentre è probabile che siano sufficienti ipotesi meno restrittive e che si possa provare anche un risultato più forte e cioè che in un anello locale (eventualmente soddisfacente ulteriori ipotesi da determinare) tutte le  $\mathbf{G}$ -successioni massimali hanno la stessa lunghezza.

Abbiamo quindi definito la  $\mathbf{G}$ -profondità di un anello locale caratterizzando gli anelli  $A$  locali di Gorenstein mediante la relazione  $\mathbf{G}\text{-prof } A = \dim A$ .

Nel paragrafo 4 abbiamo definito la proprietà  $\mathbf{G}_n$  di un anello  $A$  (analoga alla ben nota proprietà  $S_n$ ) mediante la condizione:  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq \min(n, ht \mathfrak{p})$  per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$ , ed altre formulazioni equivalenti cercando di provare al riguardo risultati analoghi a quelli ben noti per la proprietà  $S_n$ .

Infine nel paragrafo 5 abbiamo esaminato il comportamento della proprietà  $\mathbf{G}_n$  rispetto ad omomorfismi piatti e fedelmente piatti di anelli provando come tale comportamento risulti del tutto simile a quello della proprietà  $S_n$ .

Tutti gli anelli considerati in questo lavoro sono commutativi con unità e, salvo avviso contrario, noetheriani.

## 1. Ideali irriducibili.

In questo paragrafo ricordiamo la definizione di ideale irriducibile ed alcuni fatti noti che sussistono riguardo a tali ideali in un anello noetheriano dando inoltre qualche proprietà relativa al passaggio ad anelli di frazioni ed al comportamento rispetto ad omomorfismi (fedelmente) piatti.

**DEFINIZIONE 1.1.** Siano  $A$  un anello, non necessariamente noetheriano, e  $\mathfrak{q}$  un ideale di  $A$ , si dice che  $\mathfrak{q}$  è *irriducibile* se  $\mathfrak{q}$  è proprio e se  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{q}''$  implica che  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$  oppure che  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}''$ .

In un anello  $A$  noetheriano sussistono i seguenti fatti noti (cfr. [14])

vol. I Ch. IV § 4 e [7] § 5):

(a<sub>1</sub>) Ogni ideale irriducibile è primario.

(b<sub>1</sub>) Un ideale  $\mathfrak{q}$  primario tale che  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$  è irriducibile se e soltanto se non esistono due ideali  $\mathfrak{p}$ -primari  $\mathfrak{q}'$  e  $\mathfrak{q}''$  diversi da  $\mathfrak{q}$  e tali che  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{q}''$ .

(c<sub>1</sub>) Un ideale  $\mathfrak{q}$  primario tale che  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$  è irriducibile se e soltanto se  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$  è irriducibile, se e soltanto se  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{m}}$  è irriducibile per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m}$  contenente  $\mathfrak{q}$ .

Dimostriamo per prima cosa come l'irriducibilità di un ideale si conservi per passaggio ad anelli di frazioni (ciò servirà in seguito per provare la localizzazione delle  $\mathbf{G}$ -successioni (cfr. § 2)).

**PROPOSIZIONE 1.2.** *Siamo  $A$  un anello,  $S$  una parte moltiplicativa di  $A$  e  $\mathfrak{q}$  un ideale irriducibile di  $A$  tale che  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ . Allora,  $\mathfrak{q}S^{-1}A$  è irriducibile in  $S^{-1}A$  se  $\bar{S} \cap \mathfrak{q} = \emptyset$  ( $\bar{S}$  saturata di  $S$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Nelle ipotesi della proposizione 1.2 esiste un isomorfismo tra  $A_{\mathfrak{p}}$  ed  $(S^{-1}A)_{\mathfrak{p}S^{-1}A}$  (cfr. [3] ch. II § 2 n. 5 prop. 11, p. 91);  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$  è irriducibile in  $A_{\mathfrak{p}}$  (cfr. (c<sub>1</sub>)) e quindi, in virtù dell'isomorfismo citato sopra, è tale  $\mathfrak{q}(S^{-1}A)_{\mathfrak{p}S^{-1}A}$  in  $(S^{-1}A)_{\mathfrak{p}S^{-1}A}$ . La tesi segue allora da (c<sub>1</sub>) in quanto  $\mathfrak{p}S^{-1}A$  è il radicale di  $\mathfrak{q}S^{-1}A$  nell'anello  $S^{-1}A$  essendo per ipotesi  $\mathfrak{q} \cap \bar{S} = \emptyset$  (cfr. [14] vol. 1 Ch. IV § 10 th. 16 p. 224).

Proviamo quindi alcune proprietà relative al comportamento degli ideali irriducibili rispetto ad omomorfismi fedelmente piatti richiamando alcune delle definizioni essenziali della teoria dei moduli piatti e fedelmente piatti (cfr. [3] Ch. I § 2, 3 e [6] § 4, 6).

(d<sub>1</sub>) Un  $A$ -modulo  $E$  dicesi piatto se per ogni sequenza esatta di  $A$ -moduli  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  è esatta la corrispondente sequenza  $E \otimes M' \rightarrow E \otimes M \rightarrow E \otimes M''$ . Se è vero anche il viceversa  $E$  dicesi fedelmente piatto.

(e<sub>1</sub>) Un omomorfismo di anelli  $\varphi: A \rightarrow B$  dicesi (fedelmente) piatto se  $\varphi$  induce su  $B$  la struttura di  $A$ -modulo (fedelmente) piatto.

**PROPOSIZIONE 1.3.** *Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente*

di anelli e sia  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ . Allora, se  $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}B$  è irriducibile in  $B$  anche  $\mathfrak{a}$  è irriducibile in  $A$ .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che  $\mathfrak{a}$  sia riducibile in  $A$ , cioè che si possa scrivere in  $A$  una relazione: (\*)  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}''$  con  $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}'$  e  $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}''$ , dalla fedele piattezza di  $B$  su  $A$  si ricavano le seguenti relazioni:

$$\alpha) \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}'^e \cap \mathfrak{a}''^e;$$

$\beta) \mathfrak{a}^e \subsetneq \mathfrak{a}'^e$  e  $\mathfrak{a}^e \subsetneq \mathfrak{a}''^e$  (se fosse infatti  $\mathfrak{a}^e \supseteq \mathfrak{a}'^e$  od  $\mathfrak{a}^e \supseteq \mathfrak{a}''^e$  si avrebbe  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec} \supseteq \mathfrak{a}'^{ec} = \mathfrak{a}'$  od  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec} \supseteq \mathfrak{a}''^{ec} = \mathfrak{a}''$  contro l'ipotesi (\*) fatta sopra).

Essendo però per ipotesi  $\mathfrak{a}^e$  irriducibili in  $B$  le relazioni  $\alpha)$  e  $\beta)$  danno luogo ad una contraddizione e quindi  $\mathfrak{a}$  deve essere irriducibile in  $A$ .

Ci proponiamo ora di dimostrare (teor. 1.6) che, nelle ipotesi della proposizione 1.3, se le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}B$  sono irriducibili, tali sono le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}$ . A tale scopo mettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1.4. Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente piatto di anelli e sia  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ . Allora, un ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  è un primo isolato di  $\mathfrak{a}$  se e soltanto se esiste un ideale primo  $\mathfrak{P} \subset B$  che è un primo isolato di  $\mathfrak{a}B$  ed è tale che  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che l'omomorfismo  $\bar{\varphi}: A/\mathfrak{a} \rightarrow B/\mathfrak{a}B$  è fedelmente piatto poiché  $\varphi: A \rightarrow B$  è fedelmente piatto (cfr. [3] ch. I § 3 n. 3 cor. prop. 5 p. 48) e che  $\mathfrak{p} \subset A$  è un primo isolato di  $\mathfrak{a}$  se e soltanto se  $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$  è un primo minimale dell'anello  $A/\mathfrak{a}$  (similmente per  $\mathfrak{P} \subset B$ ). Pertanto, per provare la tesi, basta provare che se  $\varphi: A \rightarrow B$  è un omomorfismo fedelmente piatto di anelli, un ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  è minimale se e soltanto se esiste un ideale primo minimale  $\mathfrak{P} \subset B$  tale che  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ . Supponiamo allora che  $\mathfrak{p}$  sia un primo minimale di  $A$ , poiché  $\varphi$  è iniettivo (cfr. [3] Ch. I § 3 n. 5 Prop. 9 p. 51), la tesi discende immediatamente dalla proposizione 16 di [3] Ch. II § 2 n. 6 p. 96. Viceversa, supponiamo che  $\mathfrak{P}$  sia un primo minimale di  $B$  e che sia  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ , l'omomorfismo  $\psi: A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{P}}$  indotto da  $\varphi$  è piatto e locale (cfr. [1] ch. III ex. 18 p. 46 e [3] ch. II § 3 n. 1 remarque 4 p. 105) e quindi risulta:  $\dim B_{\mathfrak{P}} = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$  (cfr. [4]

th. 5.1 p. 84). Dalla condizione  $\mathfrak{P}$  minimale in  $B$  ossia  $\dim B_{\mathfrak{P}} = 0$  si ricava subito  $\dim A_{\mathfrak{p}} = 0$  ossia  $\mathfrak{p}$  minimale in  $A$  come voluto.

Dal lemma 1.4 si può dedurre un'utile proprietà del comportamento delle rappresentazioni primarie irridondanti di un ideale rispetto ad omomorfismi fedelmente piatti.

Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente piatto di anelli e sia  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ . Supponiamo che  $\mathfrak{a}B = \mathbb{Q}_1 \cap \dots \cap \mathbb{Q}_s \cap \dots \cap \mathbb{Q}_r$  sia una rappresentazione primaria irridondante di  $\mathfrak{a}B$  con  $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_s$  componenti primarie isolate aventi come radicali rispettivamente  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ . Contraendo ad  $A$  tale decomposizione primaria irridondante di  $\mathfrak{a}B$  si ottiene una decomposizione primaria di  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}B \cap A = \mathbb{Q}_1 \cap \dots \cap \mathbb{Q}_s \cap \dots \cap \mathbb{Q}_r$  che ovviamente può non risultare irridondante: in questo caso le si associa con un metodo standard una decomposizione primaria ridotta  $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m$  dove  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$  sono le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}$  ed hanno come radicali rispettivamente  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  che, per ogni indice  $i, 1 \leq i \leq r$  soddisfano una relazione  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_{j(i)} \cap A$ ,  $\mathfrak{P}_{j(i)}$  essendo il radicale della componente primaria isolata  $\mathbb{Q}_{j(i)}$  di  $\mathfrak{a}B$ . A noi interessa provare che se  $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_s$  sono irriducibili, anche  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$  sono tali. Il risultato voluto discende dal lemma 1.4 e dal seguente:

LEMMA 1.5. Siano  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente piatto di anelli,  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ ,  $\mathfrak{q}$  una componente primaria isolata di  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ . Siano inoltre  $\mathfrak{P}$  un primo minimale di  $\mathfrak{a}B$  tale che  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$  (cfr. lemma 1.4) e  $\mathbb{Q}$  la componente primaria isolata di  $\mathfrak{a}B$  relativa a  $\mathfrak{P}$ . Allora

- i)  $\mathbb{Q}B_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})B_{\mathfrak{P}}$ ;
- ii) Se  $\mathbb{Q}$  è irriducibile in  $B$ , anche  $\mathfrak{q}$  è irriducibile in  $A$ .

DIMOSTRAZIONE i). Sussistono le due relazioni seguenti:

- α)  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$  (cfr. [7] prop. 5.5. p. 14);
- β)  $\mathbb{Q}B_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{a}B)B_{\mathfrak{P}}$  (cfr. [7] prop. 5.5 p. 14);

dalle quali si trae immediatamente quanto voluto poiché risulta:

$$(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})B_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}})B_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{a}B)B_{\mathfrak{P}} = \mathbb{Q}B_{\mathfrak{P}}$$

ii) sussistono i seguenti fatti:

$\alpha'$ )  $\mathbb{Q}$  irriducibile in  $B$  se e soltanto se  $\mathbb{Q}B_{\mathfrak{P}}$  irriducibile in  $B_{\mathfrak{P}}$  (cfr. (c<sub>1</sub>));

$\beta'$ )  $\mathbb{Q}B_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})B_{\mathfrak{P}}$  (cfr. i);

$\gamma'$ ) se  $(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})B_{\mathfrak{P}}$  è irriducibile in  $B_{\mathfrak{P}}$  allora  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$  è irriducibile in  $A_{\mathfrak{p}}$  (cfr. prop. 1.3 e dimostrazione lemma 1.4);

$\delta'$ )  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$  è irriducibile in  $A_{\mathfrak{p}}$  se e soltanto se  $\mathfrak{q}$  è irriducibile in  $A$  (cfr. (c<sub>1</sub>));

i quali complessivamente permettono di dedurre dalla condizione  $\mathbb{Q}$  irriducibile in  $B$  la condizione voluta,  $\mathfrak{q}$  irriducibile in  $A$ .

Dimostriamo dunque il teorema che attesta, nelle solite ipotesi di fedele piatezza di  $B$  su  $A$ , come l'irriducibilità delle componenti primarie isolate di un ideale  $\mathfrak{a} \subsetneq A$  discenda dalla eventuale medesima proprietà delle componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}B \subsetneq B$ .

**TEOREMA 1.6.** *Sia  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente piatto di anelli e sia  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ . Allora, se le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}B$  sono irriducibili, anche le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}$  sono tali.*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi segue facilmente applicando i lemmi 1.4 e 1.5 alle componenti primarie isolate degli ideali  $\mathfrak{a}$  ed  $\mathfrak{a}B$ .

Ricordiamo infine la definizione di **G-ideale** (cfr. [7] § 5) ed enunciamo al riguardo un risultato che è diretta conseguenza dei fatti visti sopra e che sarà utile nel seguito.

**DEFINIZIONE 1.7.** Siano  $A$  un anello ed  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ ,  $\mathfrak{a}$  dicesi **G-ideale** se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i)  $\mathfrak{a}$  è puro;

ii) le componenti primarie di  $\mathfrak{a}$  sono irriducibili.

**PROPOSIZIONE 1.8.** *Sia  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente piatto di anelli, e sia  $\mathfrak{a}$  un ideale proprio di  $A$ . Se  $\mathfrak{a}B$  è un **G-ideale** in  $B$ , anche  $\mathfrak{a}$  è un **G-ideale** in  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dall'ipotesi che  $\mathfrak{a}B$  sia un  $\mathbf{G}$ -ideale in  $B$  segue in particolare che esso è puro, pertanto applicando il lemma 1.4 si ricava che anche  $\mathfrak{a}$  è tale, la tesi discendente allora come conseguenza immediata dal teorema 1.6.

## 2. $\mathbf{G}$ -successioni.

Introduciamo in questo numero il concetto di  $\mathbf{G}$ -successione studiandone alcune proprietà fondamentali. Le  $\mathbf{G}$ -successioni, che utilizzeremo per caratterizzare gli anelli di Gorenstein e la proprietà  $\mathbf{G}_n$ , sono una particolarizzazione delle ben note  $A$ -successioni che servono per caratterizzare gli anelli di Macaulay e la proprietà  $S_n$  (cfr. [14] vol. II app. 6, [5] § 1, 3, e [4] § 4).

In particolare, alla fine di questo numero daremo alcuni risultati che mostrano come il concetto di  $\mathbf{G}$ -successione è connaturato a quello di anello di Gorenstein.

Ricordiamo per comodità alcuni fatti noti e rimandiamo a [4], [5], [14] loc. cit. per una trattazione completa.

(a<sub>2</sub>)  $a_1, \dots, a_n$  elementi di un anello  $A$  tali che  $(a_1, \dots, a_n) \neq A$ , formano una  $A$ -successione se  $a_1$  non è zero divisore e se per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , si ha  $(a_1, \dots, a_{i-1}) : a_i = (a_1, \dots, a_{i-1})$ .

(b<sub>2</sub>) In un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  dicesi profondità di  $A$  (prof  $A$ ) il massimo numero di elementi di  $\mathfrak{m}$  formati un' $A$ -successione (risulta  $\text{prof } A \leq \dim A$  essendo  $\dim A$  la dimensione di Krull di  $A$ ).

(c<sub>2</sub>) Un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  dicesi anello locale di Macaulay se risulta  $\text{prof } A = \dim A$ .

(d<sub>2</sub>) Un anello  $A$  tale che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  risulta,  $\text{prof } A_{\mathfrak{p}} \geq \min(n, \dim A_{\mathfrak{p}})$  dicesi anello verificante la proprietà  $S_n$  di Serre.

**DEF. 2.1.** Siano  $a_1, \dots, a_n$  elementi di un anello  $A$ . Si dice che  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione se sono verificate le seguenti condizioni:

- i)  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $A$ -successione;
- ii) per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , le componenti primarie isolate dell'ideale  $\mathfrak{a}_i = (a_1, \dots, a_i)$  sono irriducibili.



Si dice invece che  $a_1, \dots, a_n$  formano una **G**-successione debole se anziché ii) è verificata la condizione:

ii') le componenti primarie isolate dell'ideale  $\mathfrak{a}_n = (a_1, \dots, a_n)$  sono irriducibili.

Dalla definizione 2.1 si ricava immediatamente la seguente:

**Proposizione 2.2.** *Siano  $a_1, \dots, a_n$  elementi di un anello  $A$  generanti un ideale proprio. Sono condizioni equivalenti:*

- i)  $a_1, \dots, a_n$  formano una **G**-successione
- ii)  $a_1, \dots, a_i$  formano una **G**-successione per ogni indice  $i, 1 \leq i \leq n$
- iii)  $a_1, \dots, a_i$  formano una **G**-successione debole per ogni indice  $i, 1 \leq i \leq n$ .

Diamo ora una proposizione che stabilisce un criterio di passaggio dal locale al globale per le **G**-successioni.

**PROPOSIZIONE 2.3.** *Siano  $a_1, \dots, a_n$  elementi di un anello  $A$  contenuti nel radicale di Jacobson (\*) di  $A$ . Se per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m} \subset A$ , le immagini di  $a_1, \dots, a_n$  nell'omomorfismo canonico  $\psi: A \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$  formano una **G**-successione in  $A_{\mathfrak{m}}$ , allora  $a_1, \dots, a_n$  formano una **G**-successione in  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dall'ipotesi risulta in particolare che per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m} \subset A$  e per ogni indice  $i, 1 \leq i \leq n$  l'ideale  $(a_1, \dots, a_i)A_{\mathfrak{m}}$  ha le componenti primarie isolate irriducibili, da questo fatto (cfr. (c<sub>1</sub>)) discende che per ogni indice  $i, 1 \leq i \leq n$  le componenti primarie isolate di  $(a_1, \dots, a_i)A$  sono irriducibili e tanto basta a provare la tesi poiché si ricava facilmente dal corollario 3 (i) di [3] ch. II § 3 n. 3 p. 112 che  $a_1, \dots, a_n$  costituiscono un' $A$ -successione.

---

\*) Ricordiamo che dicesi radicale di Jacobson di un anello  $A$  (in simboli  $\text{rad } A$ ), l'intersezione di tutti gli ideali massimali di  $A$  (cfr. [10], p. 51).

Dimostriamo quindi una proposizione riguardante la « localizzazione » delle  $\mathbf{G}$ -successioni.

**PROPOSIZIONE 2.4.** *Siano  $a_1, \dots, a_n$  elementi di un anello  $A$  formanti una  $\mathbf{G}$ -successione, e sia  $\mathfrak{a}$  l'ideale da essi generato. Siano  $s_1, \dots, s_n$  elementi qualsiasi di una parte moltiplicativa  $S$  di  $A$  tale che  $\overline{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{a} = \emptyset$  ( $\overline{\mathfrak{S}}$  saturata da  $S$ ). Allora, gli elementi  $\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_n}{s_n}$  di  $S^{-1}A$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione al variare di  $s_1, \dots, s_n$  in  $S$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Si può osservare subito che  $\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_n}{s_n}$  formano una  $S^{-1}A$ -successione (lo si ricava facilmente dal corollario 1.17 di [5] p. 8 sostituendo  $A-\mathfrak{p}$  con una qualunque parte moltiplicativa  $S$  di  $A$  tale che  $\overline{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{a} = \emptyset$ ). Per completare la dimostrazione dobbiamo solo verificare che nel passaggio da  $A$  ad  $S^{-1}A$  si mantiene l'irriducibilità delle componenti primarie isolamente degli ideali  $\mathfrak{a}_i$   $S^{-1}A = \left( \frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_i}{s_i} \right)$  per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $s_1, \dots, s_i \in S$ . Quanto voluto è una conseguenza immediata della proposizione 1.2 e del comportamento della rappresentazione primaria irridondante di un qualsiasi ideale nell'operazione di estensione da  $A$  ad  $S^{-1}A$  (cfr. [14], vol 1, ch. IV, § 10, th. 16 e 17 p. 224, 225).

Enunciamo infine una proposizione che stabilisce una proprietà di discesa per fedele piatezza delle  $\mathbf{G}$ -successioni.

**PROPOSIZIONE 2.5.** *Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo fedelmente piatto di anelli. Siano  $a_1, \dots, a_n$  elementi di  $A$  formanti una  $\mathbf{G}$ -successione in  $B$ , allora,  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché per definizione se  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $B$  allora  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $B$ -successione, possiamo subito dire che  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $A$ -successione in quanto per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i$  non divisore di zero in  $B/(a_1, \dots, a_{i-1})B$  implica  $a_i$  non divisore di zero in  $A/(a_1, \dots, a_{i-1})A$  essendo  $(a_1, \dots, a_{i-1})B \cap A = (a_1, \dots, a_{i-1})A$  ed avendosi l'immersione  $A/(a_1, \dots, a_{i-1})A \rightarrow B/(a_1, \dots, a_{i-1})B$  (cfr., [3] ch. I § 3 n. 5 Remarque 2 p. 52).

Per concludere la dimostrazione dobbiamo allora verificare soltanto che per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , si ha l'irriducibilità delle componenti

primarie isolate di  $\mathfrak{a}_i = (a_1, \dots, a_i)A$ : questa è assicurata dall'irriducibilità delle componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}_i B = (a_1, \dots, a_i)B$  (cfr. teor. 1.6).

A questo punto non sappiamo se il risultato della proposizione 2.5 possa essere invertito come accade per le  $A$ -successioni (cfr. [3] ch. I § 2 n. 4 prop. 3 p. 29). Nel § 5 esamineremo un caso in cui è possibile dare una risposta affermativa.

Richiamiamo a questo punto la definizione di anello locale di Gorenstein per darne una caratterizzazione mediante il concetto di  $\mathbf{G}$ -successione che abbiamo introdotto.

**DEFINIZIONE 2.6.** Un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  dicesi *di Gorenstein* se è di Macaulay ed esiste un sistema di parametri che genera un ideale irriducibile.

Richiamiamo inoltre una proposizione che stabilisce la particolarità delle  $A$ -successioni negli anelli locali di Gorenstein: la nostra caratterizzazione di tali anelli è data da un corollario a questa proposizione.

**PROPOSIZIONE 2.7.** In un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  di Gorenstein ogni ideale generato da una  $A$ -successione è un  $\mathbf{G}$ -ideale (cfr. def. 1.8).

**DIMOSTRAZIONE.** Cfr. [7] lemma 11.2 p. 37.

**COROLLARIO 2.8.** In un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  di Gorenstein ogni  $A$ -successione è una  $\mathbf{G}$ -successione.

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi discende immediatamente dalla proposizione 2.7 tenendo presente le definizioni 1.8 e 2.1.

### 3. $\mathbf{G}$ -successioni incondizionate.

Iniziamo lo studio delle  $\mathbf{G}$ -successioni negli anelli locali con lo scopo di stabilire risultati analoghi a quelli noti per le  $A$ -successioni (Cfr. [14] vol. II app. 6). In questo paragrafo proviamo l'incondizionamento delle  $\mathbf{G}$ -successioni negli anelli locali  $A$  che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  verificano la condizione (\*)  $\dim A = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim (A/\mathfrak{p})$  ed elenchiamo alcuni tipi di anelli che verificano la suddetta condizione e quindi godono della proprietà di incondizionamento delle  $\mathbf{G}$ -successioni.

Come primo risultato proviamo un lemma riguardante l'altezza di certi ideali primi negli anelli verificanti la condizione (\*).

**LEMMA 3.1.** *Siano  $A$  un anello verificante la condizione (\*) e  $a_1, \dots, a_n \in A$  elementi formanti un' $A$ -successione. Se  $\mathfrak{p} \subset A$  è un primo isolato dell'ideale  $\mathfrak{a}_{n-1} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ , allora l'ideale  $(\mathfrak{p}, a_n)$  è pseudo-puro (cfr. [5] def. 1.4 p. 4) ed ha altezza pari a  $n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathfrak{P} \subset A$  un primo isolato dell'ideale  $(\mathfrak{p}, a)$ , allora  $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$  è un primo isolato di  $(a_n)A/\mathfrak{p}$  e  $ht \mathfrak{P}/\mathfrak{p} = 1$  poiché  $a_n \notin \mathfrak{p}$  (cfr. [14] vol. I, Ch. IV § 6 th. 11 p. 214), avendo supposto che  $A$  soddisfi la condizione (\*) possiamo dedurre da quanto osservato sinora che  $ht \mathfrak{P} = ht \mathfrak{p} + 1$ . Pertanto, poiché  $ht \mathfrak{p} = n - 1$  essendo  $\mathfrak{p}$  un primo minimale dell'ideale  $\mathfrak{a}_{n-1}$  generato dall' $A$ -successione  $a_1, \dots, a_{n-1}$  (cfr. [5] prop. 1.10, p. 5), risulta  $ht \mathfrak{P} = n - 1 + 1 = n$ . Per l'arbitrarietà della scelta del primo isolato  $\mathfrak{P}$  dell'ideale  $(\mathfrak{p}, a_n)$  è quindi provata la tesi.

Enunciamo ora una proposizione che attesta l'incondizionamento delle  $\mathbf{G}$ -successioni negli anelli verificanti la suddetta condizione (\*).

**PROPOSIZIONE 3.2.** *Siano  $(A, \mathfrak{m}, k)$  un anello verificante la condizione (\*) e  $a_1, \dots, a_n \in A$  elementi formanti una  $\mathbf{G}$ -successione. Sia  $i \rightarrow i(j)$  una permutazione dell'insieme degli indici  $\{1, \dots, n\}$ . Allora  $a_{i(1)}, \dots, a_{i(n)}$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per proprietà elementari delle permutazioni basta provare che se gli elementi  $a_1, \dots, a_n$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ , comunque si fissi un indice  $j, 1 \leq j \leq n$ , anche gli elementi  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_j, a_{j+2}, \dots, a_n$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ . Ricordiamo che sussiste un risultato analogo a quello in questione riguardo alle  $A$ -successioni in un anello locale (cfr. [14] vol. II app. 6 lemma 2 p. 395). Pertanto, per provare la tesi basta verificare se la condizione ii) della definizione 2.1 è soddisfatta dall' $n$ -pla di elementi di  $A$   $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_j, a_{j+2}, \dots, a_n$  ottenuta dall' $n$ -pla di partenza operando un'inversione tra i due indici  $j$  e  $j+1$ . Indichiamo con  $\mathfrak{a}_k$  l'ideale formato dai primi  $k$  elementi dell' $n$ -pla  $a_1, \dots, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n$  e con  $\mathfrak{a}'_k$  l'ideale formato dai primi  $k$  elementi dell' $n$ -pla  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_j, a_{j+2}, \dots, a_n$ . È immediato osservare che  $\mathfrak{a}'_k = \mathfrak{a}_k$  per ogni indice  $k \neq j$ , quindi, per poter dire se la condizione voluta è soddisfatta dall' $n$ -pla in esame,

basta controllare se le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}'_j = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1})$  risultano irriducibili. Sia  $\mathfrak{q}$  una componente primaria isolata di  $\mathfrak{a}'_j$  e sia  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ : risulta  $ht \mathfrak{p} = j$  poiché  $\mathfrak{p}$  contiene l' $A$ -successione  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}$  avente lunghezza  $j$  (cfr. [5], prop. 1.10, p. 5). Sia quindi  $\mathfrak{P}$  un primo minimale dell'ideale  $(\mathfrak{p}, a_j)$ : per quanto provato nel lemma 3.1. possiamo affermare che  $ht \mathfrak{P} = ht \mathfrak{p} + 1 = j + 1$ . L'anello  $A_{\mathfrak{P}}$  è un anello locale di Macaulay in quanto  $\text{prof } A_{\mathfrak{P}} = \dim A_{\mathfrak{P}}$  poiché l' $A$ -successione  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_j$  di lunghezza  $j + 1$  si localizza ad  $A_{\mathfrak{P}}$ -successione (cfr. [5] Cor. 1.17, p. 8). Osserviamo inoltre che l' $A_{\mathfrak{P}}$ -successione in questione costituisce un sistema di parametri in  $A_{\mathfrak{P}}$  in quanto ha lunghezza pari a  $\dim A_{\mathfrak{P}}$  (cfr. [5] Cor. 3.3 p. 17) e che l'ideale da essa generato è irriducibile in quanto  $\mathfrak{a}'_{j+1} = \mathfrak{a}_{j+1}$  ha, per l'ipotesi che  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n$  costituiscono una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ , le componenti primarie isolate irriducibili e questo fatto implica appunto che  $\mathfrak{a}'_{j+1}A_{\mathfrak{P}}$  è irriducibile (infatti  $\mathfrak{a}'_{j+1}$  è generato da  $j + 1$  elementi e  $ht \mathfrak{P} = j + 1$  poiché  $\mathfrak{P}$  è un primo minimale di  $(\mathfrak{p}, a_j)$ , quindi, se  $\mathfrak{P} = \sqrt{\mathbb{Q}}$  risulta  $\mathbb{Q} \supset \mathfrak{a}'_{j+1}$  e più precisamente  $\mathbb{Q}$  è una componente primaria isolata di  $\mathfrak{a}'_{j+1}$  cioè  $\mathfrak{a}'_{j+1}A_{\mathfrak{P}} = \mathbb{Q}A_{\mathfrak{P}}$  (cfr. [7] prop. 5.5 p. 14), perciò  $\mathfrak{a}'_{j+1}A_{\mathfrak{P}}$  è irriducibile poiché  $\mathbb{Q}A_{\mathfrak{P}}$  è irriducibile essendo tale  $\mathbb{Q}$  per ipotesi (cfr. (c<sub>1</sub>)). Quanto osservato sinora permette di dire che  $A_{\mathfrak{P}}$  è un anello locale di Gorenstein (cfr. def. 2.6): allora ogni  $A_{\mathfrak{P}}$ -successione genera un  $\mathbf{G}$ -ideale in  $A_{\mathfrak{P}}$  (cfr. prop. 2.7) e in particolare è un  $\mathbf{G}$ -ideale  $\mathfrak{a}'_jA_{\mathfrak{P}}$  che è l'ideale generato dalla  $A_{\mathfrak{P}}$ -successione ottenuta localizzando ad  $A_{\mathfrak{P}}$  l' $A$ -successione  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}$ ; ciò significa che in  $A_{\mathfrak{P}}$  la componente primaria  $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{P}}$  del  $\mathbf{G}$ -ideale  $\mathfrak{a}'_jA_{\mathfrak{P}}$  è irriducibile da cui discende che  $\mathfrak{q}$  è irriducibile in  $A$  (cfr. (c<sub>1</sub>)).

Per l'arbitrarietà della componente primaria isolata  $\mathfrak{q}$  di  $\mathfrak{a}'_j$  considerata, possiamo concludere che  $\mathfrak{a}'_j$  ha tutte le componenti primarie isolate irriducibili e quindi è provata la tesi che  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_j, a_{j+2}, \dots, a_n$  formino una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ .

Richiamiamo alcune definizioni e proprietà (cfr. [5] § 4 e [8] ch. IV 1° § 14, 16; 2° § 5,7) che permettono di dare esempi di anelli per i quali sussiste il risultato della proposizione 3.2.

(a<sub>3</sub>) Un anello  $A$  non necessariamente noetheriano dicesi equidimensionale se per ogni ideale primo minimale  $\mathfrak{p} \subset A$  risulta  $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim A$ .

( $b_3$ ) Un anello  $A$  non necessariamente noetheriano dicesi catenario se per ogni coppia di ideali primi  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ , tutte le catene saturate di primi tra  $\mathfrak{q}$  e  $\mathfrak{p}$  hanno la stessa lunghezza.

( $c_3$ ) Un anello  $A$  tale che  $\dim A < \infty$ , dicesi biequidimensionale se tutte le catene saturate massimali di primi di  $A$  hanno la stessa lunghezza. In un anello biequidimensionale, per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  risulta  $\dim A = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim (A/\mathfrak{p})$  (cioè è soddisfatta la condizione (\*)).

( $d_3$ ) Ogni anello locale di Macaulay soddisfa la condizione delle catene massimali.

( $e_3$ ) Un anello locale dicesi formalmente equidimensionale se il suo completato è equidimensionale.

( $f_3$ ) Ogni anello locale formalmente equidimensionale è equidimensionale e catenario cioè biequidimensionale.

( $g_3$ ) Ogni anello, locale verificante  $S_2$  e catenario è biequidimensionale.

( $h_3$ ) Ogni anello locale eccellente (cfr. [8] def. 7.8.2 p. 214) verificante  $S_2$  è biequidimensionale.

Premesso quanto precede enunciato una proposizione dalla quale risultano delle condizioni sufficienti affinché abbia senso dire che un sottoinsieme finito  $T$  di un anello locale  $A$  è una  $\mathbf{G}$ -successione.

**PROPOSIZIONE 3.3.** *Sia  $A$  un anello locale che verifica una qualunque tra le proprietà seguenti:*

- i)  $A$  è di Macaulay;
- ii)  $A$  è formalmente equidimensionale;
- iii)  $A$  è eccellente e verifica  $S_2$ .

*Allora, se  $T$  è un sottoinsieme finito di  $A$ , il fatto che gli elementi di  $T$  formino una  $\mathbf{G}$ -successione è indipendente dall'ordine in cui tali elementi sono considerati.*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi è una conseguenza di quanto provato nella proposizione 3.2 poiché si osserva facilmente che:

$\alpha$ ) se  $A$  è locale di Macaulay,  $A$  soddisfa la condizione (\*) (cfr. ( $d_3$ ) e ( $c_3$ ));

$\beta$ ) se  $A$  è formalmente equidimensionale,  $A$  soddisfa la condizione (\*) (cfr.  $(e_3)$  e  $(c_3)$ );

$\gamma$ ) se  $A$  è locale, eccellente e verifica  $S_2$ ,  $A$  soddisfa la condizione (\*) (cfr.  $(h_3)$  e  $(c_3)$ ).

Enunciamo ora una proposizione che stabilisce il passaggio dal locale al globale del risultato stabilito dalla proposizione 3.3.

**PROPOSIZIONE 3.4.** *Sia  $A$  un anello. Supponiamo che per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m} \subset A$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  verifichi una qualsiasi tra le proprietà i), ii), iii) della proposizione 3.3. Allora, se  $T$  è un sottoinsieme finito del radicale di Jacobson di  $A$ , la proprietà degli elementi di  $T$  di formare una  $\mathbf{G}$ -successione è indipendente dall'ordine in cui vengono considerati.*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi discende dalla proposizione 3.3 che stabilisce il risultato nel caso locale e dalla proposizione 2.3 che dà un criterio di passaggio dal locale al globale per le  $\mathbf{G}$ -successioni.

#### 4. Anelli di Gorenstein e proprietà $\mathbf{G}_n$ .

Dopo aver dato nel § 2. una caratterizzazione degli anelli (locali) di Gorenstein mediante il concetto di  $\mathbf{G}$ -successione, dedichiamo questo numero propriamente allo studio degli anelli di Gorenstein definendo i concetti di  $\mathbf{G}$ -profondità (def. 4.1) e di proprietà  $\mathbf{G}_n$  (def. 4.5) analoghi a quelli ben noti di profondità e di proprietà  $S_n$  di Serre (cfr. [4] § 3,4). Enunciamo inoltre alcuni fatti riguardanti gli anelli di Gorenstein e gli anelli verificanti la proprietà  $\mathbf{G}_n$  elencando alcuni esempi e controesempi che servono a caratterizzare gli anelli considerati.

**DEFINIZIONE 4.1.** In un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  dicesi  $\mathbf{G}$ -profondità di  $A$  (in simboli  $\mathbf{G}\text{-prof } A$ ) il massimo numero di elementi di  $\mathfrak{m}$  formanti una  $\mathbf{G}$ -successione. Se in  $\mathfrak{m}$  non esistono  $\mathbf{G}$ -successioni di lunghezza positiva si dice che  $\mathbf{G}\text{-prof } A = 0$  (equivalentemente che  $\mathfrak{m}$  contiene una  $\mathbf{G}$ -successione di lunghezza 0) se le componenti primarie isolate di zero sono irriducibili, mentre si dice che  $\mathbf{G}\text{-prof } A = -\infty$  se tale ultima condizione non è verificata.

**PROPOSIZIONE 4.2.** *Un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  è di Gorenstein se e soltanto se  $\mathbf{G}\text{-prof } A = \dim A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché se  $\dim A=0$   $A$  è di Gorenstein se e soltanto se lo zero è un ideale irriducibile, non c'è altro da dimostrare; consideriamo quindi il caso  $\dim A>0$ , supponiamo che  $A$  sia di Gorenstein, allora  $A$  è di Macaulay (cfr. def. 2.6) e quindi  $\text{prof } A=\dim A$  (cfr. (c<sub>2</sub>)) cioè esiste un' $A$ -successione di lunghezza  $n=\dim A$ , ricordando che in un anello di Gorenstein ogni  $A$ -successione è una  $\mathbf{G}$ -successione (cfr. cor. 2.8) si può concludere senz'altro che  $\mathbf{G}\text{-prof } A=\dim A$ . Viceversa, supponiamo che sia  $\mathbf{G}\text{-prof } A=\dim A$  allora esistono  $a_1, \dots, a_n \in A$  (con  $n=\dim A$ ), elementi formanti una  $\mathbf{G}$ -successione, da questo fatto si ricavano le seguenti condizioni:

$\alpha$ )  $\text{prof } A=\dim A$  cioè è di Macaulay (cfr. (c<sub>2</sub>)) in quanto se  $a_1, \dots, a_n$  sono una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$  allora  $a_1, \dots, a_n$  sono anche una  $A$ -successione (cfr. def. 2.1);

$\beta$ ) esiste in  $A$  un sistema di parametri che genera un ideale irriducibile infatti  $a_1, \dots, a_n$  costituiscono un sistema di parametri (cfr. [5] cor. 3.3 p. 17) cioè l'ideale da essi generato è primario, inoltre, avendo tale ideale le componenti primarie isolate irriducibili per ipotesi, è irriducibile esso stesso.

La tesi è così provata poiché le condizioni  $\alpha$ ) e  $\beta$ ) caratterizzano proprio gli anelli locali di Gorenstein.

Passiamo ora a considerare anelli non necessariamente locali e introduciamo la proprietà  $\mathbf{G}_n$  (cfr. def. 4.5) analoga alla ben nota proprietà  $S_n$  di Serre.

**DEFINIZIONE 4.3.** Un anello  $A$  dicesi di *Gorenstein* se per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  l'anello locale  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello locale di Gorenstein (cfr. [7] def. 6.4 pag. 17).

**TEOREMA 4.4.** *Siano  $A$  un anello ed  $n$  un intero non negativo, sono condizioni equivalenti:*

1) per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$ ,  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq \min(n, ht \mathfrak{p})$ ;

2) i<sub>1</sub>) per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  è di Gorenstein; ii<sub>2</sub>) per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht > \mathfrak{p}n$ ,  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq n$ ;

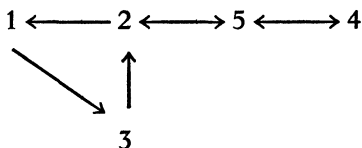


3)  $i_3$  per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$ , esiste in  $A_{\mathfrak{p}}$  una  $\mathbf{G}$ -successione di lunghezza  $r = ht \mathfrak{p}$ ;  $ii_3$ ) per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} > n$ , esistono in  $A_{\mathfrak{p}}$   $\mathbf{G}$ -successioni di lunghezza  $n$ .

4) in ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  esiste una  $\mathbf{G}$ -successione di lunghezza  $\geq \min(n, ht \mathfrak{p})$ ;

5)  $i_5$ ) per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  è di Gorenstein;  $ii_5$ )  $A$  verifica la proprietà  $S_n$  (cfr.  $(d_2)$ ).

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione viene fatta secondo il seguente schema di implicazioni:



Le implicazioni  $2) \Rightarrow 1)$ ,  $1) \Rightarrow 3)$ ,  $3) \Rightarrow 2)$ ,  $2) \Rightarrow 5)$  sono immediate tenendo presente la proposizione 4.2, l'implicazione  $4) \Rightarrow 5)$  discende subito dalla proprietà di localizzazione delle  $\mathbf{G}$ -successioni (cfr. prop. 2.4) restano quindi da provare le implicazioni  $5) \Rightarrow 2)$ ,  $5) \Rightarrow 4)$ .

$5) \Rightarrow 2)$  Bisogna solo provare che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} > n$  risulta  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq n$ . Poiché  $A$  verifica la proprietà  $S_n$ , se  $ht \mathfrak{p} > n$  risulta  $\text{prof } A_{\mathfrak{p}} \geq n$  cioè esistono  $x_1, \dots, x_n \in A_{\mathfrak{p}}$  elementi formanti una  $A_{\mathfrak{p}}$ -successione. Sia  $\mathfrak{A}_n = (x_1, \dots, x_n)A_{\mathfrak{p}}$  l'ideale da essi generato, vogliamo far vedere che  $x_1, \dots, x_n$  sono una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A_{\mathfrak{p}}$  ossia che le componenti primarie isolate  $\mathfrak{A}_h = (x_1, \dots, x_n)A_{\mathfrak{p}}$  sono irriducibili per ogni intero  $h$ ,  $1 \leq h \leq n$ . Consideriamo dunque, per ogni tale intero  $h$ , le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{A}_h$  in  $A_{\mathfrak{p}}$ , siano esse  $\mathfrak{Q}_{h_1}, \dots, \mathfrak{Q}_{h_r}$  e siano  $\mathfrak{P}_{h_1}, \dots, \mathfrak{P}_{h_r}$  i rispettivi primi associati che risultano avere tutti altezza  $h$  poiché  $\mathfrak{A}_h$  è di  $h$ -classe principale e quindi pseudopuro (cfr. [5] Cor. 1.8 e prop. 1.10 p. 5). Fissiamo uno tra questi primi, sia esso  $\mathfrak{P}_{h_j}$ ,  $1 \leq j \leq r$  risulta:  $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}_{h_j}} \cong A_{\mathfrak{p}_{h_j}}$  dove  $\mathfrak{p}_{h_j}$  è l'ideale primo di  $A$  che ha altezza  $h$  ed è correlato a  $\mathfrak{P}_{h_j} \subset A_{\mathfrak{p}}$  nella corrispondenza biunivoca natu-

rale esistente tra gli ideali primi di  $A$  contenuti in  $\mathfrak{p}$  e gli ideali primi di  $A_{\mathfrak{p}}$  (cfr. [1] cor. 3.13 p. 42).

Pertanto, poiché  $\dim A_{\mathfrak{p}_{h_j}} = h \leq n$  e poiché si è posta l'ipotesi che  $A$  soddisfi la condizione  $i_5$ ,  $A_{\mathfrak{p}_{h_j}}$  è un anello locale di Gorenstein. Per l'isomorfismo citato sopra anche l'anello  $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}$  è di Gorenstein; allora, ogni ideale generato da una  $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}$ -successione è un  $\mathbf{G}$ -ideale (cfr. prop. 2.7) e quindi ha le componenti primarie irriducibili. Osserviamo in particolare che  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_h \in (A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}$ , immagini di  $x_1, \dots, x_h \in A_{\mathfrak{p}}$ , nell'omomorfismo canonico, formano una  $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}$ -successione poiché  $x_1, \dots, x_h \in A_{\mathfrak{p}}$  formano una  $A_{\mathfrak{p}}$ -successione (cfr. [5] cor. 1.17 p. 8) pertanto l'ideale  $\mathfrak{A}_h[(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}]$  da essi generato è un  $\mathbf{G}$ -ideale in  $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}$  e cioè ha le componenti primarie irriducibili, in particolare è irriducibile  $\mathbb{Q}_{h_j}[(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}]$  in  $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_{h_j}}$  e quindi è irriducibile  $\mathbb{Q}_{h_j}$  in  $A_{\mathfrak{p}}$  (cfr. (c<sub>1</sub>)). A questo punto, per l'arbitrarietà di  $h$  e  $j$  possiamo concludere che  $x_1, \dots, x_n \in A_{\mathfrak{p}}$  sono una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A_{\mathfrak{p}}$  e cioè che  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq n$ . 5)  $\Rightarrow$  4) dalla condizione  $i_5$  si ricava (cfr. [9] satz. 3.15 (II) p. 524) che in ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  esiste un' $A$ -successione  $a_1, \dots, a_h$  di lunghezza  $h \geq (\min(n, ht \mathfrak{p}))$ : vogliamo provare che in realtà  $a_1, \dots, a_h$  sono una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ . Esaminiamo dunque per ogni indice  $h, 1 \leq h \leq n$  le componenti primarie isolate di  $\mathfrak{a}_h = (a_1, \dots, a_h)$ : sia  $\mathfrak{a}_h = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$  una decomposizione primaria irridondante di  $\mathfrak{a}_h$  con  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$  componenti primarie isolate. Per ogni indice  $i, 1 \leq i \leq r$  sia  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ : risulta  $ht \mathfrak{p}_i = h \leq n$  e quindi  $A_{\mathfrak{p}_i}$  è un anello locale di Gorenstein allora  $\mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$  è irriducibile in  $A_{\mathfrak{p}_i}$  essendo componente primaria del  $\mathbf{G}$ -ideale  $\mathfrak{a}_h A_{\mathfrak{p}_i}$  ( $\mathfrak{a}_h A_{\mathfrak{p}_i}$  è un  $\mathbf{G}$ -ideale in quanto è l'ideale generato nell'anello locale di Gorenstein  $A_{\mathfrak{p}_i}$  dalla  $A_{\mathfrak{p}_i}$ -successione ottenuta attraverso la localizzazione ad  $A_{\mathfrak{p}_i}$  dell' $A$ -successione  $a_1, \dots, a_h$  di partenza (cfr. [5] cor. 1.17 p. 8)).

**DEFINIZIONE 4.5.** Siano  $A$  un anello ed  $n$  un intero non negativo, si dice che  $A$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$  ( $A$  è un anello  $\mathbf{G}_n$ ) se sono soddisfatte le condizioni equivalenti del Teorema 4.4.

**PROPOSIZIONE 4.6.** Sia  $A$  un anello verificante la proprietà  $\mathbf{G}_n$ , allora  $A$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_i$  per ogni intero  $i$  tale che  $0 \leq i \leq n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si osserva immediatamente che, se vale la proprietà  $\mathbf{G}_n$ , cioè se  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq \min(n, ht \mathfrak{p})$  per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$ , risulta  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \geq \min(i, ht \mathfrak{p})$  per ogni intero  $i$  tale che  $0 \leq i \leq n$  ossia vale  $\mathbf{G}_i$  per ogni intero  $i$  che non supera  $n$ .

Enunciamo quindi una proposizione che dà una caratterizzazione degli anelli di Gorenstein mediante la proprietà  $\mathbf{G}_n$ .

**PROPOSIZIONE 4.7.** *Un anello  $A$  è di Gorenstein se e soltanto se verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$  per ogni intero  $n$ , se e soltanto se verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$  per ogni intero  $n \leq \dim A$  (se  $\dim A < \infty$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Si ricava dal teorema 4.4 che un anello  $A$  verificante la proprietà  $\mathbf{G}_n$  per ogni intero  $n$  è un anello tale che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  risulta  $A_{\mathfrak{p}}$  di Gorenstein e quindi è Gorenstein (cfr. def. 4.3); il viceversa è ovvio. È ancora ovvio che la condizione di verificare la proprietà  $\mathbf{G}_n$  sia significativa solo fino al numero  $\dim A$  in quanto per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  risulta  $\mathbf{G}\text{-prof } A_{\mathfrak{p}} \leq \dim A_{\mathfrak{p}} \leq \dim A$ . Di più, se  $r = \dim A$  ed  $A$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_r$ , possiamo dire (cfr. prop. 4.6) che  $A$  è di Gorenstein.

Diamo ora alcuni esempi dai quali risultano certe caratteristiche della proprietà  $\mathbf{G}_n$ . Il primo prova che la proprietà  $\mathbf{G}_0$ , a differenza della  $S_0$  che è banale, non è sempre verificata da esso si trae anche che in generale  $S_n$  non è equivalente a  $\mathbf{G}_n$ . Il secondo prova che esistono anelli che non sono di Gorenstein ma soddisfano la proprietà  $\mathbf{G}_n$  per qualche intero non negativo  $n$ .

**ESEMPIO 1.** *Anello  $A$  non verificante  $\mathbf{G}_0$ .*

L'anello  $A = k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$  ha dimensione 0 e non è di Gorenstein (cfr. [7] esempio 6.10 p. 18) perciò non verifica  $\mathbf{G}_0$ . Osserviamo tuttavia che  $A$  è Macaulay (e quindi  $S_0$ ) in quanto se  $\dim A = 0$  risulta necessariamente  $\dim A = \text{prof } A$ .

**ESEMPIO 2.** *Anello  $A$  verificante  $\mathbf{G}_n$  ma non  $\mathbf{G}_{n+1}$ .*

L'anello  $A = k[X, Y]/(X^2, XY) = k[x, y]/(x^2 = 0, xy = 0)$  ha dimensione 1 e verifica  $\mathbf{G}_0$  ma non  $\mathbf{G}_1$ . I primi associati all'ideale zero di  $A$  sono  $(x)$  e  $(x, y)$ ,  $(x)$  è isolato quindi ha altezza 0,  $(x, y)$  è immerso quindi ha

altezza 1. Vediamo perché  $A$  verifica  $\mathbf{G}_0$ : risulta  $A_{(x)} = k(Y)$  poiché  $xy = 0$  e  $y$  diventa invertibile in  $A_{(x)}$  quindi  $x A_{(x)} = 0$ , allora  $A_{(x)}$  è ovviamente di Gorenstein. D'altra parte  $A$  non può verificare  $\mathbf{G}_1$  in quanto  $A$  non verifica  $S_1$  (l'ideale zero non è puro (cfr. [6] Examples § 13 p. 59) mentre se verificasse  $\mathbf{G}_1$  verificherebbe automaticamente  $S_1$  (cfr. teor. 4.4).

OSSERVAZIONI. I) Un anello  $A$  è  $\mathbf{G}_0$  se e soltanto se le componenti primarie isolate di zero sono irriducibili (cfr. teor. 4.4).

II) Un anello  $A$  è  $\mathbf{G}_1$  se e soltanto se l'ideale zero di  $A$  è un  $\mathbf{G}$ -ideale ed ogni  $A$ -successione di lunghezza 1 è una  $\mathbf{G}$ -successione (cfr. teor. 4.4).

III) Un ideale  $\mathfrak{a} \subset A$  è un  $\mathbf{G}$ -ideale se e soltanto se  $A/\mathfrak{a}$  verifica le proprietà  $S_1$  e  $\mathbf{G}_0$  (lo si ricava facilmente dall'esempio 2 di [6] p. 59 e da I)).

Riportiamo ora una proposizione che tratta la localizzazione della proprietà  $\mathbf{G}_n$ .

PROPOSIZIONE 4.8. *Siano  $A$  un anello verificante la proprietà  $\mathbf{G}_n$  ed  $S$  una parte moltiplicativa di  $A$ . Allora l'anello  $B = S^{-1}A$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra l'insieme degli ideali primi di  $A$  che non incontrano  $S$  e l'insieme degli ideali primi di  $B$  (cfr. [14], vol. I, Ch. IV, § 10, th. 15, p. 223). Inoltre, se  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  risulta  $B_{\mathfrak{p}B} \cong A_{\mathfrak{p}}$  (cfr. [3], Ch. II, § 2, n. 5, prop. 11 p. 91), pertanto:  $\mathbf{G}$ -prof  $A_{\mathfrak{p}} = \mathbf{G}$ -prof  $B_{\mathfrak{p}B}$ , cioè se  $A$  verifica  $\mathbf{G}_n$  anche  $B$  verifica tale proprietà.

Diamo quindi una proposizione che lega la proprietà  $\mathbf{G}_n$  oltre che alla  $S_n$  (cfr. teor. 4.4) anche alla proprietà  $R_n^{*})$  e citiamo alcuni esempi attinenti a tale fatto.

---

\*) Ricordiamo che un anello locale  $(A, \mathfrak{m}, k)$  tale che  $\dim A = n$  dicesi regolare se  $\mathfrak{m}$  è generato da  $n$  elementi e che un anello  $A$  qualsiasi dicesi soddisfare la proprietà  $R_n$  ( $n$  intero non negativo) se per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $\text{ht } \mathfrak{p} \leq n$  risulta  $A_{\mathfrak{p}}$  regolare (cfr. [4] § 4).

**PROPOSIZIONE 4.9.** *Sia  $A$  un anello verificante le proprietà  $S_n$  ed  $R_n$ , allora  $A$  verifica la proprietà  $G_n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'ipotesi che  $A$  verifichi la proprietà  $R_n$  significa che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$ , tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$  l'anello locale  $A_{\mathfrak{p}}$  è regolare, pertanto, poiché  $A_{\mathfrak{p}}$  regolare implica  $A_{\mathfrak{p}}$  di Gorenstein (cfr. [7] cor. 6.5 p. 17), tale ipotesi insieme a quella che  $A$  verifichi la proprietà  $S_n$  indica che  $A$  verifica anche la proprietà  $G_n$  (cfr. teor. 4.4).

**ESEMPIO 3.** *Anello  $A$  verificante  $G_n$  ma non  $R_n$ .*

L'anello  $A = k[X, Y]/(x^3 - y^2)$  ha dimensione 1 e verifica  $G_1$ , ma non  $R_1$  infatti  $A$  è l'anello delle coordinate di una varietà che è intersezione completa e quindi è un anello di Gorenstein (cfr. [7] cor. 6.7 p. 17). Tuttavia tale varietà ha un punto singolare e perciò  $A$  non è regolare ossia in particolare non è  $R_1$ .

**ESEMPIO 4.** *Anello  $A$  verificante  $R_n$  ma non  $G_n$ .*

L'anello  $A = \mathbf{G}[X, Y, Z]/(X(X, Y, Z)) = \mathbf{G}[x, y, z](x^2 = xy = xz = 0)$  ha dimensione 2 e verifica  $R_1$  ma non  $G_1$ . È chiaro che  $\text{prof}_{A(x, y, z)} = 0$ , d'altra parte, per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  avente altezza 1 esiste un ideale massimale  $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{m}$  associato ad un punto  $(a, b, c) \in V(\mathfrak{p})$  distinto dall'origine e quindi tale che  $A_{\mathfrak{m}}$  è regolare (infatti risulta  $A_{\mathfrak{m}} = \mathbf{G}[Y, Z]_{(Y-b, Z-c)}$ ; allora  $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}}$  è regolare, ossia  $A$  verifica  $R_1$  ma non  $G_1$  in quanto non verifica neppure  $S_1$ ).

Facendo riferimento alla caratterizzazione degli anelli ridotti e normali \*\*) mediante le proprietà  $R_n$  e  $S_n$  (cfr [4] prop. 4.5, 4.6 p. 73, 74) enunciamo ora due corollari che sono conseguenza della proposizione 4.9 e diamo al riguardo alcuni esempi.

**COROLLARIO 4.10.** *Un anello  $A$  ridotto verifica la proprietà  $G_0$ .*

---

\*\*) Ricordiamo che: i) un anello  $A$  dicesi ridotto se in  $A$  non esistono elementi nilpotenti diversi da zero (cfr. [4] def., p. 2).

ii) un anello  $A$  dicesi normale se e soltanto se, per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  è un dominio integralmente chiuso (cfr. [6] def. 15.1, p. 66).

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla proposizione 4.5 di [4] p. 73 risulta che un anello  $A$  è ridotto se e soltanto se  $A$  verifica le proprietà  $S_1$  e  $R_0$  pertanto la tesi è una conseguenza immediata della proposizione 4.9.

**ESEMPIO 5.** *Anello  $A$  verificante  $\mathbf{G}_0$  ma non ridotto.*

L'anello  $A = k[X, Y]/(X^2, XY) = k[x, y]$  è  $\mathbf{G}_0$  (cfr. esempio 2) ma non è ridotto in quanto l'elemento  $x \neq 0$  è nilpotente.

**ESEMPIO 6.** *Anello  $A$  ridotto non verificante la proprietà  $\mathbf{G}_1$ .*

L'anello  $A = k[X, Y, Z]/(XY, YZ, ZX)$  ha dimensione 1 ed è ridotto (chiaramente in  $A$  non esistono elementi nilpotenti diversi da zero), ma non verifica  $\mathbf{G}_1$  in quanto non è di Gorenstein (cfr. [11] osservazione p. 324).

**COROLLARIO 4.11.** *Un anello  $A$  normale verifica la proprietà  $\mathbf{G}_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla proposizione 4.6 di [4] p. 74 risulta che un anello  $A$  è normale se e soltanto se  $A$  verifica  $S_2$  ed  $R_1$  pertanto anche in questo caso la tesi è una conseguenza immediata della proposizione 4.9.

**ESEMPIO 7.** *Anello  $A$  verificante  $\mathbf{G}_1$  ma non normale.*

L'anello  $A = k[X, Y]/(X^3 - Y^2)$  è di Gorenstein (cfr. esempio 3) pertanto verifica  $\mathbf{G}_n$  (e quindi  $S_n$ ) per ogni intero non negativo  $n$ , ma non è regolare, questo fatto, essendo  $\dim A = 1$  significa che  $A$  non è  $R_1$  e cioè che  $A$  non è normale.

**ESEMPIO 8.** *Anello  $A$  normale non verificante  $\mathbf{G}_2$ .*

L'anello  $A = k[X, Y, Z, T]/(XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$  ha dimensione 2 e non verifica  $\mathbf{G}_2$  infatti  $A$  non è di Gorenstein (cfr. [7] esempio 6.11 pag. 18) mentre è noto che  $A$  è normale.

**NOTA.** I risultati di questo paragrafo (a partire dal teorema 4.4) possono essere messi in relazione con quelli di [9] e [13]. Nel primo di questi lavori sono esaminati gli anelli che verificano la proprietà  $S_n$  ed i cui localizzati in tutti i primi fino all'altezza  $n-1$  sono di Gorenstein; nel secondo invece vengono esaminati gli anelli che verificano la proprietà  $S_n$  ed i cui localizzati nei soli primi di altezza  $n-1$  sono di Gorenstein; le denominazioni usate sono rispettivamente anelli  $G_n$  ed  $n$ -anelli di Bass-Ishikawa.

Notiamo a questo punto che abbiamo chiamato « proprietà  $\mathbf{G}_n$  » l'essere verificato della condizione da noi esaminata proprio perché la denominazione  $G_n$  era già stata usata, in [9] da Ischebeck con un significato che, come detto sopra, risulta diverso da quello che intendevamo attribuirle noi.

Osserviamo infine che un anello che verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$  è un  $n$ -anello di Bass-Ishikawa ed anche un anello  $G_n$ , ma non vale il viceversa, pur esistendo anelli che verificano la proprietà  $\mathbf{G}_{n-1}$  ma non sono anelli  $G_n$  né  $n$ -anelli di Bass-Ishikawa (notiamo che se  $A$  è un anello  $G_n$ , allora  $A$  è un  $n$ -anello di Bass-Ishikawa).

Riteniamo che possa essere interessante approfondire lo studio delle analogie e differenze esistenti tra le diverse proprietà elencate sopra e pensiamo di attuare questo esame il più presto possibile.

### 5. Comportamento rispetto ad omomorfismi piatti.

In quest'ultimo paragrafo esaminiamo il comportamento della proprietà  $\mathbf{G}_n$  rispetto agli omomorfismi piatti e fedelmente piatti.

Premettiamo alcune definizioni della teoria di Grothendieck delle fibre e fibre formali (cfr. [6] § 12 p. 56) e ricordiamo un risultato relativo al comportamento della proprietà « di Gorenstein » rispetto ad omomorfismi piatti locali (cfr. [15] § 2 th. 1 (2) p. 415) che ci saranno utili.

(a<sub>5</sub>) Sia  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli e sia  $f : \text{spec } B \rightarrow \text{spec } A$ , (\*) l'applicazione indotta da  $\varphi$  ( $f$  è definita da  $f(\mathfrak{P}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$  per ogni ideale primo  $\mathfrak{P} \subset B$ ). Se  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo di  $A$  si verifica facilmente che esiste una bigezione tra  $f(\mathfrak{P})$  e  $X = \text{Spec } S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$  dove  $S = A - \mathfrak{p}$ .  $X$  dicesi fibra di  $\varphi$  in  $\mathfrak{p}$ . Se  $k(\mathfrak{p})$  denota il corpo residuo dell'anello locale  $A_{\mathfrak{p}}$  ( $k(\mathfrak{p})$  è isomorfo al corpo dei quozienti del dominio  $A/\mathfrak{p}$ ) esiste un isomorfismo canonico tra  $S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$  e la  $k(\mathfrak{p})$ -algebra  $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$  che, per abuso di linguaggio, dicesi fibra di  $\varphi$  in  $\mathfrak{p}$ .

(b<sub>5</sub>) Sia  $(A, \mathfrak{m}, k)$  un anello locale, le fibre dell'omomorfismo canonico  $\varphi : A \rightarrow \hat{A}$  diconsì fibre formali di  $A$ .

---

\*) Ricordiamo che se  $A$  è un anello non necessariamente noetheriano, l'insieme di tutti gli ideali primi di  $A$  è uno spazio topologico chiamato spettro di  $A$  e denotato  $\text{Spec } A$  (cfr. [3] ch. II, § 4, n. 3, p. 124).

(c<sub>5</sub>) Siano  $A$  un anello qualsiasi e  $\mathfrak{p}$  un ideale primo di  $A$ , le fibre formali di  $A$  in  $\mathfrak{p}$  sono le fibre formali dell'anello locale  $A_{\mathfrak{p}}$ .

(d<sub>5</sub>) Sia  $\varphi : (A, \mathfrak{m}, k) \rightarrow (B, \mathfrak{n}, K)$  un omorfismo piatto e locale di anelli locali. Allora  $B$  è di Gorenstein se e soltanto se  $A$  e  $B \otimes_{A,k} B/\mathfrak{m}B$  sono di Gorenstein.

Dimostriamo ora un teorema che tratta la situazione equivalente a quella di (d<sub>5</sub>) relativa ad anelli non necessariamente locali che verificano la proprietà  $\mathbf{G}_n$  provando inoltre come la proprietà  $\mathbf{G}_n$  discenda per fedele piatezza.

**TEOREMA 5.1.** *Sia  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo piatto di anelli. Allora:*

i) *se  $\varphi$  è fedelmente piatto e  $B$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$ , anche  $A$  verifica tale proprietà.*

ii) *se  $A$  e le fibre  $\varphi$  verificano la proprietà  $\mathbf{G}_n$ , anche  $B$  verifica tale proprietà.*

**DIMOSTRAZIONE** i). Ricordiamo che, per definizione, un anello  $B$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$  se e soltanto se  $B$  verifica la proprietà  $S_n$  e per ogni ideale primo  $\mathfrak{P} \subset B$  tale che  $ht \mathfrak{P} \leq n$  l'anello locale  $B_{\mathfrak{P}}$  è di Gorenstein (cfr. teor. 4.4).

Ricordiamo inoltre che vale un risultato analogo a quello in questione nel caso che  $B$  verifichi la proprietà  $S_n$  (cfr. [4] teor. 5.4 p. 93) e che quindi si può affermare subito che  $A$  verifica la proprietà  $S_n$ . Per completare la dimostrazione resta da provare solo che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello locale di Gorenstein. Sia dunque  $\mathfrak{p}$  un arbitrio ideale primo di  $A$  tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$ , consideriamo l'applicazione  $f: \text{spec } B \rightarrow \text{spec } A$  indotta da  $\varphi$  se  $\mathfrak{P} \subset B$  è un elemento minimale tra quelli appartenenti a  $f^{-1}(\mathfrak{p})$  risulta  $ht \mathfrak{P} = ht \mathfrak{p} \leq n$  infatti l'omomorfismo  $\psi: A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{P}}$  indotto da  $\varphi$  è piatto e locale (cfr. [1] ch. III, ex 18, p; 46 e [3] ch. II § 3 n. 1 remarque prop. 3 p. 105) perciò risulta  $\dim B_{\mathfrak{P}} = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$  (cfr. [4] th. 5.1 p. 83), inoltre, poiché  $\mathfrak{P}$  è minimale in  $f^{-1}(\mathfrak{p})$  risulta  $\dim B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}} = 0$  e quindi  $\dim B_{\mathfrak{P}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$  ossia proprio  $ht \mathfrak{P} = ht \mathfrak{p}$ .

Allora  $B_{\mathfrak{P}}$  è un anello locale di Gorenstein e  $\psi: A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{P}}$  verifica le ipotesi di (d<sub>5</sub>), quindi  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello locale di Gorenstein. Da quan-



to precede discende la tesi poiché si è osservato che  $A$  verifica la proprietà  $S_n$  e si è provato che per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  tale che  $ht \mathfrak{p} \leq n$  risulta  $A_{\mathfrak{p}}$  di Gorenstein.

ii) Poiché nelle ipotesi date  $B$  verifica la proprietà  $S_n$  (cfr. [4] th. 5.4 p. 93), basta provare che per ogni ideale primo  $\mathfrak{P} \subset B$  tale che  $ht \mathfrak{P} \leq n$ ,  $B_{\mathfrak{P}}$  è un anello locale di Gorenstein.

Sia dunque  $\mathfrak{P}$  un ideale primo di  $B$  avente altezza  $\leq n$  e sia  $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{P}$ , poiché  $n \geq \dim B_{\mathfrak{P}} = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim B_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$  (cfr. [4] th. 5.1 p. 83) risulta sia  $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq n$  che  $\dim B_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}} \leq n$ . Da ciò per l'ipotesi fatta su  $A$  si trae subito che  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello locale di Gorenstein. Osserviamo quindi che  $B_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$  è la localizzazione in un primo di altezza  $\leq n$  della fibra di  $\varphi$  in  $\mathfrak{p}$ ; poiché per ipotesi le fibre di  $\varphi$  verificano la proprietà  $G_n$ ,  $B_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$  risulta essere di Gorenstein. Consideriamo infine l'omomorfismo piatto e locale  $\varphi : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{P}}$  indotto da  $\varphi$ , con i ragionamenti precedenti abbiamo provato che  $A_{\mathfrak{p}}$  e  $B_{\mathfrak{P}} / \mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$  verificano le ipotesi di  $(d_5)$ , possiamo allora affermare che  $B_{\mathfrak{P}}$  è di Gorenstein. Quanto provato sussiste per ogni ideale primo  $\mathfrak{P} \subset B$  tale che  $ht \mathfrak{P} \leq n$ , pertanto poiché  $B$  verifica la proprietà  $S_n$ , possiamo concludere senz'altro che  $B$  verifica la proprietà  $G_n$  come voluto.

**COROLLARIO 5.2.** *Sia  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo piatto di anelli. Se  $A$  verifica la proprietà  $G_n$  e le fibre di  $\varphi$  sono di Gorenstein (in particolare regolari) anche  $B$  verifica la proprietà  $G_n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi è una conseguenza immediata del teorema 5.1 e della proposizione 4.7.

**COROLLARIO 5.3.** *Un anello  $A$  verifica la proprietà  $G_n$  (in particolare è di Gorenstein) se e soltanto se  $A[X]$  verifica tale proprietà.*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi discende immediatamente dal Corollario 5.2 in quanto sussistono i seguenti fatti:

$\alpha$ )  $\varphi : A \rightarrow A[X]$  è un omomorfismo fedelmente piatto (cfr. [1] ch. II ex. 5 p. 32 e [3] ch. I § 3 n. 1 prop. 1 p. 44).

$\beta$ ) per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$  la fibra di  $\varphi$  in  $\mathfrak{p}$  è la  $k(\mathfrak{p})$ -algebra  $A[X] \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong k(\mathfrak{p})[X]$  (cfr. [6] ex. 12.1 p. 56).

**TEOREMA 5.4.** *Siano  $A$  un  $\mathfrak{m}$ -anello (\*),  $\widehat{A}$  il suo completamento ed  $n$  un intero non negativo. Supponiamo inoltre che valga la seguente condizione:*

a) *per ogni ideale massimale  $\mathfrak{n}$  di  $A$  contenente  $\mathfrak{m}$ , le fibre formali di  $A_{\mathfrak{n}}$  verificano la proprietà  $\mathbf{G}_n$ .*

*Allora sono condizioni equivalenti:*

i)  *$\widehat{A}$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$ ;*

ii)  *$A_{\mathfrak{n}}$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$  per ogni ideale massimale  $\mathfrak{n}$  contenente  $\mathfrak{m}$ .*

*Se inoltre  $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$  (cioè se  $\widehat{A}$  è fedelmente piatto su  $A$  (cfr. [3], ch. III, § 3, n. 5, prop. 9, p. 72) le condizioni precedenti sono equivalenti a:*

iii)  *$A$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare la tesi si ricalca esattamente la dimostrazione del teorema 13.5 di [6] p. 60 che stabilisce risultati analoghi riguardo agli anelli che verificano la proprietà  $S_n$ .

Vogliamo provare adesso che la condizione a) del teorema 5.4 è verificata per ogni intero  $n$  non negativo se  $A$  è quoziente di un anello di Gorenstein.

**PROPOSIZIONE 5.5.** *Siano  $B$  un anello locale di Gorenstein,  $\mathfrak{b}$  un ideale  $B$  ed  $A = B/\mathfrak{b}$ . Allora le fibre formali di  $A$  sono di Gorenstein.*

**DIMOSTRAZIONE.** Si ricalca esattamente quella della proposizione 13.6 di [6] p. 61.

**COROLLARIO 5.6.** *La conclusione del teorema 5.4 è vera per ogni intero non negativo  $n$  se la condizione a) è sostituita da:*

a')  *$A$  è un anello quoziente di un anello di Gorenstein.*

---

\*) Ricordiamo che dato un anello  $A$  e un ideale  $\mathfrak{m}$  di  $A$  si può definire in  $A$  una topologia ponendo come sistema fondamentale di intorno dello zero l'insieme di tutte le potenze  $\mathfrak{m}^n$  ( $n \geq 0$ ), con tale topologia  $A$  è un anello topologico e viene chiamato  $\mathfrak{m}$ -anello (cfr. [6], p. 2).

**DIMOSTRAZIONE.** Il corollario è una conseguenza immediata della proposizione 5.5.

**PROPOSIZIONE 5.7.** *Siano  $A$  un  $\mathfrak{m}$ -anello tale che  $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$ ,  $\hat{A}$  il completamento ed  $\mathfrak{a}$  un ideale di  $A$ . Supponiamo inoltre che  $A$  sia di Gorenstein. Allora  $\mathfrak{a} \subset A$  è un  $\mathbf{G}$ -ideale se e soltanto se  $\widehat{\mathfrak{a}} \subset \hat{A}$  è tale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $(A/\mathfrak{a})^\wedge \cong \hat{A}/\widehat{\mathfrak{a}}$ , la tesi discende facilmente dalla proposizione 13.8 di [6] p. 61 e dall'applicazione del corollario 5.6 alla proprietà  $\mathbf{G}_0$  ricordando l'osservazione (III).

Dimostriamo infine una proposizione che permette di invertire, in un caso particolare, il risultato della proposizione 2.5.

**PROPOSIZIONE 5.8.** *Sia  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo (fedelmente) piatto di anelli con fibre verificanti la proprietà  $\mathbf{G}_0$ . Allora, se  $a_1, \dots, a_n \in A$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ , le immagini di tali elementi in  $B$  formano a loro volta una  $\mathbf{G}$ -successione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché le immagini in  $B$  degli elementi  $a_1, \dots, a_n \in A$  formano una  $B$ -successione (cfr. [3] ch. I § 2 n. 4 prop. 3 p. 29) per provare la tesi basta far vedere che per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , l'ideale  $(a_1, \dots, a_i)B$  ha le componenti primarie isolate irriducibili. Notiamo che, poiché  $a_1, \dots, a_n \in A$  formano una  $\mathbf{G}$ -successione in  $A$ , per ogni indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , l'anello  $A/(a_1, \dots, a_i)$  verifica la proprietà  $\mathbf{G}_0$  (cfr. oss. (I)).

Allora, essendo  $\bar{\varphi} : A/(a_1, \dots, a_i) \rightarrow B/(a_1, \dots, a_i)B$  (fedelmente) piatto (cfr. [3] ch. I § 1 n. 3 cor. prop. 5 p. 48) con fibre  $\mathbf{G}_0$  (poiché tali sono le fibre di  $\varphi$ ) la tesi discende immediatamente dal teorema 5.1.

**OSSERVAZIONE.** Riferendoci ancora a quanto formulato dopo la proposizione 2.5 notiamo che se  $\varphi : A \rightarrow B$  è un omomorfismo piatto di anelli e non si pone l'ipotesi che le fibre di  $\varphi$  verifichino la proprietà  $\mathbf{G}_0$ , possono esistere elementi di  $A$  formanti una  $\mathbf{G}$ -successione senza che le immagini in  $B$  di tali elementi formino a loro volta una  $\mathbf{G}$ -successione: ciò risulta dal seguente:

**ESEMPIO 9.**  *$\mathbf{G}$ -successione non ascende per piatezza.*

Sia  $(A, \mathfrak{m}, k)$  l'anello locale integro di dimensione 1 costruito in [12] proposizione 3.1 p. 303.  $A$  è tale che se  $K$  ed  $\hat{A}$  indicano rispettivamente il corpo delle frazioni e il completamento  $\mathfrak{m}$ -adico di  $A$ ,  $K \otimes_A \hat{A}$  non

è un anello di Gorenstein (ossia  $K_A \otimes \hat{A}$ , in quanto artiniano, non verifica la proprietà  $\mathbf{G}_0$ ).

Sia  $\psi: A[X] \rightarrow (K \otimes_A \hat{A})[X]$  l'omomorfismo definito in modo ovvio, chiaramente l'elemento  $X$  è una  $\mathbf{G}$ -successione di  $A[X]$  mentre la sua immagine mediante  $\psi$  non è una  $\mathbf{G}$ -successione di  $(K \otimes_A \hat{A})[X]$ : si può osservare che la fibra di  $\psi$  in  $X$  è  $K \otimes_A \hat{A}$  e cioè non verifica la proprietà  $\mathbf{G}_0$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] ATIYAH N. F. - MACDONALD I. G.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley Publ. Company (1969).
- [2] BASS H.: *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Zeitschr. **82** 8-28 (1963)
- [3] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative*, ch. I, II, III, IV, Hermann Paris (1961).
- [4] DIEDUDONNE J.: *Topics in local algebra*, Notre Dame Math. Lectures **10** (1967).
- [5] GRECO S. - SALMON P.: *Anelli di Macaulay*, Pubbl. Ist. Mat. Univ. Genova (1965).
- [6] GRECO S. - SALMON P.: *Topics in m-adic topologies* Ergebnisse der Math. Band. **58** (1971).
- [7] GRECO S.: *Anelli di Gorenstein*, Seminario Ist. Mat. Univ., Genova (1969).
- [8] GROTHENDIECK A.: *Éléments de Géométrie Algébrique*, IV (première et seconde partie) I.H.E.S. Publ. Math. n. 20 (1964) n. 24 (1965).
- [9] ISCHEBECK F.: *Eine Dualität zwischen den Funktoren Ext und Tor*, Journal of algebra **11** 510-531 (1969).
- [10] KAPLANSKI I.: *Commutative Rings*, Boston Allen and Bacon (1970).
- [11] MILLEVOI T.: *Sulle estensioni di un anello di Gorenstein*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, xli 319-325 (1968).
- [12] RAYNAUD M. - FERRAND, *Fibres formelles d'un anneau local noethérien* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série t. 3 295-311 (1970).
- [13] SHARP R. Y.: *Cousin Complex Characterization of two classes of Commutative noetherian rings*, J. London Math. Soc. (2) **3** 621-24 (1971).
- [14] ZARISKI O. - SAMUEL P.: *Commutative Algebra*, I, II, Van Nostand (1968).
- [15] WATABANE K. - ISHIKAWA T. - TACHIBANA S. - OTSUKA K.: *On tensor pro-sor product of Gorenstein rings*, J. Math., Kyoto Univ. **9**, 3, 413-23 (1969).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 marzo 1972.