RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO PEDRINI

Incollamenti di ideali primi e gruppi di Picard

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 48 (1972), p. 39-66

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__39_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 48 (1973)

INCOLLAMENTI DI IDEALI PRIMI E GRUPPI DI PICARD

CLAUDIO PEDRINI *)

SUMMARI - In this paper we define an explicit « glueing » of two prime ideals $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ in a noetherian ring B, in order to get a subring A of B, such that A is seminormal in B, and « obtained from B by glueing over the prime $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ of A », in the sense of [10]. We show that S_2 property goes down from B to A, when glueing primes of height 1. We give sufficient conditions on B, in order that Pic $A[T, T^{-1}] \simeq$ Pic A, where T is a finite set of indeterminates.

Introduzione.

Siano A un anello noetheriano, B un sopraanello intero e finito su A, $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A. Sia A' il più grande sottoanello di B contenente A tale che:

(i) vi è un solo primo $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$ al di sopra di $\mathfrak{p}$

(ii) l'omomorfismo canonico $k(\mathfrak{p}) \to k'(\mathfrak{p}')$ dei corpi residui è surgettivo.

C. Traverso in [10] ha chiamato l'anello A' « ottenuto da B per incollamento sul primo $\mathfrak{p}$ di A ».

Nel presente lavoro ci siamo proposti anzitutto di definire in un anello B un « incollamento » esplicito di due ideali primi $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ (non necessariamente distinti) in modo da ottenere da B un sottoanello

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica, via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

A tale che A risulti « ottenuto da B per incollamento sul primo $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ di A ».

La costruzione di tale anello A viene ottenuta a partire da un isomorfismo φ degli anelli $B/\mathfrak{P}_1$ e $B/\mathfrak{P}_2$; si dimostra, sotto opportune ipotesi su B e φ, che B risulta intero e finito su A (teoremi 1 e 3).

Si verifica poi (teoremi 2 e 4) che la proprietà S_2 (o proprietà di estensione) si mantiene da B a A se l'altezza degli ideali $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ è eguale a 1.

La seminormalità dell'anello A equivale, per un risultato di Traverso ([10], th. 3.6), all'isomorfismo $\mathrm{Pic}\, A \simeq \mathrm{Pic}\, A[T]$, dove T è un insieme finito di indeterminate su A. Ci siamo proposti di dare delle condizioni sull'anello B perchè valga l'isomorfismo più forte $\mathrm{Pic}\, A \simeq \simeq \mathrm{Pic}\, A[T, T^{-1}]$. Si ottengono i risultati seguenti. Se B è normale e se i primi $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono distinti si ha: $\mathrm{Pic}\, A \simeq \mathrm{Pic}\, A[T, T^{-1}]$ se e solo se $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2 \neq B$ (Teorema 6). Nel caso in cui $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_2$ vale la seguente condizione sufficiente (teorema 7): sia B una k-algebra finitamente generata e normale, $\mathfrak{P}$ un primo di altezza ≥ 1 e φ un k-automorfismo di periodo finito di B; allora se $B/\mathfrak{P}$ è normale si ha $\mathrm{Pic}\, A \simeq \simeq \mathrm{Pic}\, A[T, T^{-1}]$.

Il lavoro è corredato da vari esempi i quali mostrano, tra l'altro, che certi risultati, ottenuti in [9], sull'isomorfismo $\mathrm{Pic}\, A \simeq \mathrm{Pic}\, A[T, T^{-1}]$ relativi ad un anello di dimensione 1, non si estendono, in generale, al caso $\dim A > 1$.

1. In questo numero vengono richiamati alcune definizioni e risultati di cui faremo uso nei paragrafi seguenti. Tutti gli anelli che si considerano sono commutativi e con unità.

DEFINIZIONE. Siano A e B anelli $A \subset B$. Dicesi *conduttore* di A in B l'ideale

$$\mathfrak{b}=\{x \in A / xB \subset A\}.$$

$\mathfrak{b}$ è il massimo ideale di B contenuto in A.

LEMMA 1. *Siano A e B anelli tali che $A \subset B$ e B è un A-modulo di tipo finito. Sia $\mathfrak{b}$ il conduttore di A in B e $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A. Allora il conduttore di $A_\mathfrak{p}$ in $B_\mathfrak{p}$ è $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$. Risulta inoltre $A_\mathfrak{p} \neq B_\mathfrak{p}$ se e solo se* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ (per la dimostrazione cfr. [1], p. 269).

Lemma 2. *Sia $A \subset B$ e $\mathfrak{b}$ il conduttore di A in B. Le seguenti condizioni sono equivalenti*:

a) $B/\mathfrak{b}$ *è ridotto*;

b) $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$;

c) $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\sqrt[A]{\mathfrak{b}}$;

d) $\mathrm{nil}\,(A/\mathfrak{b})=\mathrm{nil}\,(B/\mathfrak{b})$

Dim. Cfr. [7], lemma 4.

Sia A un anello: con $H_0(A)$ indichiamo il gruppo abeliano delle funzioni continue definite su Spec A e a valori in $\mathbf{Z}$ (questo ultimo minuto della topologia discreta).

Lemma. 3. *Se A è noetheriano, $H_0(A)$ è libero di rango finito ed eguale al numero delle componenti connesse di* Spec A.

Dim. Cfr. [8], Prop. 1.

Se A è notheriano, si indica con $h_0(A)$ il rango di $H_0(A)$, cioè il numero delle componenti connesse di Spec. A.

Richiamiamo ora alcune definizioni e risultati di C. Traverso sugli anelli seminormali (cfr. [10]) di cui faremo uso nei numeri seguenti.

Definizione. Siano A e B anelli, $A \subset B$, B intero su A. Si dice *seminormalizzazione* di A in B l'anello:

$$ {}_B{}^+A=\{b\in B/\forall\mathfrak{p}\in \text{Spec A},\ \tilde{b}\in A_\mathfrak{p}+\mathrm{Rad}\,(B_\mathfrak{p})\} $$

dove $\tilde{b}$ indica l'immagine di b in $B_\mathfrak{p}$.

Se $A={}_B{}^+A$, A si dice *seminormale in B*. Se B è la chiusura integrale di A nel suo anello totale delle frazioni e $A={}_B{}^+A'$, allora A si dice *seminormale*.

Proposizione 1. ${}_B{}^+A$ *è il più grande sottanello A' di B tale che*:

(*i*) *Per ogni primo* $\mathfrak{p}\in$ Spec A *esiste un solo primo* $\mathfrak{p}'\in$ Spec A' *al di sopra di* $\mathfrak{p}$

(*ii*) *l'omomorfismo canonico* $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\to A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'A'_{\mathfrak{p}'}$ *è un isomorfismo.*

DIM. Cfr. [10], p. 587.

Siano A e B anelli noetheriani tali che $A \subset B$ e B è intero e finito su A. Siano $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A, $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ gli ideali primi di B al di sopra di $\mathfrak{p}$.

Poniamo:

$$k = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\,,\ K_i = B_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i B_{\mathfrak{p}_i} \qquad (i=1, \ldots, n),$$

$w_i : k \to K_i$, $f_i : B — K_i$.

Sia A' il sottoanello di B costituito da tutti gli elementi $b \in B$ tali che

(i) $f_i(b) \in w_i(k)$

(ii) $w_i^{-1}(f_i(b)) = w_j^{-1}(f_j(b))$ $(i=1, \ldots, n)$

DEFINIZIONE. *A' dicesi ottenuto da B incollando su $\mathfrak{p}$.*

PROPOSIZIONE 2. *A' è il più grande sottoanello di B contenente A e tale che*:

(i) *Esiste un solo primo* $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$ *al di sopra di* $\mathfrak{p}$;

(ii) *L'omorfismo canonico*

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \to A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'A'_{\mathfrak{p}'}$$

è un isomorfismo.

Inoltre A' è seminormale in B e il conduttore di A' in B contiene $\mathfrak{p}$.

DIM. Cfr. [10], p. 588.

ESEMPI. 1) L'anello $A = k[X+Y, XY, X^2Y]$ è ottenuto da $B = k[X, Y]$ incollando su $\mathfrak{p} = (XY, X^2Y)$.

2) L'anello $A = k[X^2, Y, XY]$ è ottenuto da $B = k[X, Y]$ incollando su $\mathfrak{p} = (Y, XY)$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia A un anello notheriano ridotto tale che la sua chiusura integrale sia finita su A. Sia T un insieme finito di indeterminate su A. L'omorfismo canonico* $\operatorname{Pic} A \to \operatorname{Pic} A[T]$ *è un isomorfismo se e solo se A è seminormale.*

DIM. Cfr. [10] pag. 593.

PROPOSIZIONE. 4. *Siano A e T come nella prop. 3 e inoltre* $\dim A=1$. *Allora l'omomorfismo canonico* $\operatorname{Pic} A \to \operatorname{Pic} A[T]$ *e un isomorfismo se e solo se risulta* $\sqrt[\overline{A}]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$, *dove $\overline{A}$ è la chiusura integrale di A e $\mathfrak{b}$ il conduttore di A in A.*

DIM. Cfr. Endô [5] th.4.7 o Bass-Murthy [2], Th.8.1.

PROPOSIZIONE 5. *Siano A e T come nella proposizione 3 e inoltre* $\dim A=1$. *Allora l'omomorfismo canonico* $\operatorname{Pic} A \to \operatorname{Pic} A[T, T^{-1}]$ *è un isomorfismo se e solo se sono verificate le seguenti due condizioni*:

(*i*) $\sqrt[\overline{A}]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$;

(*ii*) $h_0(A) - h_0(A/\mathfrak{b})=h_0(\overline{A})-h_0(\overline{A}/\mathfrak{b})$

DIM. Cfr. [2], Teorema 8.1.

DEFINIZIONE. Un diagramma commutativo di anelli e omomorfismi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & A' \end{tikzcd}$$

dicesi un *quadrato cartesiano* se sono verificate le seguenti condizioni:

1) Esiste un isomorfismo $\varphi\colon A \to A_1 \times_{A'} A_2=\{(a_1, a_2) \leftarrow A_1 \times A_2 / f_1(a_1)=f_2(a_2)\}$;

2) risulta $\pi_1\varphi=h_1$, $\pi_2\varphi=h_2$ dove π_1 e π_2 sono le proiezioni canoniche di $A_1 \times_{A'} A_2$ in A_1 e A_2.

LEMMA 4. *Siano A un anello $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di A. Il seguente diagramma commutativo è un quadrato cartesiano*

$$\begin{tikzcd} A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & A/\mathfrak{a} \arrow[d, "f_1"] \\ A/\mathfrak{b} \arrow[r, "f_2"'] & A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \end{tikzcd}$$

DIM. Sia

$$A' = (A/\mathfrak{a}) \times_{A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} (A/\mathfrak{b}) = \{(\alpha, \beta) \in (A/\mathfrak{a}) \times (A/\mathfrak{b}) / f_1(\alpha) = f_2(\beta)$$

Definiamo $\varphi : A \to A'$ ponendo $\varphi(a) = (a, a)$. φ è surgettiva: sia infatti $(\alpha, \beta) \in A'$ con $\alpha = \bar{a} (a \in A)$, $\beta = \bar{b}$, $(b \in A)$. Risulta, essendo $f_1(\bar{a}) = f_2(\bar{b})$: $a \equiv b \pmod{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ e quindi $a + a_1 = b + b_1$ con $a_1 \in \mathfrak{a}$, $b_1 \in \mathfrak{b}$. Posto allora: $c = a + a_1 = b + b_1$ si ha $\varphi(c) = (\alpha, \beta)$. Risulta Ker $\varphi = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$; inoltre la 2) è ovviamente verificata.

Dimostriamo infine un risultato sugli anelli che verificano la cosidetta « proprietà di estensione » di cui faremo uso sia nel n. 2 che nel n. 3.

PROPOSIZIONE 6. *Sia A un anello noetheriano integro. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) $A = \cap A_{\mathfrak{p}}$ *al variare di* $\mathfrak{p}$ *tra i primi di altezza* 1.

(2) *Ogni ideale principale di* A *è puro* (*di altezza* 1).

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2): Se gue da [6], cap. IV (5.10.17).

(2) $\Rightarrow$ (1) Poiché $A \subset \cap A_{\mathfrak{p}}$, basta dimostrare che $\cap A_{\mathfrak{p}} \subset A$, cioè che, se $x \in K$ (corpo delle frazioni di A) e $x \notin A$, allora esiste un primo $\mathfrak{p}$ di altezza 1 tale che $x \notin A_{\mathfrak{p}}$. Sia $x = \frac{a}{b}$: allora $x \notin A$ implica $bA : aA \neq A$. Esiste dunque un ideale primo proprio $\mathfrak{p}$ associato a bA; aA, cioè esiste $c \in A$ tale che $\mathfrak{p} = (bA : aA) : cA$. Ne segue $\mathfrak{p} = bA : (ac)A$ e quindi $\mathfrak{p}$ è associato all'ideale principale bA. Per la (2) $\mathfrak{p}$ ha altezza 1. Per provare che $x \notin A_{\mathfrak{p}}$ basta dimostrare che $bA_{\mathfrak{p}} : aA_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}}$. Questo segue dall'identità: $bA_{\mathfrak{p}} : aA_{\mathfrak{p}} = (bA : aA)A_{\mathfrak{p}}$ e dal fatto che $bA : aA \subset \mathfrak{p}$.

DEFINIZIONE. Sia A un anello noetheriano integro: diremo che A *verifica la proprietà* S_2 (o « *proprietà di estensione* ») se verifica una delle condizioni equivalenti della prop. 6.

2. In questo paragrafo dimostriamo come, dato un anello B si possa (sotto opportune ipotesi) costruire un anello A incollando due primi distinti $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ di B in modo che il conduttore di A in B sia esattamente $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ e A risulti ottenuto da B incollando su $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ (nel senso del § 1).

Nel teorema 1 si mostra inoltre quali sono le ipotesi sufficienti affinché B risulti intero e finito su A.

Questa costruzione permette di determinare, a partire da una varietà V, e da due sottovarietà irriducibili V_1 e V_2, una varietà W, ottenuta « incollando » (o « identificando ») V_1 con V_2: basta supporre che esista un isomorfismo tra V_1 e V_2 che induca l'identità su $V_1 \cap V_2$.

DEF. Siano B un anello, $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ ideali primi distinti, $\varphi : B/\mathfrak{P}_1 \to B/\mathfrak{P}_2$ un isomorfismo tale che risulti: $\varphi(\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1)=\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_2$. φ induce allora, passando al quoziente, un isomorfismo $\bar{\varphi} : B/\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2 \to B/\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2$.

Sia A l'anello definito da

$$A=\{b \in B/\varphi(b(\mathfrak{P}_1))=b(\mathfrak{P}_2)\}$$

(dove con $b(\mathfrak{P}_i)$ indichiamo l'immagine di b in $B/\mathfrak{P}_i$; $1 \leq i \leq 2$).

A si dice ottenuto da B incollando $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ *mediante* φ.

Risulta evidentemente: $A \subset B$ e $A \cap \mathfrak{P}_1 = A \cap \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \subset A$.

LEMMA 5. *L'ideale* $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ è primo in A e coincide con il con*duttore di A in B.*

DIM. La prima affermazione è ovvia. Sia $\mathfrak{b}=\{x \in A/xB \subset A\}$ il conduttore: dalla definizione di A segue immediatamente $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b}$. Proviamo che $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Poiché $\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}_2$ esiste un elemento $b_0 \in \mathfrak{P}_i$, $b_0 \notin \mathfrak{P}_j$; $(i \neq j$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2)$. Supponiamo $i=1$, $j=2$ (se fosse $i=2$, $j=1$ si procede in maniera del tutto analoga). Sia $x \in \mathfrak{b}$: risulta $xb_0 \in A$ cioé

$$\varphi((xb_0)(\mathfrak{P}_1))=(xb_0)(\mathfrak{P}_2)$$

Poiché $b_0(\mathfrak{P}_1)=0$ si ha

$$xb_0 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_2}$$

cioè $xb_0 \in \mathfrak{P}_2$, da cui (essendo $b_0 \notin \mathfrak{P}_2$) : $x \in \mathfrak{P}_2$. Quindi $x \in A \cap \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{p}$.

PROPOSIZIONE 7. *Sia A ottenuto da B incollando* $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2 (\mathfrak{P}_1 \neq \mathfrak{P}_2)$ *mediante* φ. *Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *L'omomorfismo* $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{P}_1$ è surgettivo

(ii) $\bar{\varphi}$ *è l'identità.*

DIM. Dal lemma 4 segue che il seguente quadrato è cartesiano:

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} B/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & B/\mathfrak{P}_1 \arrow[d, "f_1"] \\ B/\mathfrak{P}_2 \arrow[r, "f_2"'] & B/\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2 \end{tikzcd}$$

e si ha inoltre il seguente diagramma commutativo:

$$(2)\qquad \begin{tikzcd} B/\mathfrak{P}_1 \arrow[r, leftrightarrow, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & B/\mathfrak{P}_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B/\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "\bar\varphi"'] & B/\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2 \end{tikzcd}$$

Proviamo che (i)$\Rightarrow$(ii): sia $x\in B/(\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2)$, $x=\bar b$ con $b\in B$. Dalla (1) segue che esiste $a\in A$ tale che $a(\mathfrak{p})=b(\mathfrak{P}_1)$ e quindi $x=\bar a$ in $B/(\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2)$. Dalla definizione di A e dalla commutatività di (2) si ricava

$$\bar\varphi(x)=f_2(\varphi(a(\mathfrak{p})))=\bar a=x$$

(ii)$\Rightarrow$(i): sia i l'omomorfismo iniettivo i: $A/\mathfrak{p}\to B/\mathfrak{P}_1$ e sia $x\in B/\mathfrak{P}_1$. Poniamo $y=\varphi(x)$: dalla commutatività di (2) segue, essendo $\bar\varphi$ l'identità, $f_1(x)=f_2(y)$. Poiché (1) è un quadrato cartesiano esiste $z\in B/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2=$ $=B/\mathfrak{p}$, tale che: $h_1(z)=x$, $h_2(z)=y$. Per la definizione di A, $z\in A/\mathfrak{p}$ e $i(z)=x$, i è quindi surgettivo.

TEOREMA 1. *Siano B un anello noetheriano e A l'anello ottenuto da B incollando* $\mathfrak{P}_1$ *e* $\mathfrak{P}_2$ $(\mathfrak{P}_1\neq\mathfrak{P}_2)$ *mediante un automorfismo* φ *tale che* $\bar\varphi$ *è l'identità. Risulta allora*

a) *B è intero su A*;

b) *B è un A-modulo di tipo finito*;

c) *A è noetheriano*;

d) *A è seminormale in B e coincide con l'anello A′ ottenuto da B incollando su* $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$ (*nel senso del n.* 1).

DIM. a): Siano $f_i : B \to B/\mathfrak{P}_i (1 \le i \le 2)$ gli omomorfismi canonici e sia $\mathfrak{P}_1 = (x_1, ..., x_n)$, $\mathfrak{P}_2 = (y_1, ..., y_m)$ in B. Si ha, per ipotesi, $\varphi(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}^1) = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_2$ e quindi $\varphi^{-1}(f_2(x_i)) \in f_1(\mathfrak{P}_2)$ $(1 \le i \le n)$: esistono pertanto nm elementi $b_{ij} \in B (1 \le i \le n;\ 1 \le j \le m)$ *tali che*:

$$\varphi^{-1}(f_2(x)) = \sum_{j=1}^{m} f_1(b_{ij} y_j) \qquad (1 \le i \le n)$$

Posto allora $h_i = \sum_{j=1}^{m} b_{jj} y_j$; $(1 \le i \le n)$ risulta: $h_i \in \mathfrak{P}_2$, $f_1(x_i + h_i) = f_1(h_i)$, $f_2(x_i + h_i) = f_2(x_i)$ e quindi

$$\varphi(f_1(x_i + h_i) = \varphi(f_1(h_i)) = f_2(x_i) = f_2(x_i + h_i)$$

da cui $x_i + h_i \in A (i \le i \le n)$. D'altra parte si ha

$$x_i h_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \subset A$$

Ne segue che $x_i (1 \le i \le n)$ è intero su A in quanto

$$(x_i)^2 - (x_i + h_i) x_i + x_i h_i = 0$$

Quindi ogni elemento di $\mathfrak{P}_1$ è intero su A. Dalla (i) della prop 6 segue che per ogni $b \in B$ esiste a $\in A$ tale che $a \equiv b$ (mod. $\mathfrak{P}_1$), cioè $B = A + \mathfrak{P}_1$. B è per ciò intero su A.

b) Poiché $B = A + \mathfrak{P}_1$ per ogni $b \in B$ esistono a $\in A$ e $c_1, ..., c_n \in B$ tali che $b = a + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$: d'altra parte risulta anche $B = A + \mathfrak{P}_2$ e quindi esistono elementi $d_{ij} \in B (1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ tali che $c_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}$ con $a_i \in A$ $(1 \le i \le n)$. Ne segue

$$b = a + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j} d_{ij} x_i y_j$$

e quindi, essendo $x_i y_j \in A$, risulta $b \in A[x_1, ..., x_n]$. Si ha pertanto

$$B = A[x_1, ..., x_n]$$

onde l'asserto.

c) Risulta $A/\mathfrak{p} \simeq B/\mathfrak{P}_1$ e quindi $A/\mathfrak{p}$ è un A-modulo noetheriano. Basta quindi provare che $\mathfrak{p}$ è un A-modulo noetheriano per ottenere che A è un A-modulo noetheriano.

Siano $(z_1, \ldots, z_t)$ elementi di $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ che generano $\mathfrak{p}$ come ideale di B. Per ogni $p \in \mathfrak{p}$ si ha: $p = \sum_{h=1}^{t} b_h z_h$ con $b_h \in B$: dalla *b*) segue $b_h = \sum_{i=1}^{n} a_{hi} x_i$ con $a_{hi} \in A$ e quindi $p = \sum_{n,i} a_{hi} z_h x_i$. Poiché $\mathfrak{p}$ è il conduttore di A in B (Lemma 5) risulta $z_h x_i \in \mathfrak{p} (1 \leq h \leq t, 1 \leq i \leq n)$ e quindi $\mathfrak{p}$, come ideale di A, è generato dagli nt elementi $z_h x_i$.

d) Basta provare che $A = A'$: il resto segue dala prop. 2. Sia $\mathfrak{P}$ un ideale di B tale che $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$: risulta $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}$ e quindi $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}$ o $\mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}$; Poiché B è intero su A questo implica $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ o $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2$, cioè $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ sono gli unici ideali primi di B al di sopra di $\mathfrak{p}$. Dalla definizione di A' segue $A \subset A'$: mostriamo che $A' \subset A$.

Poniamo. $k = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ (=corpo dei quozienti di $A/\mathfrak{p}$), $K_i = B_{\mathfrak{P}_i}/\mathfrak{P}_i B_{\mathfrak{P}_i}$ (=corpo dei quozienti di $B/\mathfrak{P}_i$; $1 \leq i \leq 2$), $f_i : B \to K_i$, $w_i : k \to K_i$. L'automorfismo φ si prolunga ad un automorfismo $\varphi^* K_1 \leftrightarrow K_2$ e il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[rr, leftrightarrow, "\varphi^*"] & & K_2 \\ & k \arrow[ul, "w1"] \arrow[ur, "w2"'] & \end{tikzcd}$$

Sia $b \in A'$: esiste allora (vedi § 1) $x \in k$ tale che: $f_1(b) = w_1(x)$, $f_2(b) = w_2(x)$. Ne segue:

$$\varphi(b(\mathfrak{P}_1)) = \varphi(f_1(b)) = \varphi^*(w_1(x)) = w_2(x) = f_2(b) = b(\mathfrak{P}_2)$$

e quindi $b \in A$.

COROLLARIO. *Nelle stesse ipotesi del Teorema* 1 *se B è una k-algebra finitamente generata* (*k un corpo*) *e* φ *un isomorfismo di k-algebre, A risulta una k-algebra finitamente generata.*

DIM. Per la definizione di A risulta $k \subset A \subset B$; per la a) del Teorema 1 B è intero su A. Ne segue (cfr. [4], p. 33) che A è una k-algebra finitamente generata.

La proposizione seguente mostra sotto quali ipotesi B risulta la chiusura integrale di A. Ne segue, in particolare che la varietà W ottenuta incollando due sottovarietà irriducibili V_1 e V_2 di una varietà normale V, è seminormale e V è la sua normalizzata.

PROPOSIZIONE 8. *Con le stesse notazioni ed ipotesi del Teorema* 1 *supponiamo inoltre che B sia ridotto, integralmente chiuso e che risulti* $ht(\mathfrak{P}_i)\geqslant 1$ $(1\leq i\leq 2)$. *Allora B coincide con la chiusura integrale* $\overline{A}$ *di A nel suo anello totale delle frazioni ed è finito su A.*

DIM. Basta provare che l'anello totale delle frazioni A_S di A coincide con l'anello totale delle frazioni B_T di B. Il resto segue dal Teorema 1. Siano $\mathfrak{p}'_1$, ..., $\mathfrak{p}'_n$ i primi minimali di A, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_N$ i primi minimali di B: si ha allora

$$B_T=\prod_{j=1}^{N} B_{\mathfrak{P}'_i} \qquad A_S=\sum_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}'_i}$$

Dalle ipotesi, essendo $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2=\mathfrak{P}_1\cap A=\mathfrak{P}_2\cap A$ il conduttore di A in B, segue $\mathfrak{p}\not\subset\mathfrak{p}'_i(1\leq i\leq n)$ e quindi (lemma 1) $B_{\mathfrak{p}'_i}=A_{\mathfrak{p}'_i}$: esiste perciò un solo primo di B al di sopra di $\mathfrak{p}'_i(1\leq i\leq n)$, cioè risulta $n=N$ e $B_{\mathfrak{P}'_i}=B_{\mathfrak{p}'_i}=A_{\mathfrak{p}'_i}$. Si ha pertanto $A_S=B_T$.

Il seguente Teorema 2 fa vedere che, incollando primi di altezza 1, la proprietà S_2 si conserva da B a A. Occorre premettere un lemma.

LEMMA 5. *Siano* $A\subset B$ *anelli integri, B intero su A e B verifica* S_2. *Posto* $A^{(1)}=\bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$ *risulta* $A\subset A^{(1)}\subset B$.

DIM. Poiché B è intero su A ogni ideale primo $\mathfrak{P}$ di altezza 1 di B si contrae ad un ideale primo di altezza 1 di A e viceversa per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di altezza 1 di A esiste un ideale primo $\mathfrak{P}$ di altezza 1 di B che si contrae a $\mathfrak{p}$. Inoltre $A_{\mathfrak{p}}\subset B_{\mathfrak{P}}$, *se* $\mathfrak{P}\cap A=\mathfrak{p}$. Ne segue (prop. 6)

$$A^{(1)}=\bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}\subset\bigcap_{h(\mathfrak{P})=1} B_{\mathfrak{P}}=B.$$

Poiché l'inclusione $A\subset A^{(1)}$ è ovvia si ha l'asserto.

TEOREMA 2. *Con le stesse notazioni ed ipotesi del Teorema* 1, *supponiamo inoltre che B sia integro e* $\mathfrak{P}_i$ *abbia altezza* 1 $(1\leq i\leq 2)$.

Se B verifica la S_2, *anche A verifica la* S_2.

DIM. Proviamo che A verifica la (1) della prop. 6, cioè che risulta $A = A^{(1)} = \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$. Basta dimostrare che $A^{(1)} \subset A$; se $b \in A^{(1)}$, per il lemma 5, $b \in B$. *Sia* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ il conduttore di A in B. Poiché $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap A$, risulta $ht(\mathfrak{p}) = 1$ e quindi $b \in A_{\mathfrak{p}}$, cioè $b = \dfrac{a}{s}$ con $a \in A$, $s \in A - \mathfrak{p}$. Ne segue: $s(\mathfrak{P}_1) \,.\, b(\mathfrak{P}_1) = a(\mathfrak{P}_1)$: applicando φ si trova

$$\varphi(s(\mathfrak{P}_1)) \,.\, \varphi(b(\mathfrak{P}_1)) = \varphi(a(\mathfrak{P}_1)) = a(\mathfrak{P}_2) = s(\mathfrak{P}_2)\varphi(b(\mathfrak{P}_1))$$

da cui, essendo $s(\mathfrak{P}_2) \neq 0$, $\varphi(b(\mathfrak{P}_1) = (\mathfrak{P}_2)$, cioè $b \in A$.

OSSERVAZIONI. Il Teorema 2 non è più vero, in generale, se si toglie l'ipotesi che $\mathfrak{P}_i$ abbia altezza 1: siano k un corpo algebricamente chiuso e A l'anello ottenuto da $B = k[Y, Y]$ incollando $\mathfrak{P}_1 = (X\text{-}1, Y)$ e $\mathfrak{P}_2 = (x+1, y)$ mediante l'automorfismo identico di $B/\mathfrak{P}_1 = B/\mathfrak{P}_2 = k$. Risulta allora

$$A = K[XY, Y, X^2 - 1, X(X^2 - 1)]$$

e A non verifica la proprietà S_2.

ESEMPI. in tutti gli esempi che seguono k indica un corpo algebricamente chiuso.

1) Siano $B = k[X, Y]$, $\mathfrak{P}_1 = (X)$, $\mathfrak{P}_2 = (Y)$: risulta $B/\mathfrak{P}_1 \simeq k[Y]$, $B/\mathfrak{P}_2 \simeq k[X]$. Definiamo φ: $B/\mathfrak{P}_1 \leftrightarrow B/\mathfrak{P}_2$ ponendo $\varphi(Y) = X$. Risulta allora $\bar{\varphi} =$ identità. Si ha

$$A = \{f(X, Y) \in k[X, Y] / f(0, X) = f(X, 0)\}$$

e quindi:

$$f(X, Y) \in A \Leftrightarrow f(X, Y) = a_0 + a_1(X+Y) + a_2(X+Y)^2 + \dots + a_n(X+Y)^n +$$
$$+ XYg(X, Y)$$

con $a_i \in e g(X, Y) \in k[X, Y]$. Ne segue

$$A = k[X+Y, XY, X^2Y].$$

B coincide con la chiusura integrale di A, il conduttore di A in B è l'ideale $\mathfrak{p}=(XY, X^2Y)$ e risulta $\mathfrak{p}=(X)B \cap (Y)B$.

Infine $A/\mathfrak{p} \simeq k[X+Y] \simeq k[Y] \simeq k[X]$.

A è l'anello delle coordinate della superficie cubica di k^3 di equazione

$$Y^3+Z^2-XYZ=0$$

Tale superficie ha l'asse X come retta doppia: tale retta coincide con la varietà del conduttore $\mathfrak{p}$ di A in B. Il cono tangente nel punto generico $(a, 0, 0)$ della retta doppia è spezzato nel piano fisso $Z=0$ e nel piano variabile a $Y=2Z$.

2) Consideriamo ora un esempio che mostra, come senza l'ipotesi $\bar{\varphi}=$identità il Teorema 1 non sia, in generale, vero. Siano $B=k[X, Y, Z]$, $\mathfrak{P}_1=(X)$, $\mathfrak{P}_2=(Y)$, $\varphi : B/\mathfrak{P}_1 \leftrightarrow B/\mathfrak{P}_2$ definito mediante $\varphi(Y)=X$ e $(Z)=aZ$, con $a \in k$ tale che $a^n \neq 1$ per ogni intero positivo n.

L'automorfismo $\bar{\varphi}$ di $B/\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2=k[Z]$ è allora diverso dall'identità.

Si ha:

$$A=\{f(X, Y, Z) \in B/f(0, X, aZ)=f(X, 0, Z)\}$$

e quindi

$$f(X, Y, Z) \in A \Leftrightarrow f(X, Y, Z)=\sum_{i=1}^{n} f_i(X, Y)Z^i \text{ con } f_i(X, 0)=a^i f_i(0, X)$$

Risulta perciò: $f_0(X, 0)=f_0(0, X)$, $f_i(X, 0)=a^i f_i(0, X)$ per $i>0$. Poiché $a^i \neq 1$ si trova $f_i(0, 0)=0$ e inoltre

$$f_i(X, Y)=b_1(a^iX+Y)+b_2(a^iX^2+Y^2)+ \dots +XYh_i(X, Y)=$$
$$=(a^iX+Y)[b_1+b_2(X+Y)+b_3(X+Y)^2+ \dots +XY\bar{h}_i(X, Y)].$$

In conclusione risulta $f \in A$ se e solo se:

$$f(X, Y, Z)=g_0(X, Y)+ \sum_{i=1}^{n} g_i(X, Y)(a^iX+Y)Z$$

con $g_i(X, Y) \in k[X+Y, XY, X^2Y](0 \leq i \leq n)$.

B non è intero su A: supponiamo per assurdo che z sia intera su A, cioè che si abbia

$$Z^n + f_{n-1}Z^{n-1} + \dots + f_0 = 0 \text{ in } B, \text{ dove } f_i \in A.$$

Per quanto sopra visto risulta $f_i(X, Y, Z) = a_i + h_i(X, Y, Z)$ con $a_i \in k$ e $h_i \in (X, Y)B$. Ne segue

$$Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \dots + a_0 = h(X, Y, Z) \in (X, Y)B, \text{ con } a_i \in k.$$

Deve perci aversi $h(X, Y, Z) = 0$ il che porta a un assurdo.

3) Siano $B = k[X, Y]$, $\mathfrak{P}_1 = (X+1)$, $\mathfrak{P}_2 = (X-1)$, $\varphi : B/\mathfrak{P}_1 \leftrightarrow B/\mathfrak{P}_2$ definito da $\varphi(Y) = Y$. Risulta allora

$$A = k[X^2 - 1,\ X(X^2 - 1),\ Y]$$

$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = (X^2 - 1,\ X(X^2 - 1))$ e B è la chiusura integrale di A.

3. In questo paragrafo dimostriamo come, da un anello B si possa costruire un anello A ottenuto « incollando » un ideale primo $\mathfrak{P}$ di B su se stesso mediante un automorfismo φ.

In maniera analoga a quanto visto nel n. 2 per il caso di due ideali primi distinti, si dimostra che (sotto opportune ipotesi per φ), se B è l'anello delle coordinate di una varietà algebrica affine V, A risulta anch'esso l'anello delle coordinate di una varietà algebrica affine e A è seminormale in B.

Def. Siano B un anello $\mathfrak{P}$ un ideale primo di B, φ un automorfismo di $B/\mathfrak{P}$.

L'anello

$$A = \{ b \in B / \varphi(\bar{b}) = \bar{b} \}$$

(dove B indica l'immagine di b in $B/\mathfrak{P}$) dicesi ottenuto da B *incollando* $\mathfrak{P}$ *mediante* φ.

Lemma 6. *Si ha* : $A \leq B$, $A/\mathfrak{P} \leq B/\mathfrak{P}$ *e vale* $=$ *se solo se* φ *è* *l'automorfismo identico.* Se $A \neq B$, *l'ideale* $\mathfrak{P}$ è il conduttore di A *in* B *e risulta* $A/\mathfrak{P} = \{x \subset B/\mathfrak{P} / \varphi(x) = x\}$.

DEF. C'è solo da provare che, se $A \neq B$, $\mathfrak{P}$ è il conduttore: il resto segue dalla definizione di A. Evidentemente $\mathfrak{P} \subset A$ e $\mathfrak{P}$ un ideale di B. Quindi $\mathfrak{P}$ è contenuto nel conduttore. Sia viceversa $x \in A$ tale che $x \subset A$. Risulta allora, per ogni $b \in B$, $\varphi(\bar{x}\bar{b}) = \bar{x}\bar{b} = \bar{x}\varphi(\bar{b})$. Sia $b_0 \in B$, $b_0 \notin A$: si ha $\varphi(\bar{b}_0) \neq \bar{b}_0$ e quindi, essendo $B/\mathfrak{P}$ integro, da $\bar{x}\bar{b}_0 = \bar{x}\varphi(b_0)$ *segue* $\bar{x} = 0$ cioè $x \in \mathfrak{P}$.

Indichiamo con G il sottogruppo del gruppo di tutti gli automorfismi di $B/\mathfrak{P}$ generato da φ. G opera su $B/\mathfrak{P}$, nel senso che l'applicazione $x \to \sigma x$ è un endomorfismo della $(A/\mathfrak{P})$-algebra $B/\mathfrak{P}$, per ogni $\sigma \in G$. Risulta inoltre

$$A/\mathfrak{P} = \{x \in B/\mathfrak{P} / \sigma(x) = x, \ \forall \sigma \in G\} = (B/\mathfrak{P})^G.$$

Ricordiamo che un gruppo di operatori G su un anello R si dice *localmente finito* (cfr [4], p. 33) se tutte le orbite di G su R sono finite.

PROPOSIZIONE 9. *Siano B un anello, $\mathfrak{P}$ un ideale primo di B, φ un automorfismo di $B/\mathfrak{P}$. Detto A l'anello ottenuto da B incollando su $\mathfrak{P}$ mediante φ, le seguenti condizioni sono equivalenti*

(1) *B è intero su A.*

(2) *Per ogni x esiste un intero positivo $n(x)$ tale che $\varphi^{n(x)}(x) = x$.*

(3) *Il sottogruppo ciclico G generato da φ è lacolmente finito.*

DIM (2) $\Leftrightarrow$ (3): Basta osservare che le orbite di G su $B/\mathfrak{P}$ sono tutte del tipo x, $\varphi(x)$, $\varphi^2(x)$ ..., $\varphi^n(x)$, ... con $x \in B/\mathfrak{P}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Dalla prop. 22, a pag. 33 di [4], tenuto conto che G opera su $B/\mathfrak{P}$ e che $A/\mathfrak{P} = (B/\mathfrak{P})^G$, si ricava che $B/\mathfrak{P}$ è intero $A/\mathfrak{P}$. Ne segue che B è intero su A.

(1) $\Rightarrow$ (2): Risulta $B/\mathfrak{P}$ intero su $A/\mathfrak{P}$: se $x \in B/\mathfrak{P}$ esiste $f(X) \in$ $\in (A/\mathfrak{P})[X]$ monico tale che $f(x) = 0$.

Dal lemma 6 segue: $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x) = 0$ e quindi $\varphi(x)$ è una radice di $f(X)$. Poiché $A/\mathfrak{P}$ è integro un polinomio di $(A/\mathfrak{P})[X]$ ha un numero finito di radici: esiste dunque un intero $n(x)$ tale che $\varphi^{n(x)}(x) = x$.

DEFINIZIONE: Se φ verifica una delle due condizioni equivalenti (2) e (3), della proposizione 8 diremo che φ *è localmente finito.*

COROLLARIO: *Se φ è localmente finito A è seminormale in B.*

DIM. Dalla proposizione 8 segue che B è intero su A. Proviamo che risulta:

$$A = {}_B{}^+A = \{b \in B / \tilde{b} \in A_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Rad}\,(B_{\mathfrak{p}}),\ \forall\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A\}.$$

Basta mostrare che ${}_B{}^+A \subset A$. Se $\mathfrak{P}$ è il conduttore di A in B si ha: $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, A$ e $\mathrm{Rad}\,(B_{\mathfrak{P}}) = \mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$. Quindi per ogni $b \in {}_B{}^+A$ risulta

$$\frac{b}{1} = \frac{a}{s} + \frac{p}{t} \text{ con } a \in A,\ p \in \mathfrak{P},\ s \in A - \mathfrak{P},\ t \in B - \mathfrak{P}.$$

Ne segue

$$\left(\frac{\bar{b}}{1}\right) = \left(\frac{\bar{a}}{s}\right) \text{ in } B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$$

e quindi $t\bar{b} = \bar{a}$ in $B/\mathfrak{P}$. Applicando φ ad ambedue i membri si trova $\varphi(\bar{s}\bar{b}) = \bar{s}\bar{b} = \varphi(\bar{s})\varphi(\bar{b}) = \bar{s}\varphi(\bar{b})$, da cui, essendo $\bar{s} \neq 0$, si ricava $\bar{b} = (\bar{b})$ cioè $b \in A$.

TEOREMA 3: *Siano k un corpo, B una k-algebra finitamente generata, $\mathfrak{P}$ un ideale primo di B di altezza ≥ 1, φ un k-automorfismo localmente finito di $B/\mathfrak{P}$. Sia A l'anello ottenuto da B incollando $\mathfrak{P}$ mediante φ. Risulta allora*:

1) *A è una k-algebra finitamente generata.*

2) *B è intero e finito su A.*

3) *A è seminormale in B.*

4) *A è ottenuto da B incollando su $\mathfrak{P}$* (nel senso del n. 1).

DIM. 1) Risulta: $k \subset A \subset B$ dove k è noetheriano e B è intero su A.

Ne segue che A è una k-algebra finitamente generata (cfr [4], p. 33); in particolare A è noetheriano

2) Poiché $ht\,(\mathfrak{p})\geq 1$, $\mathfrak{p}$ non è costituito di soli divisori di O. Sia s un non divisore di 0 in A. Per ogni $b\in B$ risulta $sb=a\in A$ e quindi l'anello totale delle frazioni di B coincide con quello di A. B è intero su A (prop. 9) e quindi B è contenuto nella chiusura integrale $\overline{A}$ di A. Poiché A è una k-algebra finitamente generata, $\overline{A}$ è un A-modulo di tipo finito (cfr [4], th. 2, pag. 63). Essendo A noetheriano anche B è finito su A.

3): Vedi corollario della prop. 8.

4): Sia A' l'anello ottenuto da B incollando su $\mathfrak{p}$: proviamo che $A'\subset A$ (l'inclusione $A\subset A'$ è ovvia). L'unico ideale di B al di sopra di $\mathfrak{p}$ è $\mathfrak{p}$ stesso e quindi per ogni $b\in A'$ risulta (proposizione 2) $\left(\frac{\bar{b}}{1}\right)\in$ $\in A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, da cui $\bar{s}\bar{b}=\bar{a}$ in $A/\mathfrak{p}$, con $s\notin\mathfrak{p}$.

Applicando φ ai due membri dell'ultima relazione si trova $\bar{s}\varphi(\bar{b})=$ $=\bar{s}\bar{b}$ da cui essendo $\bar{s}\neq\overline{O}$, segue $\varphi(\bar{b})=\bar{b}$ cioè $b\in A$.

Osservazione. Nelle ipotesi del Teorema 3 φ risulta in effetti di periodo finito, cioè esiste un intero positivo n tale che $\varphi^n(x)=x$ per ogni x. Siano infatti $x_1, \dots, x_h$ elementi che generano $B/\mathfrak{p}$ come k-algebra: poiché φ è localmente finito esistono interi positivi $n_1, \dots, n_h$ tali che $\varphi^{n_i}(x_i)=x_i (1\leq i\leq h)$. Posto $n=\prod_{i=1}^{h} n_i$ risulta $\varphi^n(x_i)=x_i (1\leq i\leq h)$ e quindi, essendo φ un k-automorfismo, $\varphi^n(x)=x$, per ogni $x\in B/\mathfrak{p}$.

Carollario 2. *Nelle stesse ipotesi del Teorema 3 supponiamo inoltre che B sia integralmente chiuso. B coincide allora con la chiusura integrale $\overline{A}$ di A ed è finito su A.*

Dim. L'anello totale delle frazioni di B coincide con l'anello totale delle frazioni di A: l'asserto segue allora dalla (2) del Teorema 2.

Il seguente Teorema 4 è analogo al Teorema 2: mostra che, incollando un primo di altezza 1 con un automorfismo localmente finito, la proprietà S_2 si conserva.

Teorema 4. *Siano B un anello integro, $\mathfrak{p}$ un ideale primo di altezza 1 di B e φ un automorfismo localmente finito di $B/\mathfrak{p}$. Se B verifica la proprietà S_2, anche l'anello A, ottenuto da B incollando $\mathfrak{p}$ mediante φ, verifica S_2.*

DIM. Dalla prop. 9 segue che B è intero su A, mentre dal lemma 5 segue $A \subset A^{(1)} \subset B$, con $A^{(1)} = \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$. In base alla prop. 6, occorre provare che $A = A^{(1)}$. Sia $b \in A^{(1)}$: allora b appartiene a B e $b \in A_{\mathfrak{P}}$, con $\mathfrak{P}$ il conduttore di A in B. Infatti $\mathfrak{P}$ è un ideale di A e per ipotesi $ht(\mathfrak{P}) = 1$. Si ha dunque: $b = \frac{a}{s}$ con $a \in A$, $s \in A - \mathfrak{P}$. Applicando φ all'identità $\bar{s}\bar{b} = \bar{a}$ (in $B/\mathfrak{P}$) si trova:

$$\varphi(\bar{s})\varphi(\bar{b}) = \varphi(\bar{a}) = \bar{a} = sb = \bar{s}\varphi(\bar{b})$$

e quindi, essendo $\bar{s} \neq \bar{O}$, $\varphi(\bar{b}) = \bar{b}$. Ne segue $b \in A$.

Ciò prova che $A^{(1)} \subset A$, e quindi l'asserto.

OSSERVAZIONE. Il Teorema non è vero, in generale, se $ht(\mathfrak{P}) > 1$. Siano B una k-algebra integra finitamente generata che verifica la S_2, $\mathfrak{P}$ un primo di B di altezza > 1 e φ un automorfismo localmente finito. Risulta allora $A \neq B$ e B è intero e finito su A (Teorema 3). Ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A, di altezza 1, non contiene il conduttore e quindi (lemma 1) $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$. Ne segue:

$$A^{(1)} = \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{h(\mathfrak{P})=1} B_{\mathfrak{P}} = B \neq A.$$

In base alla proposizione 6, A non verifica la S_2.

ESEMPI. k indica un corpo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2.

1) $B = k[X, Y]$, $\mathfrak{P} = (Y)$, $B/\mathfrak{P} \simeq k[X]$. Definiamo $\varphi: k[X] \leftrightarrow k[X]$, con $\varphi(X) = -X$. Risulta allora

$$A = \{f(X, Y) \in k[X, Y] / f(X, 0) = f(-X, 0)\}$$

e quindi si trova: $A = k[X^2, Y, XY]$. B è la chiusura integrale di A, l'ideale $\mathfrak{P} = (Y, XY)$ il conduttore, e $A/\mathfrak{P} \simeq k[X^2]$. A è l'anello delle coordinate della rigata cubica di k^3 di equazione $XY^2 - Z^2$. Tale superficie ha l'asse delle X come retta doppia: il cono tangente nel punto generico $(a, 0,0)$ è spezzato nei due piani $\sqrt{a}y = z$ e $\sqrt{a}y = -z$, che variano entrambi al variare di a (diversamente da quanto visto per la rigata dell'es. 1) del n. 2).

2) Siano $B=k[X,Y]$, $\mathfrak{P}=(X^3-Y^2)$; allora $B/\mathfrak{P}\simeq k[t^2,t^3]$ (t un indeterminata). Definiamo $\varphi : B/\mathfrak{P}\leftrightarrow B/\mathfrak{P}$ ponendo $\varphi(t)=-t$, con che $A=\{f(X,Y)\in k[X,Y]/f(t^2,t^3)=f(t^2,-t^3)\}$.

Determiniamo i generatori di A come k-algebra. Sia $f(X,Y)\in A$: allora $f(x,y)=(X^3-Y^2)g(X,Y)+(r_o(X)+yr_1(X))$ con $r_i(X)\in k[X]$. Poiché $f(t^2,t^3)=r_o(t^2)+t^3r_1(t^2)=r_o(t^2)-t^3r_1(t^2)$, risulta $r_1(X)=0$.

Quindi $f(X,Y)=(X^3-Y^2)g(X,Y)+r_o(X)$.

Sia $g(X,Y)=\sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j$ con $a_{ij}\in k$; si ha allora:

$$g(X,Y)=\sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j=\sum_i \sum_{j\text{ dspari}} a_{ij}X^iY^j+\sum_i \sum_{\text{pari}} a_{ij}X^iY^j+a_{00}=$$

$$=Y\sum_i \sum_{j\text{ pari}} a_{ij}X^iY^j+\sum_i \sum_{j\text{ pari}} a_{ij}X^iY^j+a_{00}$$

$$f(X,Y)=Y(X^3-Y^2)(\sum_i \sum_{j\text{ pari}} a_{ij}X^iY^j)+$$

$$+(X^3-Y^2)(\sum_i \sum_{j\text{ pari}} a_{ij}X^iY^j+a_{00}(X^3-Y^2)+r_0(X).$$

Ogni polinomio del tipo $\sum_i \sum a_{ij}x^iy^y$ appartiene all'algebra generata su k da X e Y^2 e così anche $r_0(X)$ e $a_{00}(X^3-Y^2)$; ne segue:

$$f(X,Y)\in A\Rightarrow f(X,Y)\in k[X,Y^2,Y(X^3-Y^2)].$$

D'altra parte ogni polinomio di $k[X,Y^2,Y(X^3-Y^2)]$ sta in A e quindi

$$A=k[X,Y^2,Y(X^3-Y^2)]$$

B è la chiusura integrale di A, il conduttore $\mathfrak{P}$ come ideale di A è $(X^3-Y^2, Y(X^3-Y^2))$. Si ha inoltre (vedi lemma 6):

$$A/\mathfrak{P}\simeq\{f(t^2,t^3)\in k[t^2,t^3]/f(t^2,t^3)=f(t^2,-t^3)\}=$$
$$\{f(t)\in k[t]/f(t)=f(-t)\}\cap k[t^2,t^3]=k[t^2]$$

A è l'anello delle superficie S di k^3 di equazione:

$YX^6-2X^3Y^2+Y^3-Z^2=0$. La curva $y=X^3$ del piano $Z=0$ è doppia per la superficie.

4. Se A è un anello commutativo e $T=\{t_1, ..., t_n\}$ un insieme finito di indeterminate su A, con $A[T]$ si indica l'anello dei polinomi in $t_1, ..., t_n$ e con $A[T, T^{-1}]$ l'anello di gruppo $A[G]$, dove G è il gruppo abeliano libero su $t_1, ..., t_n$. Risulta evidentemente: $A[T, T^{-1}]=(A[T])_S$, con $S=\{s^i/s\in T, i\geqslant 0\}$. Se A è noetheriano, ridotto, integro tale risulta anche $A[T, T^{-1}]$.

Nei numeri precedenti si è visto che, se B è normale, ogni anello A ottenuto per incollamento mediante un automorfismo (di due primi distinti o di un solo primo) da B è seminormale. Da un risultato di C. Traverso (vedi prop. 3) segue che per tali anelli risulta Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$.

In questo numero viene dimostrato, (cfr. Prop. 10 e Prop. 11), che se Pic $B\simeq$ Pic $B[T]$ e A è ottenuto da B per incollamento (di un primo o di due primi distinti) risulta Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$. Inoltre si danno delle condizioni e sufficienti affinché risulti Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$, nell'ipotesi che B sia integro e Pic $B\simeq$ Pic $B[T, T^{-1}]$. È noto che la condizione Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$ implica l'isomorfismo Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$ (e quindi la seminormalità), ma, in generale, non è vero il viceversa. (cfr. [9], n. 2).

Il Teorema seguente estende al caso dell'isomorfismo Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$ un risultato dimostrato in [2] (pag. 45 e segg) per l'isomorfismo Pic $A\simeq$ *Pic* $A[T]$. La dimostrazione è del tutto analoga a quella di [2].

TEOREMA 5. *Siano $A\subset B$ anelli tali che A è ridotto e B è intero e finito su A; siano $\mathfrak{b}$ il conduttore di A in B e T un insieme finito di indeterminate su A. Risulta allora*:

1) *Se* Pic $B\simeq$ Pic $B[T]$ *si ha l'isomorfismo* Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$ *se e soltanto se sono verificate le due seguenti condizioni*:

(a) $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$

(b) $P\rightarrow\overline{P}$ *è un monomorfismo, dove*

$$P= \text{coker (Pic } A/\mathfrak{b}\rightarrow \text{Pic } (A/\mathfrak{b})[T]) \text{ e}$$

$$\overline{P}= \text{coker (Pic } B/\mathfrak{b}\rightarrow (B/\mathfrak{b})[T]).$$

II) *Se A è integro* e Pic $B\simeq$ Pic $B[T, T^{-1}]$ *si ha l'isomorfismo*

Pic $A \simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$ *se e solo se sono verificate le seguenti condizioni*:

(a) $\sqrt[B]{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$

(β) $h_0(A/\mathfrak{b}) = h_0(B/\mathfrak{b})$

(γ) $Q \to \overline{Q}$ *è un monomorfismo dove*

$$Q = \operatorname{coker}(\operatorname{Pic} A/\mathfrak{b} \to \operatorname{Pic}(A/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]) \text{ e}$$

$$\overline{Q} = \operatorname{coker}(\operatorname{Pic} B/\mathfrak{b} \to \operatorname{Pic}(B/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]).$$

Dim. I) Segue da [2], pag. 45, tenendo conto che, se $B = \overline{A}$, la condizione Pic $B \simeq$ Pic $B[T]$ è automaticamente soddisfatta.

II) Indichiamo con G il gruppo abeliano libero su T e con $A[G]$ l'anello di gruppo: risulta allora $A[T, T^{-1}] = A[G]$, $B[T, T^{-1}] = B[G]$.

Poniamo: $A' = A/\mathfrak{b}$, $B' = B/\mathfrak{b}$, $j : A \to B$, $j[G] : A[G] \to B[G]$, $j' : A' \to B'$, $j'[G] : A'[G] \to B'[G]$. Poiché A e B sono integri risulta (lemma 3) $H_0(A) \simeq H_0(B) \simeq \mathbf{Z}$ e quindi (cfr. [2], prop. 5.12):

$$U(A[G]) = U(A) \oplus G \qquad U(B[G]) = U(B) \oplus G.$$

Si ha allora (cfr. [2], n. 7) il seguente diagramma commutativo di successioni esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
U(A) \arrow[r] \arrow[d] & U(B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} \Phi j \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{Pic} A \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \operatorname{Pic} B \arrow[d, "\bar{j}"', "\simeq"] \\
U(A[G]) \arrow[r] \arrow[d] & U(B[G]) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} \Phi j[G] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} A[G] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} B[G] \arrow[d] \\
G \arrow[r] & G \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e quindi risulta Pic $A \simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$ se e soltanto se coker $f = 0$.

Dal Teorema 7.2 di [2] (oppure dal Teorema di Milnor sui quadrati cartesiani; cfr. [1], th. 5.4) segue che f è un isomofismo se e soltanto se tale risulta f' nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
U(A') \arrow[r] \arrow[d] & U(B') \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic} \Phi j' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \operatorname{Pic} A' \arrow[r] \arrow[d, "i'"] & \operatorname{Pic} B' \arrow[d, "\bar{i}'"] \\
U(A'[G]) \arrow[r] & U(B'[G]) \arrow[r] & \operatorname{Pic} \Phi j'[G] \arrow[r] & \operatorname{Pic} A'[G] \arrow[r] & \operatorname{Pic} B'[G]
\end{tikzcd}$$

Risulta ([2], prop. 5.12).

$$U(A'[G] = U(A') \oplus (1 + (\operatorname{nil} A')I) \oplus (G \otimes_Z H_0(A'))$$

$$U(B'[G]) = U(B) \oplus (1 + (\operatorname{nil} B')\bar{I}) \oplus (G \otimes_Z H_0(B'))$$

dove I e $\bar{\text{I}}$ sono il nucleo rispettivamente di $A'[G] \to A'$ e di $B'[G] \to B'$, definiti mandando ogni elemento di G in 1.

Dal diagramma sopra scritto, dato che le successioni esatte verticali « spaccano », si ricava una successione esatta dei conuclei dei morfismi verticali e quindi si trova:

coker $f = 0 \Leftrightarrow$ coker $f' = 0$ $\Leftrightarrow$ (1) nil $A' =$ nil B'; (2) $H_0(A') = H_0(B')$ (3) coker $i' \to$ coker $\bar{i}'$ è un monoforfismo.

La (1) è equivalente alla (a) (lemma 2), la (2) alla (β) (lemma 3) e la (3) è esattamente la (γ). Ne segue l'asserto.

LEMMA 7. *Siano A' e B' anelli commutativi, $f: A' \to B'$ e $h: B' \to A'$ omomorfismi tali che $f \circ h = 1$. Sia G un monoide o un gruppo abeliano libero finitamente generato. Allora nel seguente diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker} \alpha \arrow[r, "\varphi"] & \operatorname{coker} \beta \\
\operatorname{Pic} B'[G] \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Pic} A'[G] \arrow[u] \\
\operatorname{Pic} B' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & \operatorname{Pic} A' \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

le freccie orizzontali sono dei monomorfismi.

DIM. L'omomorfismo $A'[G] \xrightarrow{f[G]} B'[G]$ è definito ponendo $f[G](\sum_{i=1}^{n} a'_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a'_i) g_i$. Analogamente per $B'[G] \xrightarrow{h[G]} A'[G]$.

Ne segue: $f[G] \circ h[G] = 1$. Poiché Pic è un funtore si ricava che $\mathrm{Pic}\, A' \to \mathrm{Pic}\, B'$ e $\mathrm{Pic}\, A'[G] \to \mathrm{Pic}\, B'[G]$ hanno entrambi un inverso e sono quindi monoforfismi. Resta inoltre definito un omomorfismo $\mathrm{coker}\, \beta \to \mathrm{coker}\, \alpha$ tale che la composizione $\mathrm{coker}\, \alpha \to \mathrm{coker}\, \beta \to \mathrm{coker}\, \alpha$ è l'identità. Ne segue che φ è un monomorfismo.

Il lemma seguente permette di applicare il Teorema 5 al caso di un anello ottenuto per incollamento di primi distinti

LEMMA 8. *Siano B un anello noetheriano ridotto e A l'anello ottenuto da B incollando due ideali primi distinti $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$ mediante un automorfismo φ tale che $\bar{\varphi}$ sia l'identità. Indicato con $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ il conduttore di A in B e con T insieme finito di indeterminate, risulta*:

(I) $P \to \bar{P}$ è un monomorfismo, dove

$P = \mathrm{coker}\,(\mathrm{Pic}\, A/\mathfrak{b} \to \mathrm{Pic}\, A/\mathfrak{b})[T]$ e

$\bar{P} = \mathrm{coker}\,(\mathrm{Pic}\, B/\mathfrak{b} \to \mathrm{Pic}\,(B/\mathfrak{b})[T])$

(II) *$Q \to \bar{Q}$ è un monomorfismo, dove*

$Q = \mathrm{coker}\,(\mathrm{Pic}\, A/\mathfrak{b} \to \mathrm{Pic}\,(A/\mathfrak{b})[T, T^{-1}])$ *e*

$Q = \mathrm{coker}\,(\mathrm{Pic}\, B/\mathfrak{b} \to \mathrm{Pic}\,(B/\mathfrak{b})[T, T^{-1}])$

DIM. Poniamo $A' = A/\mathfrak{b}$ e $B' = B/\mathfrak{b}$. In virtù del lemma 7, (dove $G = T$ in (I), e G = gruppo abeliano libero su T, in (II)) basta provare che esistono $f : A' \to B'$ e $h : B' \to A'$ tali che $f \circ h = 1$. Sia f l'inclusione $A' \to B$. Si ha $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ (lemma 5) e l'inclusione $i : A/\mathfrak{b} — B/\mathfrak{p}_1$ è un isomorfismo (prop. 7). Indichiamo con $h' : B/\mathfrak{b} \to B/\mathfrak{p}_1$ l'omomorfismo canonico ottenuto passando al quoziente modulo $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{b}$. Ponendo $h = h' \circ i^{-1}$, si trova $f \circ h = 1$ e quindi la tesi.

PROPOSIZIONE 10. *Sia B un anello noetheriano, ridotto, tale che* $\mathrm{Pic}\, B \simeq \mathrm{Pic}\, B[T]$ (*T un insieme finito di indeterminate*).

Se A è l'anello ottenuto da B incollando due primi distinti $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$ mediante un automorfismo φ tale che $\bar{\varphi}$ sia l'identità, risulta $\mathrm{Pic}\, A \simeq \mathrm{Pic}\, A[T]$.

DIM. Dalle ipotesi e dal teorema 1 segue A e B verificano le ipotesi del Teorema 5, I. Dal lemma 8 si ricava che è verificata la condizione (b) del teorema 5: d'altra parte, essendo $\mathfrak{b}=\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$, vale anche la ($a$), e quindi si ha la tesi.

TEOREMA 6. *Sia B un anello noetheriano integro tale che* $\operatorname{Pic} B\simeq\simeq\operatorname{Pic} B[T,T^{-1}]$ *(T insieme finito di indeterminate); sia A l'anello ottenuto da B incollando due primi distinti $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ mediante un automorfismo φ tale che $\bar{\varphi}$ sia l'identità.*

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $\operatorname{Pic} A[T,T^{-1}]\simeq\operatorname{Pic} A$

(ii) $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2\neq B$

DIM. A e B verificano le ipotesi del teorema 5 (vedi Teor. 1) e quindi la (i) è equivalente alle condizioni (a), (β) e (γ). La (a) è ovvia perché risulta $\mathfrak{b}\simeq\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$; la ($\gamma$) segue dalla II) del lemma 8.

Basta quindi provare che la (ii) è equivalente alla condizione (β), cioè $h_0(B/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2)=1$. D'altra parte si ha $h_0(B/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2)=1$ se e soltanto se lo spazio $X=\operatorname{Spec}(B/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2)$ è connesso (cfr. Lemma 3). Poiché $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$ è un primo di A e $\mathfrak{P}_1\neq\mathfrak{P}_2$, risulta $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2\neq\neq\mathfrak{P}_i(1\leq i\leq 2)$; gli ideali primi minimali di $B/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$ sono quindi $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$ e $\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$. Ne segue (cfr. [3], cor. 2, p. 130) che le componenti irriducibili di X sono

$$I_1=V(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2) \text{ e } I_2=V(\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2).$$

Risulta perciò

$$X=I_1\cup I_2$$

e $I_i(i=1,2)$ è aperto e contenuto in una componente connessa.

Dunque X è connesso se e solo se $I_1\cap I_2\neq\emptyset$, cioè se esiste un ideale primo di $B/(\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2)$ contenente sia $\mathfrak{P}_1$ che $\mathfrak{P}_2$, il che è evidentemente equivalente alla (ii).

Passiamo ora ad esaminare le condizioni sufficienti per gli isomorfismi $\operatorname{Pic} A[T]$ e $\operatorname{Pic} A\simeq\operatorname{Pic}[AT,T^{-1}]$ nel caso in cui A sia ottenuto incollando su un solo primo di B.

Premettiamo un lemma:

LEMMA 9. *Siano R un anello integro, L il suo corpo delle frazioni, $\bar{R}$ la chiusura integrale di R in L. Siano G un gruppo di operatori localmente finito su R e $S=R^G=\{x\in R/g(x)=x,\ \forall g\in G\}$. Allora, indicata con $\bar{S}$ la chiusura integrale di S nel suo corpo delle frazioni, si ha*

$$\bar{S}=(\bar{R})^G$$

In particolare se R è normale anche S è normale.

DIM. Dalle ipotesi segue che G opera su L e, detto K il corpo delle frazioni di S, si ha $L^G=K$ (cfr. [4], p. 34). Se $x\in K$ è intero su S x è anche intero su R e quindi $x\in K\cap\bar{R}=(L)^G\cap\bar{R}=(\bar{R})^G$.

Viceversa sia $x\in\bar{R}^G$. Allora x è intero su R, che è a sua volta intero su S (cfr. [4], p. 33). Ne segue che x *è* intero su S. D'altra parte $x\in L$, $g(x)=x$, $\forall g\in G$: quindi $x\in K$.

Se B è una k-algebra finitamente generata e φ è localmente finito, φ risulta di periodo finito (vedi osservazione dopo il teorema 3): per tale motivo nelle ipotesi della proposizione seguente assumiamo senz'altro che φ abbia periodo finito.

PROPOSIZIONE 11. *Siano k un corpo, B una k-algebra finitamente generata e ridotta, $\mathfrak{P}$ un ideale prima di B di altezza $\geqslant 1$, φ un k-automorfismo di $B/\mathfrak{P}$ di periodo finito e A l'anello ottenuto da B incollando mediante φ. Allora se* Pic $B\simeq$ Pic $B[T]$ *si ha* Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$.

DIM. Dal teorema 3 segue che B è intero e finito su A e che A è seminormale in B. Inoltre l'anello totale delle frazioni di B coincide con quello di A. Sia $\bar{B}$ la chiusura integrale di B, $\bar{A}$ quella di A. Risulta evidentemente $\bar{A}=\bar{B}$. Dalla ipotesi Pic $B\simeq$ Pic $B[T]$ segue che B è seminormale in $\bar{B}$ (cfr. [10], th.3.6). Poiché A è seminormale in B se ne ricava che A è seminormale in $\bar{B}=\bar{A}$ (cfr. [10], lemma 1.2). Quindi A è seminormale: dal teorema 3.6 di [10] si ricava Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$.

TEOREMA 7. *Siano k un corpo, B una k-algebra integra, finitamente generata, tale che* Pic $B\simeq$ Pic $B[T, T^{-1}]$, *$\mathfrak{P}$ un ideale primo di B di altezza $\geqslant 1$, e φ un k-automorfismo di $B/\mathfrak{P}$ di periodo finito. Sia A l'anello ottenuto la B incollando mediante φ. Allora se $B/\mathfrak{P}$ è normale si ha* Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$.

DIM. Dal teorema 3 segue che B è intero e finito su A. In base al teorema 5,II per provare l'asserto basta fimostrare che sono verificate le condizioni (a), (β), (γ). (a) e (β) sono ovvie perché il conduttore $\mathfrak{b}$ è l'ideale primo $\mathfrak{P}$. Proviamo la (γ). Sia n il periodo di φ: poniamo $R=B/\mathfrak{P}$ $S=A/\mathfrak{P}$, $G=\{1, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1}\}$. Allora G opera su R e risulta $R^G=\{1, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1}\}$. Allora G opera su R e risulta $R^G=(A/\mathfrak{P})$. Poiché R è integralmente chiuso, dal lemma 9 segue che anche S è integralmente chiuso.

Si ha quindi Pic $(A/\mathfrak{P})\simeq$ Pic $(A/\mathfrak{P})[T, T^{-1}]$ e Pic $(B/\mathfrak{P})\simeq$ Pic $(B/\mathfrak{P})[T, T^{-1}]$ (cfr. [2], cor.5.10).

La (γ) è quindi provata.

COROLLARIO. *Nelle stesse ipotesi del teorema 7 supponiamo inoltre che k sia algebricamente chiuso e dim $(B/\mathfrak{P})=1$. Allora se* Pic $(B/\mathfrak{P})\simeq$ Pic $(B/\mathfrak{P})[T, T^{-1}]$ *si ha* Pic $A\simeq$ Pic $(A[T, T^{-1}])$.

DIM. Basta dimostrare che $B/\mathfrak{P}$ risulta integralmente chiuso: il resto segue dal teorema 7. $B/\mathfrak{P}$ è una k-algebra finitamente generata, integra e di dimensione 1 e k è algebricamente chiuso. Dal teorema 1 di [9] segue: $B/\mathfrak{P}$ normale se e solo se Pic $(B/\mathfrak{P})\simeq$ Pic $(B/\mathfrak{P})[T, T^{-1}]$.

ESEMPI. In tutti gli esempi che seguono k indica un corpo.

1) Siano $B=k[X, Y]$, A l'anello ottenuto incollando $\mathfrak{P}_1=(X)$ e $\mathfrak{P}_2=(Y)$ (*n.* 1, *esempio* 1). Risulta; $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2\neq B$, $A=k[X+Y, XY, X^2Y]$, $B=\overline{A}$, $\mathfrak{b}=(XY, X^2Y)=(X)B\cap(Y)B$, $A/\mathfrak{b}\simeq k[X]$, $B/\mathfrak{b}=k[X, Y]/(XY)$. Ne segue $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$, $h_0(A/\mathfrak{b})=h_0(B/\mathfrak{b})=1$. Si ha inoltre Pic $(A/\mathfrak{b})\simeq$ Pic $A/\mathfrak{b}[T, T^{-1}]$ e Pic $(B/\mathfrak{b})=$ Pic $(B/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]$ (Cfr. 9, pag. 5) e quindi dal Teorema 5 segue Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$.

2) Siano $B=k[X, Y]$ A l'anello ottenuto incollando $\mathfrak{P}_1=(X+1)$ e $\mathfrak{P}_2=(X-1)$ (n. 1, esempio 3). Risulta:

$$\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2=B,\ A=k[Y, (X^2-1), X(X^2-1)],\ B=\overline{A},$$

$$\mathfrak{b}=(X^2-1, X(X^2-1))=(X+1)B\cap(X-1)B,\ A/\mathfrak{b}\simeq k[Y],$$

$$B/\mathfrak{b}\simeq k[Y, Y]/(X+1)\oplus k[X, Y]/(X-1)\simeq k[Y]\otimes k[Y].$$

Ne segue $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$, $h_0(A/\mathfrak{b})=1$, $h_0(B/\mathfrak{b})=2$: non è quindi verificata la (β) del teorema 5 e perciò Pic $A\neq$ Pic $(A[T, T^{-1}])$.

3) Siano k di caratteristica $\neq 2$, $B=k[X, Y]$, $\mathfrak{P}=(Y)$. L'anello A ottenuto incollando $\mathfrak{P}$ (n. 2, esempio 1) è $A=k[X^2, Y, XY]$. Risulta allora: $\overline{A}=B$, $\mathfrak{b}=(Y, XY)=(Y)B$, $A/\mathfrak{b}\simeq k[X^2]$, $B/\mathfrak{b}\simeq k[X]$. Ne segue $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$ e $h_0(A/\mathfrak{b})=h_0(B/\mathfrak{b})=1$. Inoltre, essendo $k[X^2]$ e $k[X]$ integralmente chiusi, si ha: Pic $(A/\mathfrak{b})\simeq$ Pic $(A/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]$ e Pic $(B/\mathfrak{b})\simeq$ Pic $(B/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]$. Dal Teorema 5 si ricava: Pic $A[T, T^{-1}]\simeq$ Pic A.

4) Siano k di caratteristica $\simeq 2$, $B=k[X, Y]$, $\mathfrak{P}=(X^3-Y^2)$.

L'anello A ottenuto incollando $\mathfrak{P}$ (n. 2, esempio 2) è $A=k[X, Y^2, Y(X^3-Y^2)]$. Risulta allora: $\overline{A}=B$, $\mathfrak{b}=(X^3-Y^2, Y(X^3-Y^2)=(X^3-Y^2)B$. $A/\mathfrak{b}\simeq k[X^2]$, $B/\mathfrak{b}\simeq k[X^2, X^3]$.

Ne segue $\sqrt[B]{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}$ e $h_0(A/\mathfrak{b})=h_0(B/\mathfrak{b})=1$. Essendo $k[X^2]$ integralmente chiuso si ha Pic $(A/\mathfrak{b})\simeq$ Pic $(A/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]$, cioè $Q=0$. Ne se gue che $Q\to\overline{Q}$ è un monomorfismo e quindi dal Teorema 5 si ricava: Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$. Si osservi che in questo caso risulta $\overline{Q}\neq 0$, cioè Pic $(B/\mathfrak{b})\neq$ Pic $(B/\mathfrak{b})[T, T^{-1}]$, e anche $\overline{P}\neq 0$, cioè *Pic* $(B/\mathfrak{b})\neq$ Pic $(B/\mathfrak{b})[T]$. Si ha infatti (cfr. [2], pag. 52) $\overline{P}\simeq\overline{Q}\simeq I_{k[T]}$, dove $I_{k[T]}=$ Ker $(k[T]\to K)$, con $\varepsilon(t)=1$, $\forall\in T$.

Gli esempi 1), 3) e 4) mostrano che il teorema 1 di [9] non si estende al caso in cui dim $A>1$; infatti per una varietà irriducibile V, di dimensione >1, definita su un corpo algebricamente chiuso, può risultare Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$ (A anello delle coordinate di V), senza che V sia normale.

Dall'esempio 1) si ricava anche che il teorema 2 di 9 non si estende al caso dim $A>1$, cioè, che la proprietà Pic $A\simeq$ Pic $A[T, T^{-1}]$, in generale, non si localizza (è noto che la seminormalità, e quindi la proprietà Pic $A\simeq$ Pic $A[T]$, si localizza; cfr. [10], Cor.2.2).

Infatti, posto $A=k[X+Y, XY, X^2Y]$ (k algebricamente chiuso), $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}=(XY, X^2Y)$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è il conduttore di $A_{\mathfrak{p}}$ *in* $B_{\mathfrak{p}}=\overline{A}_{\mathfrak{p}}$ (lemma 1) e si ha: $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\simeq k$, $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{P}_1B_{\mathfrak{p}}\cap\mathfrak{P}_2B_{\mathfrak{p}}$ *con* $\mathfrak{P}_1=(X)$, $\mathfrak{P}_2=(Y)$. $(X)B_{\mathfrak{p}}$ e $(Y)B_{\mathfrak{p}}$ sono ideali massimali distinti di $B_{\mathfrak{p}}$ e quindi $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}\simeq$ $\simeq B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{P}_1B_{\mathfrak{p}}\oplus B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{P}_2B_{\mathfrak{p}}\simeq k\otimes k$. Ne segue: $h_0(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})=1$,

$h_0(B_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}})=2$. Non è dunque verificata la condizione (β) del teorema 5 e perciò $0=$ Pic $A_{\mathfrak{p}} \neq$ Pic $A_{\mathfrak{p}}[T, T^{-1}]$.

Più precisamente, essendo dim $A_{\mathfrak{p}}=$ dim $B_{\mathfrak{p}}=1$, si può applicare il teorema 8.1 di [2] e si trova così:

$$\text{Pic } A_{\mathfrak{p}}[T] = \text{Pic } A_{\mathfrak{p}} = 0;$$

$$\text{Pic } A_{\mathfrak{p}}[T, T^{-1}] \simeq G \otimes_Z \mathbf{Z} \simeq G;$$

dove G indica il gruppo abeliano libero sugli elementi di T.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bass H.: Algebraic k-theory, Benjamin New-York, 1968.

[2] Bass H. - Murthy P.: *Grothendieck groups and Picard groups of abelian graup rings*, Ann. of Math, Vol. 86, n. 1, July, 1967.

[3] Bourbaki N.: *Algebre Commutative*, ch. 1 et 2 Hermann, Paris, 1961.

[4] Bourbaki N.: *Algebre Commutative*, ch 5 et 6 Hermann, Paris, 1964.

[5] Endo S.: *Projective modules over polynomial rings*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 15, n. 13, 1963.

[6] Grothendiek A.: *Élements de géometric algebrique*, IV (Seconde Partie) I.H.E.S., Paris, 1965.

[7] Pedrini C.: *Sul gruppo di Picard di certe estensioni di anelli di gruppo 1-dimensionali*, Rend. di Mat. (1) Vol. 4, Serie VI, 1971.

[8] Pedrini C.: *Sul gruppo di Picard di certe estensioni di anelli di gruppo 1-dimensionali*, II, Rend. di Mat (6), 5, 1 (1972).

[9] Pedrini C.: *Sulla normalità e il gruppo di Picard di certi anelli.* Le Matematiche, Vol. XXV, fasc. 1, 1970.

[10] Traverso C.: *Seminormality and Picard groups*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. XXIV, Fasc. IV, 1970.

[11] Zariski - Samuel: *Commutative Algebra*, Vol. I, Van Nostrand, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 marzo 1972.