Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

W. Streb

Über die Endlichkeit niler Ringe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 48 (1972), p. 349-357
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__349_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 48 (1973)

ÜBER DIE ENDLICHKEIT NILER RINGE

W. STREB *)

Bekanntlich [1; Corollary, p. 20 und Theorem 1.4.5, p. 37] ist jeder nile Ring, der die Minimal- oder Maximalbedingung für Rechtsideale erfüllt, nilpotent. Da ein endlicher Ring notwendig beide Extremalbedingungen erfüllt, erhebt sich die Frage, inwieweit die Forderung von Extremalbedingungen für einen nilen Ring R schon hinreichend dafür ist, daß R nilpotent und endlich ist. Hierzu zeigen wir:

HAUPTSATZ. Ein niler Ring R ist nilpotent und endlich genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen (1)-(8) gilt:

(1) R erfüllt die schwache Minimalbedingung für Ideale und die Maximalbedingung für Linksideale.

(2) R erfüllt die schwache Minimalbedingung für Linksideale und die Maximalbedingung für Ideale.

(3) R erfüllt die schwache Maximalbedingung für Ideale und die Minimalbedingung für Linksideale.

(4) R erfüllt die schwache Maximalbedingung für Linksideale und die Minimalbedingung für Ideale.

(5) R erfült die Minimalbedingung für Linksideale und ist endlich erzeugt.

(6) R erfüllt die Maximalbedingung für Linksideale und ist finit.

---

*) Indirizzo dell'A.: Pädagogische Hochshule, Henri-Dunant-Str. 65, D-43 Essen, Rep. Fed. Tedesca.

(7) R erfüllt die Minimalbedingung für Linksideale und R/R^2 ist endlich.

(8) R erfüllt die Maximalbedingung für Linksideale und besitzt einen endlichen Annihilator.

Hierbei heiße ein Ringelement r finit, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $nr=0$. Ein Ring R heiße finit, wenn jedes Element von R finit ist. Unter dem Annihilator eines Ringes R verstehen wir das Ideal

$$A:=(a \mid a\in R \text{ und } ra=0 \text{ für alle } r\in R).$$

Herrn Prof. Dr. H. Heineken, Erlangen, danke ich für den Hinweis auf (7) und (8).

Bezüglich der hier nicht eigens verabredeten Bezeichnungen verweise ich auf [2; S. 399-401]. Für eine Teilmenge M eines Ringes R bezeichnen wir mit $\{M|$ das von M erzeugte Linksideal.

LEMMA 1. Erfüllt ein Ring R die schwache Minimalbedingung für Linksideale und ist $\{{}_f({}^iR)\}$ nil, so ist $\{{}_f({}^iR)\}$ hyper-$\{{}_f({}^iR)\}$-annullierendes Ideal in R.

BEWEIS. Sei S $\{{}_f({}^iR)\}$-epimorphes Bild von R und A minimales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } S,\ 0\subset J\subseteq\{{}_f({}^iS)\}).$$

Wir führen die Annahme, daß es Elemente $r\in\{{}_f({}^iS)\}$ und $a\in A$ gibt mit $ra\neq 0$, zum Widerspruch und zeigen hiermit $\{{}_f({}^iS)\}\{A\}=0$.

Wegen der Minimaleigenschaft von A folgt aus dieser Annahme $\{ra|=A$. Also gilt $a=sra+nra=(sr+nr)a$ mit $s\in S$ und einer ganzen Zahl n und damit $a=(sr+nr)^m a$ für alle natürlichen Zahlen m. Da $sr+nr\in\{{}_f({}^iS)\}$ und mit $\{{}_f({}^iR)\}$ auch $\{{}_f({}^iS)\}$ nil ist, folgt weiter $a=0$ im Widerspruch zur Annahme $ra\neq 0$. Somit ist alles bewiesen.

Speziell folgt aus Lemma 1, daß jeder nile Ring R, der die schwache Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, hyper-R-annullierend und damit hypernilpotent ist. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß ein niler Ring nicht notwendig hypernilpotent ist. Auf eine Zusatzbedingung kann demnach nicht verzichtet werden. Wir zeigen im einzelnen:

Es gibt eine Algebra A der Charakteristik 0 und zu jeder Primzahl

p eine Algebra A der Charakteristik p, die lokal nilpotent ist, jedoch kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal J besitzt.

BEWEIS. Mit den abzählbar vielen Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \ldots$, deren Menge mit U bezeichnet sei, bildet man formale Potenzprodukte $q=\prod_{j=1}^{n} x_{i_j}$ mit $x_{i_j} \in U$ für $1 \leq j \leq n$ beliebiger Dimension $\dim(q)=n$, deren Menge wir mit Q bezeichnen, und über dem Ring K der ganzen Zahlen oder einem Primkörper K die Algebra B der formalen endlichen Summen $\sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ mit $k_i \in K$ und $q_i \in Q$ für $1 \leq i \leq m$. Diejenigen Potenzprodukte $q=\prod_{j=1}^{n} x_{i_j}$, welche die Bedingung erfüllen, daß das Maximum der Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ kleiner als die oder gleich der Dimension n von q ist, bilden eine Teilmenge $\overline{Q}$ von Q. Die Menge aller Potenzprodukte q, die entweder Elemente von $\overline{Q}$ sind oder wenigstens eine Produktzerlegung $q=\prod_{j=1}^{n} q_j$ mit $q_j \in Q$ besitzen, in der mindestens ein Faktor Element von $\overline{Q}$ ist, bezeichnen wir mit P. Der von P erzeugte Modul $|P|$ ist ein Ideal von B.

Wir zeigen, daß $A := B/|P|$ lokalnilpotent ist, jedoch kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal J besitzt.

(a) *A ist lokalnilpotent.*

Da es zu jeder endlichen Teilmenge C von B eine endliche Teilmenge D von Q gibt mit $\langle C \rangle \subseteq \langle D \rangle$, reicht es zu zeigen:

Zu jeder endlichen Teilmenge $D=(d_i \mid 1 \leq i \leq m)$ von Q gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$\langle D \rangle^n \subseteq \langle D^n \rangle \subseteq |P| .$$

Wir bezeichnen mit n_i den größten Index, der bei den Unbestimmten vorkommt, welche d_i aufbauen, für $1 \leq i \leq m$. n sei das *Maximum* von $n_1, n_2, \ldots, n_m$. $D^n \subseteq |P|$ sieht man nun folgendermaßen ein:

Es ist $\dim(\prod_{j=1}^{n} d_{i_j}) \geq n$ für $d_{i_j} \in D$, jedoch der größte Index, welcher bei den $\prod_{j=1}^{n} d_{i_j}$ aufbauenden Unbestimmten vorkommt, kleiner oder gleich n. Also gilt $\prod_{j=1}^{n} d_{i_j} \in \overline{Q} \subseteq P$. Es folgt $\langle D \rangle^n \subseteq \langle D^n \rangle \subseteq |P|$.

(b) *A besitzt kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal J.*

Es reicht zu zeigen, daß A kein von Null verschiedenes Element a hat, für das $\{a\}^2=0$. Es ist also nachzuweisen, daß es zu jedem von Null verschiedenen Element a von A ein Element b von A gibt, so daß $aba \neq 0$.

Sei $c=\sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ mit von Null verschiedenen $k_i \in K$ und paarweise verschiedenen $q_j \in Q$ für $1 \leq i \leq m$ nicht Element von $|\mathrm{P}|$. Dann gibt es einen Index z mit $1 \leq z \leq m$, so daß $q_z \notin P$. Sei weiter $n=\dim(q_z)$. Wir zeigen

$$c x_{2n+2} c = \sum_{i,j=1}^{m} k_i k_j q_i x_{2n+2} q_j \notin |P|.$$

Da die Summanden $q_i x_{2n+2} q_j$ für $1 \leq i,\ j \leq m$ paarweise voneinander verschieden sind, reicht es zu zeigen, daß ein Summand, etwa $q_z x_{2n+2} q_z$, nicht Element von P ist:

Für einen Faktor d von $q_z x_{2n+2} q_z$, der x_{2n+2} zum Faktor hat, ist das Maximum $2n+2$ der bei den Unbestimmten von d vorkommenden Indizes größer als die Dimension von d, ein Faktor d von $q_z x_{2n+2} q_z$ jedoch, der x_{2n+2} nicht zum Faktor hat, ist notwendig Faktor von $q_z \notin P$. Da deshalb ein Faktor von $q_z x_{2n+2} q_z$ niemals Element von $\overline{Q}$ sein kann, gilt $q_z x_{2n+2} q_z \notin P$.

Da demnach Bedingungen an die Charakteristik eines Ringes R alleine nicht ausreichen, damit ein lokalnilpotenter Ring schon hypernilpotent ist, kann in [4; Lemma 11] nicht auf andere Zusatzbedingungen verzichtet werden. Lemma 11 lautet:

Sei R ein U-Ring. Ist V hyperendlicher Normalteiler in U und $\langle V-1 \rangle$ lokalnilpotent, so ist V_U hypernilpotent in R.

Satz 1. Jeder schwach hyperzentrale Ring R [2; S. 399], der die schwache Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, ist hyperzentral.

Beweis. Nach [2; Satz 10, S. 409] ist das Kommutatorideal R' von R nil. Mit Lemma 1 folgt, daß R' hyper-R'-annullierendes Ideal von R ist. Weiter schließt man mit [2; Satz 1, S. 402] auf die Behauptung.

Ich bemerke, daß nicht jeder schwach hyperzentrale Ring R notwendig hyperzentral ist, da nach [3; S. 137] nicht einmal jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring die nach [2; Satz 1, S. 402] hierfür notwendige Bedingung erfüllt, daß R' hyper-R'-annullierendes Ideal in R ist.

Wir vermerken weiterhin: Jeder schwach hyperzentrale Ring R, der die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, besitzt endliche Klasse.

Beweis. Nach [2; Satz 8, S. 408] ist R' hypernilpotent in R. Also ist R' auf Grund der Maximalbedingung für Ideale nilpotent. Wegen [2; Satz 3, S. 403] ist R hyperzentral. Da R die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, ist R ein Ring endlicher Klasse.

Ein Ideal A eines Ringes R heißt absteigend hyper-A-annullierendes Ideal in R, wenn $AB \subset B$ für jedes Ideal B von R mit $0 \subset B \subseteq A$ gilt. R heiße absteigend hyper-R-annullierend, wenn R absteigend hyper-R-annullierendes Ideal von R ist.

Lemma 2. Jedes nile Ideal A eines Ringes R, der die schwache Maximalbedingung für Linksideale erfüllt, ist absteigend hyper-A-annullierendes Ideal von R.

Beweis. Sei B ein Ideal von R mit $0 \subset B \subseteq A$ und C maximales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R,\ J \subset B).$$

Wir führen die Annahme, daß es Elemente $r \in A$ und $b \in B$ gibt, für die $rb \notin C$ gilt, zum Widerspruch und zeigen somit, daß $AB \subseteq C \subset B$.

Wegen der Maximaleigenschaft von C folgt aus dieser Annahme $\{rb\,|+C=B$. Also gilt $b=srb+nrb+c=(sr+nr)b+c$ mit einer ganzen Zahl n, $s \in R$ und $c \in C$ und damit

$$b=(sr+nr)^m b+c+\sum_{i=1}^{m-1}(sr+nr)^i c$$

für alle natürlichen Zahlen m. Da A nil ist, folgt wegen $sr+nr \in A$ weiter $b \in C$ im Widerspruch zur Annahme $rb \notin C$. Somit ist alles bewiesen.

LEMMA 3.

(a) Seien A und B Ideale von R mit $B \subset A$ und $RA+AR \subseteq B$. Weiter gelte für jedes Ideal C von R mit $B \subseteq C \subseteq A$ entweder $C=B$ oder $C=A$.

(b) Sei A Linksideal und B Ideal von R mit $B \subset A$ und $RA \subseteq B$. Weiter gelte für jedes Linksideal C von R mit $B \subset C \subseteq A$, daß $C=A$.

Sowohl aus (a) als auch aus (b) folgt, daß A/B nilpotent und endlich ist.

BEWEIS. Wegen $RA+AR \subseteq B$ bzw. $RA \subseteq B$ ist $|na|+B$ Ideal *bzw.* Linksideal für alle ganzen Zahlen n und alle $a \in A$. Falls zusätzlich $na \notin B$, ist wegen $B \subset |na|+B \subseteq A$ weiter $|na|+B=A$.

Wir wählen $a \in A$ mit $a \notin B$ beliebig aber fest: Gilt dann $2a \in B$, so ist $|a|+B/B=A/B$ endlich. Gilt dagegen $2a \notin B$, also $|a|+B=A= =|2a|+B$, also $a=m2a+b$ mit einer ganzen Zahl m und $b \in B$, also $(2m-1)a \in B$, so ist wiederum $|a|+B/B=A/B$ endlich.

Daß A/B nilpotent ist, ist trivial.

Jeder endliche nilpotente Ring R erfüllt die Bedingungen (1)-(8). Wir zeigen nun, daß jeder nile Ring R, der eine der Bedingungen (1)-(4) erfüllt, endlich und nilpotent ist.

BEWEIS. Bekanntlich ist jeder nile Ring R, der (1) oder (3) erfüllt, nilpotent, Jeder nile Ring R, der (2) oder (4) erfüllt, ist nach Lemma 1 bzw. Lemma 2 hyper-R-annullierend bzw. absteigend hyper-R-annullierend und somit auf Grund der vorausgesetzten Maximalbedingung bzw. Minimalbedingung für Ideale nilpotent. R ist also in allen Fällen nilpotent.

Zu (1) und (2): R besitzt wegen der Maximalbedingung für Linksideale bzw. Ideale in beiden Fällen ein maximales endliches nilpotentes Ideal B. Wir führen die Annahme $B \subset R$ zum Widerspruch und zeigen somit die Behauptung. Da R nilpotent ist, gibt es ein Ideal D von R, so daß $B \subset D$ und $RD+DR \subseteq B$. Sei A minimales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Ideal von } R,\ B \subset J \subseteq D)$$

bzw.

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R,\ B \subset J \subseteq D).$$

Wegen $RD+DR \subseteq B$ ist A auch im zweiten Fall ein Ideal und ebenfalls minimales Element der ersten Menge. Anwendung von Lemma 3.(*a*) auf die Ideale A und B erbringt, daß A/B nilpotent und endlich ist. Mit B ist also auch A nilpotent und endlich. Dies widerspricht wegen $B \subset A$ der Maximaleigenschaft von B.

Zu (3) und (4): R besitzt wegen der Minimalbedingung für Linksideale bzw. Ideale in beiden Fällen ein minimales Ideal A, so daß R/A nilpotent und endlich ist. Wir führen die Annahme $0 \subset A$ zum Widerspruch und zeigen somit die Behauptung. Da R nilpotent ist, gibt es ein Ideal D von R, so daß $D \subset A$ und $RA+AR \subseteq D$. Sei B maximales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Ideal von } R,\ D \subseteq J \subset A)$$

bzw.

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R,\ D \subseteq J \subset A).$$

Wegen $RA+AR \subseteq D$ ist B auch im zweiten Fall ein Ideal und ebenfalls maximales Element der ersten Menge. Anwendung von Lemma 3.(a) auf die Ideale A und B erbringt, daß A/B nilpotent und endlich ist. Mit R/A ist also auch R/B nilpotent und endlich. Dies widerspricht wegen $B \subset A$ der Minimaleigenschaft von A.

SATZ 2.

(*a*) Jeder nile Ring R, der die schwache Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, ist hyper-R-annullierend und finit.

(*b*) Jeder nile Ring R, der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, ist nilpotent und lokal endlich.

BEWEIS. Zu (*a*): Sei B das Ideal der finiten Elemente von R. Wir führen die Annahme $B \subset R$ zum Widerspruch und zeigen somit, daß R finit ist. Da R nach Lemma 1 hyper-R-annullierend ist, gibt es ein Ideal D von R, so daß $B \subset D$ und $RD \subseteq B$. Sei A minimales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R,\ B \subset J \subseteq D).$$

Da für A und B die Voraussetzungen von Lemma 3.(*b*) erfüllt sind, ist A/B endlich und damit finit. Also ist auch $\{A\}/B$ finit. Mit B und

$\{A\}/B$ ist auch $\{A\}$ finit. Dies widerspricht wegen $B\subset\{A\}$ der Maximaleigenschaft von B.

Zu (b): Bekanntlich ist R nilpotent. Nach (a) ist R zusätzlich finit. Nun folgt unmittelbar die Behauptung.

Mit Satz 2.(b) folgt für jeden nilen Ring R aus (5) unmittelbar, daß R nilpotent und endlich ist.

Satz 3. Erfüllt ein niler Ring R die Maximalbedingung für Linksideale, so ist er nilpotent und besitzt ein endliches Ideal C, so daß R/C die Charakteristik 0 hat.

Beweis. Bekanntlich ist R nilpotent. Sei C das Ideal der finiter Elemente von R. Da R/C die Charakteristik 0 besitzt, bleibt zu beweisen, daß C endlich ist. R besitzt wegen der Maximalbedingung für Linksideale ein maximales endliches nilpotentes Ideal B mit $B\subseteq C$. Wir führen die Annahme $B\subset C$ zum Widerspruch und zeigen somit die Behauptung. Da R nilpotent ist, gibt es ein Ideal D von R, so daß $B\subset D\subseteq C$ und $RD+DR\subseteq B$. Sei $d\in D$, jedoch $d\notin B$ beliebig aber fest gewählt. Wir setzen $A:=|d|+B$. Wegen $RD+DR\subseteq B$ ist A ein Ideal. Da mit C auch D finit ist, ist A/B endlich. Mit B ist also auch A nilpotent und endlich. Dies widerspricht wegen $B\subset A\subseteq C$ der Maximaleigenschaft von B.

Mit Satz 3 folgt unmittelbar, daß jeder nile Ring R der (6) erfüllt, nilpotent und endlich ist.

Lemma 4. Ist R ein nilpotenter Ring und R/R^2 endlich, so ist R endlich erzeugt.

Beweis. Da R/R^2 endlich ist, gibt es eine endliche Teilmenge M von R, so daß $R=\langle M\rangle+R^2$. Hierbei sei

$$A+B:=(a+b\mid a\in A \text{ und } b\in B)$$

für Teilmengen A und B von R. Es folgt

$$\langle M\rangle+R^i=\langle M\rangle+(\langle M\rangle+R^2)^i\subseteq\langle M\rangle+R^{i+1}$$

für alle natürlichen Zahlen i. Da R nilpotent ist, ergibt sich weiter $R=\langle M\rangle$. Also ist R endlich erzeugt.

Erfüllt nun ein niler Ring R die Bedingung (7), so ist er bekanntlich nilpotent, also nach Lemma 4 endlich erzeugt und weiter nach Satz 2.(b) endlich.

Wir zeigen schließlich, daß ein niler Ring R, der (8) erfüllt, nilpotent und endlich ist.

BEWEIS. Sei A der endliche Annihilator von R und B das nach Satz 3 endliche Ideal der finiten Elemente von R. Wir zeigen:
$*$ Aus $R^{i+1} \subseteq B$ folgt $R^i \subseteq B$ für alle natürlichen Zahlen i.

Hierzu sei für natürliche Zahlen j und Teilmengen M von R definiert:

$$jM = (jr \mid r \in M).$$

Gilt $RR^i = R^{i+1} \subseteq B$, so gibt es wegen der Endlichkeit von B eine natürliche Zahl m, so daß

$$R(mR^i) = m(RR^i) = 0.$$

Also ist $mR^i \subseteq A$. Wegen der Endlichkeit von A gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$(nm)R^i = n(mR^i) = 0.$$

Also ist $R^i \subseteq B$.

Da R nilpotent ist, gibt es eine natürliche Zahl k, so daß $R^k = 0 \subseteq B$. Also ist wegen $*$ auch $R = R^1 \subseteq B$ und damit R *endlich.*

BIBLIOGRAFIA

[1] HERSTEIN, I. N.: *Noncommutative rings*, Published by the Mathematical Association von America.

[2] STREB, W.: *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLIV (1970), S. 399-409.

[3] STREB, W.: *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLVI (1971), S. 137-139.

[4] STREB, W.: *Über Ringe, die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLVII (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 giugno 1972.