

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO RAIMONDO

Sul gruppo di Picard di certi anelli di dimensione 1

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 48 (1972), p. 23-37

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__23_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL GRUPPO DI PICARD DI CERTI ANELLI
DI DIMENSIONE 1

MARIO RAIMONDO *)

Scopo di questo lavoro è lo studio del gruppo di Picard di certi anelli geometrici 1-dimensionali.

Più precisamente se A è un anello noetheriano ridotto e di dimensione 1, se \mathfrak{b} è il conduttore di A nella chiusura integrale \bar{A} e T è una indeterminata su A , ci interessa confrontare le seguenti condizioni (dove $h_0(R)$ indica il numero delle componenti connesse dello spettro primo dell'anello R e $\text{Pic } R$ il gruppo di PICARD di R).

- 1) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T, T^{-1}]$
- 2) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \bar{A}$
- 3) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})$
- 4) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ e $h_0(A) - h_0(A/\mathfrak{b}) = h_0(\bar{A}) - h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})$
- 5) $A = \bar{A}$.

Dopo aver richiamato nel § 1 alcuni preliminari, enunciamo nel § 2 un fondamentale risultato di BASS-MURTHY che stabilisce l'equivalenza di 1) e 4) (cfr. Teor. 3), e dimostriamo che se $\text{spec}(A)$ è connesso si ha $3) \Rightarrow 4)$ (cfr. Prop. 2) e quindi $3) \Rightarrow 1)$. Stabiliamo inoltre, nel caso in cui A sia una k -algebra integra (k corpo algebricamente chiuso) l'equivalenza di 1), 3), 4), 5) (cfr. Prop. 3).

Nel § 3 si dimostra che, se A è una k -algebra ridotta (k algebraica-

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

mente chiuso), si ha $3) \Rightarrow 2)$ (cfr. Teor. 4) e si mostra con dei controesempi che le ipotesi fatte su A sono indispensabili.

Nell'ultimo paragrafo si dà una discussione geometrica delle condizioni precedenti. In particolare si dimostra, usando una versione non locale di un risultato di P. SALMON (cfr. Teor. 6), che se A è l'anello delle coordinate di una curva piana C connessa e priva di componenti multiple, la condizione 3) equivale al fatto che la curva C abbia come singolarità al più un solo nodo spezzato.

In tal caso si ha quindi $\text{Pic } A \cong \overline{\text{Pic } A}$.

Tutti gli anelli che si considerano sono commutativi e gli omomorfismi sono unitari.

§ 1. In questo paragrafo richiamiamo alcune proprietà del gruppo di PICARD di un anello, principalmente alcune sequenze esatte, di cui ci serviremo nel seguito.

Tali risultati sono tratti essenzialmente dal II capitolo del BOURBAKI (cfr. [4]) e dal volume di BASS sulla k -teoria algebrica (cfr. [2]).

Se A è un anello indichiamo con $\text{Pic } A$ (gruppo di PICARD di A) il gruppo abeliano delle classi di isomorfismo degli A -moduli proiettivi di rango 1 (cfr. [4] ch. II § 5 Prop. 7).

Se $f: A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli, $\text{Pic } f: \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B$ indica l'omomorfismo di gruppi definito da $\text{Pic } f(\text{cl}(P)) = \text{cl}(P \otimes_A B)$ dove $\text{cl}(X)$ è la classe di isomorfismo di X (cfr. [4] ch. II, § 5 n. 4).

È facile vedere che Pic è un funtore covariante della categoria degli anelli nella categoria dei gruppi abeliani.

Indichiamo ora con $U(A)$ il gruppo delle unità dell'anello A ; ogni omomorfismo di anelli $f: A \rightarrow B$ induce, per restrizione, un omomorfismo di gruppi $U(f): U(A) \rightarrow U(B)$: risulta in modo ovvio che anche U è un funtore covariante della categoria degli anelli nella categoria dei gruppi abeliani.

La seguente proposizione, di facile dimostrazione, esprime una proprietà dei funtori ora definiti che ci sarà utile nei prossimi paragrafi.

PROP. 1. Siano A_1, \dots, A_n anelli e sia $A = \prod_{i=1}^n A_i$ allora $U(A) \cong \prod_{i=1}^n U(A_i)$ e $\text{Pic } A \cong \prod_{i=1}^n \text{Pic } A_i$.

I due funtori ora introdotti sono legati dal seguente fondamentale teorema (cfr. [2] ch. IX (3, 3) pag. 461).

TEOR. 1. *Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli, allora esistono un gruppo $\text{Pic } \Phi f$ (gruppo di PICARD relativo) e degli omomorfismi canonici di gruppi abeliani:*

$\psi : U(B) \rightarrow \text{Pic } \Phi f$ e $\varphi : \text{Pic } \Phi f \rightarrow \text{Pic } A$, tali che la successione

$$U(A) \xrightarrow{U(f)} U(B) \xrightarrow{\psi} \text{Pic } \Phi f \xrightarrow{\varphi} \text{Pic } A \xrightarrow{\text{Pic } f} \text{Pic } B$$

sia esatta.

Supponiamo ora che $A \subset B$ siano anelli noetheriani e indichiamo con \mathfrak{b} un ideale di B contenuto in A .

Posto $A' = A/\mathfrak{b}$ e $B' = B/\mathfrak{b}$, se $j : A \rightarrow A'$ e $j' : B \rightarrow B'$ sono le proiezioni, il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

risulta cartesiano, cioè si ha

$$A \simeq A' \times_{B'} B = \{(a', b) \in A' \times B \mid f'(a') = j'(b)\}.$$

Possiamo quindi applicare un importante risultato di MILNOR (cfr. [2] ch. IX § 5, th (5.3) e th (5.4)), ottenendo così il seguente:

TEOR. 2. *Nel diagramma commutativo a righe esatte*

$$\begin{array}{ccccccccc} U(A) & \rightarrow & U(B) & \rightarrow & \text{Pic } \Phi f & \rightarrow & \text{Pic } A & \rightarrow & \text{Pic } B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U(A') & \rightarrow & U(B') & \rightarrow & \text{Pic } \Phi f' & \rightarrow & \text{Pic } A' & \rightarrow & \text{Pic } B' \end{array}$$

risulta $\text{Pic } \Phi f \simeq \text{Pic } \Phi f'$. Si ha inoltre la seguente successione esatta di MAYER-VIETORIS:

$$0 \rightarrow U(A) \rightarrow U(B) \oplus U(A') \rightarrow U(B') \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B \oplus \text{Pic } A' \rightarrow \text{Pic } B'.$$

COR. 1. Se $\text{Pic } A' = \text{Pic } B' = 0$ si ha

$$a) \ker(\text{Pic } f) = U(B')/U(A') \cdot U(B)'$$

dove

$$U(B)' = \text{Im}(U(B) \rightarrow U(B'))$$

b) $\text{Pic } f$ è surgettivo.

DIM. a) La sequenza di MAYER-VIETORIS, nel nostro caso si legge:

$$0 \rightarrow U(A) \rightarrow U(B) \oplus U(A') \rightarrow U(B') \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B \rightarrow 0$$

da cui

$$\begin{aligned} \ker(\text{Pic } f) &= \text{Im}(U(B') \rightarrow \text{Pic } A) \simeq U(B')/\ker(U(B') \rightarrow \text{Pic } A) \simeq \\ &\simeq U(B')/\text{Im}(U(B) + U(A') \rightarrow U(B')) \simeq \\ &\simeq U(B')/\text{Im}(U(B) \rightarrow U(B')) \cdot \text{Im}(U(A') \rightarrow U(B')) \simeq U(B')/U(A') \cdot U(B)' \end{aligned}$$

dove $U(B)' = \text{Im}(U(B) \rightarrow U(B'))$ e $U(A')$ è identificato con la sua immagine (iniettiva) in $U(B)'$.

b) È ovvia conseguenza della successione di MAYER-VIETORIS su scritta. c.v.d.

Dal coroll. 1 segue immediatamente il

COR. 2. Nelle ipotesi del Cor. 1, se vale una delle seguenti condizioni:

- i) $U(A') \simeq U(B)'$
- ii) $U(B) \rightarrow U(B')$ è surgettivo

allora risulta $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } B$.

§ 2. Il principale risultato contenuto in questo numero è la dimostrazione del fatto che $3) \Rightarrow 4)$ per anelli a spettro connesso (Prop. 2).

Si passa quindi al confronto con risultati di altri autori pervenendo alla equivalenza di 1), 3), 4), 5) per k -algebre integre (k corpo algebricamente chiuso). (Prop. 3).

Tutti gli anelli sono supposti noetheriani.

Sia A un anello, indichiamo con $H_0(A)$ il gruppo abeliano libero delle funzioni continue da $\text{Spec } A$ a \mathbf{Z} (questo ultimo munito della topologia discreta). Il rango $h_0(A)$ di $H_0(A)$ è uguale al numero delle componenti connesse di $\text{Spec } A$.

Un omomorfismo di anelli $f: A \rightarrow B$ induce una applicazione continua ${}^*f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ (cfr. [4] ch. II § 4 Prop. 13), resta quindi definito un omomorfismo di gruppi $H_0(f): H_0(A) \rightarrow H_0(B)$. Ci sarà utile il seguente:

LEMMA 1. $H_0(f)$ è iniettivo se e solo se $\ker f$ non contiene idempotenti non nulli.

$H_0(f)$ è surgettivo se e solo se ogni famiglia di idempotenti ortogonali in B si rimonta ad una tale famiglia in A .

DIM. Cfr. [2] ch. IX Lemma 3.1 pag. 459.

Consideriamo ora un anello A , ridotto e di dimensione 1, e sia \bar{A} la chiusura integrale di A nel proprio anello totale delle frazioni. Supponiamo che \bar{A} sia di tipo finito su A e sia \mathfrak{b} il conduttore di A in \bar{A} . Si ha che $A' = A/\mathfrak{b}$ e $\bar{A}' = \bar{A}/\mathfrak{b}$ sono artiniani (cfr. ad es. [6] Prop. 1).

In queste ipotesi vale il seguente importante teorema di BASS-MURTHY (cfr. [3] th 8.1).

TEOR. 3.

a) Consideriamo l'omomorfismo $g: H_0(A') \oplus H_0(\bar{A}) \rightarrow H_0(\bar{A}')$ indotto da $A' \rightarrow \bar{A}'$ e $\bar{A} \rightarrow \bar{A}'$. Posto $M(A) = \text{coker } g$, $M(A)$ risulta un gruppo abeliano libero di rango

$$h_0(A) - (h_0(A') + h_0(\bar{A})) + h_0(\bar{A}').$$

b) Se T è un'indeterminata su A , risulta

$$1) \text{ Pic } A \simeq \text{Pic } A[T] \Leftrightarrow \mathfrak{b} = \sqrt{\bar{A}} \mathfrak{b}$$

$$2) \text{ Pic } A \simeq \text{Pic } A[T, T^{-1}] \Leftrightarrow \text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T] \text{ e } M(A) = 0.$$

Premettiamo ora un lemma sul conduttore per anelli a spettro connesso, che useremo anche nei paragrafi successivi.

LEMMA 2. Sia A un anello ridotto a spettro connesso, non normale, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ i primi minimali di A , allora nella decomposizione del

conduttore $\mathfrak{b}\bar{A} \cong \prod_{i=1}^n \mathfrak{b}_i \bar{A}_i$ dove $A_i = A/\mathfrak{p}_i$, \mathfrak{b}_i è un ideale proprio di \bar{A}_i .

DIM. Per una nota caratterizzazione della chiusura integrale (cfr. [4] ch. V Cor. 1 di Prop. 9) si ha che $\bar{A} \cong \prod_{i=1}^n \bar{A}_i$ dove $A_i = A/\mathfrak{p}_i$ da cui segue la decomposizione del conduttore $\mathfrak{b}\bar{A} \cong \prod_{i=1}^n \mathfrak{b}_i \bar{A}_i$.

Ora se A possiede un solo primo minimale la tesi è ovvia.

Supponiamo quindi $n > 1$ e supponiamo che $\mathfrak{b}_1 = \bar{A}_1$ da cui $\bar{A}_1 \subset A_1$

Sia $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \bar{A} = \bar{A}_1 \times \prod_{i=2}^n \bar{A}_i$, $e_i \in A$ perché $\bar{A}_1 \subset A$, sia $e_2 = 1 - e_1$; si ha $e_2 \neq 0$ in quanto $n > 1$. Pertanto A possiede almeno 2 idempotenti ortogonali non nulli da cui segue che $\text{Spec } A$ non è connesso. Ma ciò è assurdo, da cui la tesi. c.v.d.

Possiamo ora stabilire la seguente

PROP. 2. Se A è un anello verificante le ipotesi di Teor. 3 ed a spettro connesso, si ha

$$\text{Pic } A[T] \simeq \text{Pic } A \text{ e } h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}') \Rightarrow \text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T, T^{-1}].$$

DIM. Per il Teor. 3 la nostra tesi equivale al fatto che $M(A) = 0$, cioè che $g : H_0(A') + H_0(\bar{A}) \rightarrow H_0(\bar{A}')$ è surgettivo.

Sia $n = h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}')$, per Lemma 2 abbiamo che la decomposizione $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_n$ è tale che i \mathfrak{b}_i siano ideali propri da cui $\bar{A}' = \bar{A}/\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i/\mathfrak{b}_i$, ma \bar{A}' è artiniano quindi si decompone in modo unico come $\bar{A}' = \prod_{i=1}^n B_i$ dove i B_i sono artiniani locali (cfr. [1]8.7). Ne otteniamo che $A_i/\mathfrak{b}_i \simeq B_i \forall i$, da cui per Lemma 1 otteniamo che $H_0(f) : H_0(\bar{A}) \rightarrow H_0(\bar{A}')$ è isomorfismo, pertanto ne segue che g è surgettivo. c.v.d.

Mostriamo ora con un esempio l'utilità di aver considerato anelli a spettro connesso, ipotesi che fra l'altro geometricamente non è molto restrittiva, in quanto significa che ci si limita a considerare insiemi algebrici connessi.

ESEMPIO 1. Sia k un corpo, t indeterminata su k . Sia

$$A = k[t(t^2 - 1), t^2 - 1] \times k.$$

Si ha $\bar{A} = k[t] \times k$ e $\mathfrak{b} = ((t(t^2 - 1), t^2 - 1) \times k)A = ((t^2 - 1) \times k)\bar{A}$ da cui si ottiene che $\mathfrak{b} = \sqrt{\bar{A}}\bar{\mathfrak{b}}$ e quindi, per Teor. 3, $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ mentre $A/\mathfrak{b} \simeq k$ e $\bar{A}/\bar{\mathfrak{b}} \simeq k \times k$.

Ora $h_0(A) = 2$, $h_0(\bar{A}) = 2$, $h_0(A/\mathfrak{b}) = 1$ e $h_0(\bar{A}/\bar{\mathfrak{b}}) = 2$.

Ne risulta pertanto che $\text{Pic } A \cong \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}/\bar{\mathfrak{b}})$, ma il morfismo canonico $\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } A[T, T^{-1}]$ non è isomorfismo.

Confrontiamo ora il risultato stabilito nella Prop. 2 con un risultato di C. Pedrini su un argomento analogo, ne otteniamo con ulteriori ipotesi l'equivalenza di 1), 3), 4) e 5).

Ne ricaveremo in particolare anche l'inverso di Prop. 2.

PROP. 3. Sia A una k -algebra integra di t.f. e dim. 1 (dove k è un corpo algebricamente chiuso), allora le seguenti condizioni sono equivalenti

a) A è normale

b) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}') = 1$

c) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T, T^{-1}]$.

DIM.

a) \Rightarrow b) Il fatto che $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ segue da [3] Cor. 5.10 mentre è ovvio che $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}') = 1$.

b) \Rightarrow c) Cfr. Prop. 2.

c) \Rightarrow a) Cfr. [6] Teor. 1.

c.v.d.

§ 3. In questo numero consideriamo la condizione 2) della introduzione, cioè la condizione $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \bar{A}$.

Dimostriamo che se A è una k -algebra ridotta (dove k è un corpo algebricamente chiuso) 3) \Rightarrow 2) e forniremo controesempi che illustrino l'utilità di queste ipotesi.

Premettiamo il seguente lemma che ci permetterà di sfruttare i risultati esposti nel teorema 3.

LEMMA 3. *Sia k un corpo, A una k -algebra ridotta di tipo finito e \bar{A} la chiusura integrale di A . Allora \bar{A} è un A -modulo di tipo finito e una k -algebra di tipo finito.*

DIM. Siano $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ i primi minimali di A , si ha $\bar{A} \simeq \prod_{i=1}^n \bar{A}_i$ dove gli $A_i = A/\mathfrak{p}_i$ sono integrali.

Poiché A_i è una k -algebra tipo finito, \bar{A}_i è A_i -modulo di tipo finito e k -algebra di tipo finito (cfr. [4] ch. V th. 2), e la tesi segue facilmente. c.v.d.

TEOR. 4. *Sia k un corpo algebricamente chiuso e sia A una k -algebra ridotta, finitamente generata e di dimensione 1, sia \mathfrak{b} il conduttore di A nella chiusura integrale, T un'indeterminata su A e poniamo $A' = A/\mathfrak{b}$ e $\bar{A}' = \bar{A}/\mathfrak{b}$. Allora se $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}') = n$ l'omomorfismo canonico $\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A}$ è un isomorfismo.*

DIM. Per Lemma 3 si ha che \bar{A} di tipo finito su A , per cui rientriamo nelle ipotesi di Teor. 3.

Inoltre per la Prop. 1 possiamo ridurci al caso in cui $\text{Spec } A$ sia connesso.

Per il Lemma 2 abbiamo quindi la seguente decomposizione

$\mathfrak{b}\bar{A} \simeq \prod_{i=1}^n \mathfrak{b}_i \bar{A}_i$ dove \mathfrak{b}_i è un ideale proprio di \bar{A}_i , da cui otteniamo la seguente decomposizione effettiva $\bar{A}' \simeq \prod_{i=1}^n \bar{A}_i/\mathfrak{b}_i$.

Consideriamo ora l'ipotesi $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$, questa equivale per Teor. 3 al fatto che $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, che equivale a sua volta al fatto che \bar{A}' sia ridotto (cfr. [6] Lemma 4).

Ne otteniamo quindi che \bar{A}' è artiniano ridotto, quindi per il teorema di struttura degli anelli artiniani (cfr. [1] 8.7) si ha che $\bar{A}' \simeq \prod_{i=1}^n k_i$ dove i k_i sono corpi essendo \bar{A}' ridotto.

Ora per l'unicità stabilita dal teorema di struttura, riordinando opportunamente gli indici, si ottiene $\bar{A}_i/\mathfrak{b}_i \simeq k_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Ma per il lemma 3 \bar{A}_i è k -algebra di tipo finito, e tale è anche $\bar{A}_i/\mathfrak{b}_i \simeq k_i$, quindi \bar{A}_i/\mathfrak{b}_i è estensione algebrica finita di k (cfr. [1],

Cor. 5.24) ma k è algebricamente chiuso quindi $\overline{A}_i/\mathfrak{b}_i \simeq k$ per ogni i , pertanto $\overline{A}' \simeq k^n$.

Considerando ora il Cor. 2, al fine di dimostrare la nostra tesi, ci basta far vedere che $U(\overline{A}) \rightarrow U(\overline{A}') \rightarrow 0$ è esatta.

Ma il morfismo $U(\overline{A}) \rightarrow U(\overline{A}')$ si può scrivere come

$$U\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \rightarrow U(k^n)$$

oppure, per Prop. 1, come

$$\prod_{i=1}^n U(\overline{A}_i) \rightarrow \prod_{i=1}^n U(k) \simeq k^{*n}$$

e, affinché tale morfismo sia surgettivo basta che i morfismi

$$U(\overline{A}_i) \rightarrow k^* \simeq U(\overline{A}_i/\mathfrak{b}_i)$$

siano surgettivi per ogni i .

Sia π_i la proiezione $\overline{A}_i \rightarrow \overline{A}_i/\mathfrak{b}_i \simeq k$.

\overline{A}_i è k -algebra e quindi $\overline{A}_i \supset k$ a meno di isomorfismi.

Se $x \in k^*$ si ha $x = \pi_i(x)$ (sempre a meno di isomorfismi) e quindi gli omomorfismi $U(\overline{A}_i) \rightarrow U(\overline{A}_i/\mathfrak{b}_i) \simeq k^*$ sono surgettivi.

L'implicazione stabilita nel teorema ora dimostrato non è invertibile in generale, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 2. Sia k un corpo e sia

$$A = k[X, Y]_{(X, Y)} / (X^2 + Y^3) \simeq k[t^2, t^3]_{(t^2, t^3)}$$

risulta $\overline{A} = k[t]_{(t)}$, mentre il conduttore $\mathfrak{b} = (t^2, t^3)A$ pertanto $\sqrt{\mathfrak{b}} = (t)\overline{A} \neq \mathfrak{b}$, quindi per Teor. 3 il morfismo $\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \overline{A}[T]$ non è isomorfismo, mentre invece $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \overline{A} = 0$.

In base a questo esempio sembra ragionevole supporre che l'inverso di Teor. 4 sia valido per anelli di Jacobson.

Mostriamo ora costruendo opportuni esempi come le tre ipotesi poste in Teor. 4 rispettivamente che

a) il corpo k sia algebricamente chiuso

b) $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}')$

c) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$

siano indispensabili per la validità del teorema.

ESEMPIO 3. Sia $A = \mathbf{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + 1, Z) \cap (X^2 + Z^2 + 1, Y) \simeq \mathbf{R}[x, y, z]$.

I primi minimali di A sono $\mathfrak{p}_1 = (x^2 + y^2 + 1, z)$ e $\mathfrak{p}_2 = (x^2 + z^2 + 1, y)$.

Poniamo $A_1 = A/\mathfrak{p}_1 \simeq \mathbf{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1) = \mathbf{R}[x', y']$ e analogamente $A_2 = A/\mathfrak{p}_2 \simeq \mathbf{R}[x'', z'']$. Si ha, ad esempio applicando il criterio Jacobiano, che A_1 e A_2 sono normali, e quindi $\bar{A} \cong A_1 \times A_2$.

Se consideriamo la parametrizzazione

$$A_1 \simeq A_2 \simeq \mathbf{R} \left[i \frac{2T}{T^2+1}, i \frac{T^2-1}{T^2+1} \right] \text{ (dove } i \text{ è una radice di } X^2+1=0)$$

e se osserviamo che i non sta in A_1 nè in A_2 otteniamo $U(A_1) \simeq U(A_2) \cong \mathbf{R}^*$ e quindi $U(\bar{A}) \simeq \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$.

Il conduttore \mathfrak{b} che corrisponde geometricamente ai punti $(i, 0, 0)$ e $(-i, 0, 0)$ risulta:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= (x^2 + 1, y, z)A = \\ &= ((x'^2 + 1, 0) \times (x''^2 + 1, 0), (0, y') \times (0, 0), (0, 0) \times (0, z''))\bar{A} \end{aligned}$$

da cui si ricava $A/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{C}$ e $\bar{A}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ e anche che $\sqrt{\bar{A}}/\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ cioè che $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$.

Applicando Cor. 1 si ha che

$$\ker(\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A}) \simeq U(\bar{A}/\mathfrak{b})/(A/\mathfrak{b}) \cdot U(\bar{A})'$$

per cui con facili conti si ha

$$\ker(\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A}) \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* / \{a(b, c) \mid a \in \mathbf{C}^*, b, c \in \mathbf{R}^*\} \neq 0$$

e quindi il morfismo canonico $\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A}$ non è isomorfismo.

L'anello A che abbiamo considerato ci fornisce un controesempio al Teor. 4 se il corpo base non è algebricamente chiuso.

ESEMPIO 4. L'esempio che consideriamo ci mostra l'importanza dell'ipotesi $h_0(\bar{A})=h_0(\bar{A}/\bar{\mathbf{b}})$.

Sia $A=k[X, Y]/(X^2-Y^3+Y^2)\simeq k[t(t^2-1), (t^2-1)]$ (cfr. Es. 1) si ha $\bar{A}=k[t]$ e $\bar{\mathbf{b}}=(t(t^2-1), (t^2-1))A=(t^2-1)\bar{A}$.

Quindi $\bar{\mathbf{b}}=\sqrt{\bar{A}}$ mentre $A/\bar{\mathbf{b}}\simeq k$ e $\bar{A}/\bar{\mathbf{b}}\simeq k\times k$.

I gruppi delle unità sono $U(A)\simeq U(\bar{A})\simeq U(A/\bar{\mathbf{b}})\simeq k^*$ e $U(\bar{A}/\bar{\mathbf{b}})\simeq k^*\times k^*$, mentre $\text{Pic } \bar{A}=0$. Dal Teor. 2 si ottiene quindi

$$\begin{array}{ccccccc} k^* & \rightarrow & k^* & \rightarrow & \text{Pic } \Phi f & \rightarrow & \text{Pic } A \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ k^* & \rightarrow & k^* \times k^* & \rightarrow & \text{Pic } \Phi f' & \rightarrow & 0 & \rightarrow 0. \end{array}$$

Da cui si ricava, sfruttando l'esattezza delle righe e l'isomorfismo

$$\text{Pic } \Phi f \simeq \text{Pic } \Phi f',$$

$$\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \Phi f \simeq \text{Pic } \Phi f' \simeq k^* \times k^* / U(f')(k^*) \simeq k^* \times k^* / \Delta \simeq k^*$$

(dove Δ è il sottogruppo generato dalla diagonale di $k^* \times k^*$).

Ne otteniamo quindi che $\text{Pic } A \neq \text{Pic } \bar{A}$, mentre si ha che $h_0(\bar{A})=1$ ma $h_0(\bar{A}/\bar{\mathbf{b}})=2$.

ESEMPIO 5. Consideriamo ora un esempio in cui $\text{Pic } A \neq \text{Pic } A[T]$ e tale che, pur essendo $h_0(A)=h_0(\bar{A}/\bar{\mathbf{b}})$, risulti $\text{Pic } A \neq \text{Pic } \bar{A}$.

Sia $A=k[X, Y]/(X^2+Y^3)\simeq k[t^2, t^3]$ (cfr. Es. 2).

Risulta: $\bar{A}=k[t]$ mentre $\bar{\mathbf{b}}=(t^2, t^3)A=(t^2)\bar{A}$,

$$\sqrt{\bar{A}}=(t)\bar{A} \text{ da cui } \bar{\mathbf{b}}\neq \sqrt{\bar{A}}, A/\bar{\mathbf{b}}\simeq k \text{ e } \bar{A}/\bar{\mathbf{b}}\simeq k[t]/(t^2)$$

per cui $h_0(\bar{A})=h_0(\bar{A}/\bar{\mathbf{b}})=1$. Con calcoli analoghi a quelli fatti nell'esempio 4 si ottiene $\text{Pic } A \simeq k$ (gruppo additivo), mentre $\text{Pic } \bar{A}=0$.

§ 4. In questo numero ci proponiamo di caratterizzare geometricamente alcuni dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti.

In particolare, se C è una k -curva piana semplice e $A=k[C]$, dimostreremo che la condizione $\text{Pic } A = \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A})=h_0(\bar{A}/\bar{\mathbf{b}})$ equivale al fatto che la curva C abbia come singolarità al più un nodo

spezzato (cfr. Teor. 7). Dimosteremo inoltre che questa condizione implica l'isomorfismo $\text{Pic } A = \text{Pic } \bar{A}$.

Fissiamo ora i dati entro cui limiteremo la nostra discussione ed elenchiamo alcuni fatti ben noti, che useremo nel seguito.

Siano k un corpo ed A l'anello delle coordinate di una k -curva semplice C (cioè A è una k -algebra ridotta finitamente generata e di dimensione 1).

Si sa che i punti singolari di C corrispondono ai primi \mathfrak{p} di altezza 1 tale che $A_{\mathfrak{p}}$ non sia integralmente chiuso e quindi corrispondono ai primi che contengono il conduttore \mathfrak{b} di A in \bar{A} . (cfr. 4 ch [V] § 1, N. 5, Cor. 5).

Se \bar{C} è la normalizzata di C , si ha $k[\bar{C}] \simeq \bar{A}$, in effetti $\bar{A} \simeq \Pi \bar{A}_i$ dove gli \bar{A}_i sono gli anelli delle normalizzate delle componenti irriducibili di C .

Restringiamo ora la discussione alle curve piane: il nostro primo passo sarà quello di estendere al caso non locale la seguente caratterizzazione locale delle singolarità in rapporto alla condizione $\text{Pic } A[T] = 0$. La dimostrazione è dovuta a P. Salmon (cfr. [7], Teor. 5).

TEOR. 5. *Sia A l'anello locale nell'origine di una k -curva piana semplice avente nell'origine un punto multiplo, T una indeterminata su A , allora: $\text{Pic } A[T] = 0$ se e solo se l'origine è un punto doppio nodale.*

Il teorema ora enunciato si può esprimere in forma globale, per fare ciò premettiamo il seguente:

LEMMA 4. *Sia A un anello tale che la chiusura integrale \bar{A} sia di tipo finito su A . Sia \mathfrak{b} il conduttore di A in \bar{A} e \mathfrak{p} un ideale primo di A . Allora*

a) *Il conduttore di $A_{\mathfrak{p}}$ in $\bar{A}_{\mathfrak{p}}$ è $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$*

b) $\sqrt{\bar{A}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b} A_{\mathfrak{p}}} = \sqrt{\bar{A}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b} A_{\mathfrak{p}}}$

dim:

a) cfr. [6], § 1, Lemma 3

b) sia $\frac{a}{b} \in \bar{A}_{\mathfrak{p}}$ tale che $\frac{a^n}{b^n} \in \mathfrak{b} \bar{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b} A_{\mathfrak{p}}$ per la a)

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{x}{t} \quad \text{con } x \in \mathfrak{b}, t \notin \mathfrak{p} \text{ per cui esiste } s \notin \mathfrak{p} \text{ tale che } s(a^n t - x b^n) = 0.$$

Ne segue $s^{n-1}(a^n t - x b^n) = 0$ quindi $s^n a^n = s^{n-1} x b^n \in \mathfrak{b}$ da cui $sta \in \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}}$ perciò si ha $\frac{a}{b} = \frac{ast}{bst} \in \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}}$.

Sia ora $a/s \in \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}}$ con $a^n \in \mathfrak{b}$ allora si ha $\left(\frac{a}{s}\right)^n \in \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}}$ per cui

$$\frac{a}{s} \in \sqrt{\bar{a}_p} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}}. \quad \text{c.v.d.}$$

PROP. 4. *Nelle ipotesi di Teor. 3 si ha:*

$$\text{Pic } A[T] \simeq \text{Pic } A \Leftrightarrow \text{Pic } \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{p}}[T] = 0 \text{ per ogni } \bar{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } A.$$

DIM. Supponiamo dapprima $\text{Pic } A[T] \simeq \text{Pic } A$.

Dal Teor. 3 b) si ha che $\text{Pic } \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{p}}[T] \simeq \text{Pic } \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{p}} = 0$ se e solo se $\bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} = \sqrt{\bar{a}_p} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}}$.

Ora, sempre per Teor. 3 b) la nostra ipotesi equivale a $\bar{\mathfrak{b}} = \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}}$ e per Lemma 4 a) e b) si ha

$$\bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} = \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} = \sqrt{\bar{a}_p} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} \quad \forall \bar{\mathfrak{p}} \text{ primo.}$$

Quindi $\text{Pic } \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{p}}[T] = 0 \quad \forall \bar{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } A$.

Supponiamo viceversa che $\text{Pic } \mathfrak{A} \bar{\mathfrak{p}}[T] = 0 \quad \forall \bar{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } A$.

Analogamente a sopra si ha $\bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} = \sqrt{\bar{a}_p} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}} = \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{A}} \bar{\mathfrak{p}}$.

Quindi per un noto teorema (cfr. ad esempio [4], ch. II, § 3, Cor. 3 di Th. 1) si ha $\bar{\mathfrak{b}} = \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathfrak{b}}$ che, ancora per Teor. 3 b) equivale a $\text{Pic } [T] \simeq \text{Pic } A$. c.v.d.

TEOR. 6. *Sia A l'anello delle coordinate di una k-curva piana semplice, dove il corpo k è algebricamente chiuso, allora se T è una indeterminata su A: $\text{Pic } A[T] \simeq \text{Pic } A$ se e solo se la curva ha al più punti di singolarità doppia nodale.*

DIM. Segue come corollario di Teor. 5 e Prop. 4.

Infatti, essendo il corpo k algebricamente chiuso, possiamo traslare la singolarità nell'origine ed applicare il Teor. 5. c.v.d.

Possiamo ora stabilire il risultato cui abbiamo fatto riferimento nell'introduzione. Ci sarà utile la seguente:

DEFINIZIONE. *Un nodo P si dice spezzato quando risulta essere il punto d'incontro di due componenti distinte C_1 e C_2 .*

Risulta ovviamente che C_1 e C_2 non sono singolari in P e che ivi hanno tangenti distinte.

TEOREMA 7. *Nelle ipotesi di Teor. 6, se inoltre la curva C è connessa, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- 1) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})$
- 2) *La curva C ha al più un punto singolare di tipo nodale spezzato.*

DIM. Dal Teor. 6 abbiamo che la condizione $\text{Pic } A = \text{Pic } A[T]$ equivale al fatto che C abbia al più dei nodi.

Ora abbiamo che $h_0(\bar{A})$ è uguale al numero dei primi minimali di A e quindi è uguale al numero delle componenti irriducibili di C ; mentre se consideriamo la decomposizione del conduttore in $\bar{A}(\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_{h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})})$ otteniamo che $h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})$ è uguale al numero delle parti in cui il conduttore si decompone in \bar{A} ed è quindi uguale al numero dei punti sulla normalizzata che corrispondono ai punti singolari.

Ne segue quindi, in base alla definizione, che se la curva ha un nodo spezzato allora $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}/\mathfrak{b}) = 2$.

Viceversa se C avesse un nodo non spezzato, avremmo che questo si decomporrebbe in \bar{C} e quindi $h_0(\bar{A}) < h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})$ contro l'ipotesi. Supponiamo infine che la curva abbia n nodi spezzati, essendo la curva connessa abbiamo $h_0(\bar{A}) \leq n+1$ mentre invece $h_0(\bar{A}/\mathfrak{b}) = n$. Ora per ipotesi abbiamo $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}/\mathfrak{b})$ e quindi $2n \leq n+1$ cioè $n=1$. c.v.d.

Osserviamo che le due condizioni equivalenti del teorema ora stabilito equivalgono al fatto che la curva C abbia al più due componenti normali e irriducibili C_1 e C_2 che si incontrano in un solo nodo spezzato P .

PROP. 5. *In questo caso se $A_1=k[C_1]$ e $A_2=k[C_2]$ si ottiene:*

$$\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \bar{A} \simeq \text{Pic } A_1 \times \text{Pic } A_2 .$$

DIM. Per Teor. 4 sappiamo che le nostre ipotesi sono sufficienti affinché $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \bar{A}$, ma $\bar{A} = A_1 \times A_2$ in quanto gli A_i sono normali da cui per Prop. 1 la tesi. c.v.d.

Concludiamo citando un ulteriore risultato ottenuto grazie ad una comunicazione del Prof. Ramanujam e che dimostreremo in un lavoro di prossima pubblicazione.

Se C è una k -curva irriducibile e $A=k[C]$ allora $\text{Pic } A = \text{Pic } \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}$.

In questa ipotesi, usando anche Prop. 3, otteniamo l'equivalenza delle seguenti condizioni:

- 1) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T, T^{-1}]$
- 2) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } \bar{A}$
- 3) $\text{Pic } A \simeq \text{Pic } A[T]$ e $h_0(\bar{A}) = h_0(\bar{A}/\mathfrak{b}) = 1$
- 4) $A = \bar{A}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. ATIYAH-I. MACDONALD: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [2] H. BASS: *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York 1968.
- [3] H. BASS-P. MURTHY: *Grothendieck groups and Picard groups of abelian groups rings*. Annals of Math. II Ser. Vol. 86, n. 1 (1967), pp. 16-73.
- [4] N. BOURBAKI: *Algebre Commutative*, Ch. II e ch. V, Hermann, Paris 1961.
- [5] C. PEDRINI: *Sulla normalità e il gruppo di Picard di certi anelli*, Le Matematiche, Vol. XXV, Fasc. 1 (1970).
- [6] C. PEDRINI: *Sul gruppo di Picard di certe estensioni di anelli di gruppo 1-dimensionali*, Rend. di Mat. (1), Vol. 4, Serie VI, 1971.
- [7] S. SALMON: *Singularità e gruppo di Picard*, Ist. Naz. di Alta Matematica, Symposia Mathematica II, Academic Press, New York (1969), pp. 341-345.