Rendiconti *del* Seminario Matematico *della* Università di Padova

Piergiulio Corsini

Hypergroupes et groupes ordonnés

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 48 (1972), p. 189-204

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__189_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 48 (1973)

HYPERGROUPES ET GROUPES ORDONNÉS

PIERGIULIO CORSINI *)

SOMMARIO - Si associa un ipergruppo (sd-h) a un gruppo totalmente ordinato e se ne analizzano le proprietà. Si dà una caratterizzazione di questo ipergruppo e si studiano alcuni quozienti di sd-iperstrutture.

SUMMARY - One associates an hypergroup (sd-h) to a totally ordered group and analyzes its properties. One gives a characterization of this hypergroup and studies some quotients of sd-hyperstructures.

Introduction.

La notion d'hypergroupe introduite par Marty en 1934 a eté analysée par plusieurs bons mathématiciens (voir la bibliographie) mais il rest beaucoup à faire encore. Je commencai à m'y interesser, séduit par la relative nouveauté du sujet et par sa généralité, mais je doit surtout à l'encouragement de M. le professeur Permutti, de m'être décidé à étendre et approfondir les recherches en cette matière. Je remercie aussi les professeurs Orsatti et Salmon pour les precieux reinsegnements bibliographiques.

Dans ce premier travail on considère un type particulier d'hypergroupe commutatif, le *sd*-hypergroupe, ou bien hypergroupe somme-difference qui est associé à un groupe abélien totalement ordonné. On en étudie les proprietés et on en donne une caracterisation en terme d'en-

---

*) Adresse de l'auteur: Istituto di Matematica, Via L. B. Alberti 4, Genova, Italie.

Travail accompli dans la sphère du G. N. Strutt. Alg. Geom. du C.N.R.

semble doué d'une loi multivoque. La dernière partie concerne les *sd*-hyperanneaux, les *sd*-hypermodules et quelques types de quotients de *sd*-hyperstructures.

CHAPITRE I

1. On rappelle qu'un hypergroupe H est un ensemble doué d'une hyperopération qui associe à tout couple $(x, y) \in H \times H$ un sous-ensemble de H, noté $x \circ y$ tel que

(1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

(2) $\exists\, e \in H$: $e \circ x \ni x$, $x \circ e \ni x$, $\forall x$;

(3) $\forall x$, $\exists x'$: $x \circ x' \ni e$, $x' \circ x \ni e$.

Si H_1 et H_2 sont deux hypergroupes, on dit qu'une application $f: H_1 \mapsto H_2$ est un homomorphisme si $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y), \forall (x, y) \in H_1 \times H_2$.

Théorème. Soit G un groupe abélien totalement ordonné et $G^+ = \{x \in G \mid x \geqslant 0\}$ son cône positif. G^+ est un hypergroupe abélien réversible en soi-même [7] par rapport à l'hyperopération $x \circ y = \{x+y, \mid x - y \mid\}$. On noterà $(G^+, \circ)$ *par* $\mathcal{H}$ (G). La seule chose à montrer est l'associativité de l'hyperopération et à cet effet il suffit de prouver que si $x \in G^+$, $y \in G^+$, $z \in G^+$ et $x \leqslant y \leqslant z$, on a:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = y \circ (x \circ z).$$

Il faut distinguer deux cas:

1) $z \geqslant x+y$. On verifie que les trois hyperproduits donnent comme résultat: $\{z-y+x,\ z-y-x,\ z+y-x,\ z+y+x\}$;

2) $z < x+y$. On obtient toujours l'ensemble $\{z-y+x,\ z+y-x,\ y+x-z,\ y+z+x\}$.

Définition. Un hypergroupe qu'on peut considérer obtenu d'un groupe totalement ordonné de la façon susdite, on l'appelle *sd*-hypergroupe.

2. On pourrait aviser de pouvoir associer de la même façon, un hypergroupe au cône positif d'un groupe abélien réticulé. A cette question repond le.

THÉORÈME. Soit G un groupe abélien réticulé et $\mathcal{H}(G)$ le hypergroupoïde associé a G^+ par l'hyperopération : $x \circ y = \{x+y, \ |x-y|\}$. Alors $\mathcal{H}(G)$ est un hypergroupe si et seulement si, G est totalement ordonné.

Évidemment il suffit de prouver que si G n'est pas totalement ordonné, l'hyperopération n'est pas associative.

Rappelons d'abord que, par [4] il existe une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes abéliens totalement ordonnés tel que G peut être plongé comme sous-groupe réticulé dans $\prod_i G_i$. On montrerà alors que, dans le cône positif d'un sous-groupe réticulé de $K \subset \prod_i G_i$ l'hyperopération n'est en général pas associative.

Soient $x=(x_i)_{i \in I}$, $y=(y_i)_{i \in I}$, $z=(z_i)_{i \in I}$ des elements de K; on pose

$$(x \circ y) \circ z = \{s_0, s_1, s_2, s_3\} = S, \text{ où } s_k = (s_k{}^i)_{i \in I}, \ s^i{}_0 = x_i + y_i + z_i,$$

$$s_1{}^i = |x_i + y_i - z_i|, \ s_2{}^i = |x_i - y_i| + z_i, \ s_3{}^i = ||x_i - y_i| - z_i|;$$

$$x \circ (y \circ z) = \{t_0, t_1, t_2, t_3\} = T \text{ où } t_k = (t_k{}^i)_{i \in I}, \ t_0{}^i = x_i + y_i + z_i,$$

$$t_1{}^i = x_i + |y_i - z_i|, \ t_2{}^i = |x_i - y_i - z_i|, t_3{}^i = |x_i - |y_i - z_i||.$$

Si K n'est pas totalement ordonné, on peut supposer qu'il existe $(i, j) \in I \times I$ tel que $y_i > z_i$, $y_j < z_j$ et de plus que $z_i > 0$, $y_j > 0$; en effet si, par exemple $y_j = 0$, on prend $y' = 2y \vee z$ et $z' = 2z$, alors $y_i' = 2y_i > 2z_i = z_i'$ et $0 < z_j = = y_j' < 2z_j = z_j'$.

Soit $x = 2y$, il s'en suit $x_i > y_i > z_i$, $z_j > y_j < x_j$; Alors on peut vérifier que l'on a $t_1{}^i = s_2{}^i$, $t_1{}^j = s_1{}^j$ et $s_h{}^1 \neq s_k{}^1$ si $1 \in \{i, j\}$ et $h \neq k$, on en déduit $t_1 \notin S$ d'où $T \neq S$ c'est à dire l'hyperproduit n'est pas associatif.

3. On sait qu'un groupe abélien G peut être totalement ordonné si et seulement si G est sans torsion. [16]. Il suit alors qu'à un groupe abélien sans torsion on peut associer tant des *sd*-hypergroupes que des ordres totaux on peut y construire.

Définition. On appelle t-homorphisme de *sd-h.*, toute application $f: \mathcal{H}(G_1) \mapsto \mathcal{H}(G_2)$ telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{H}(G_1) \times \mathcal{H}(G_1)$, c'est à dire si on peut la déduire par un homomorphisme de groupes ordonnés.

On obtient alors par [21] le

Corollaire. À tout groupe abélien sans torsion de rang $g>1$, on peut associer $\alpha \geqslant \aleph$ *sd*-hypergroupes non t-isomorphes. Si $g=1$, il y a seulement deux hypergroupes associés et ils sont t-isomorphes entre eux ([1]).

4. Pour tout hypergroupe H, désignons par $N(H)$ le sous-hypergroupe réversible plus petit [19] ([2]); pour un *sd*-hypergroupe $\mathcal{H}(G)$, on a: $N(\mathcal{H}(G))=2G^+$.

On déduit alors de [2] la.

Proposition. Tout *sd*-hypergroupe H peut être plongé dans un *sd*-hypergroupe H^* tel que $N(H^*)=H^*$.

Soient maintenant $\mathcal{H}(G)$ un *sd*-hypergroupe, A l'algèbre semigroupe de G^+ sur un corps commutatif k, K le corps de fractions de A, A^* le semigroupe multiplicatif $A-\{0\}$ et de même pour k^* et K^*. Soient enfin $\mathcal{E}(K^*/k^*)$ l'anneau des endomorphismes du groupe abélien K^*/k^* et $C(\mathcal{E})$ son centre. Oon a alors le

Théorème. Les conditions suivantes sont équivalentes

a) $N(\mathcal{H}(G))=\mathcal{H}(G)$

b) $A^*/k^*=(A^*/k^*)^2$

c) Pour tout $C(\mathcal{E})-$ module libre L, $\Delta(L)$ est un $C(\mathcal{E})$-module libre· Il suffit de remarquer que l'élément 2 de l'anneau (K^*/k^*) est inversible si et seulementi si $G=2G$ et appliquer la prop. 1 pag. 59 de [6] d'où on obient des autres conditions équivalentes.

---

1) Si G est un groupe abélien sans torsion, on notera par $\mathcal{K}(G)$ la famille des *sd h.* associés a G pour tout ordre de G;

2) On rappelle que $N(H)$ est le plus petit sous-hypergroupe de H tel que $H/N(H)$ soit un groupe.

5. Si x est un élément d'un sd-hypergroupe $\mathcal{H}(G)$, désignons par $h(x)$ le plus petit sous-groupe de $\mathcal{H}(G)$ qui contient x, par (x) le sous-groupe de G engendré par x. et par 0 le sous-groupe $\{0\}$.

PROPOSITION. On a: $h(x) \cap h(y) \neq 0$ pour tout couple $(x, y) \in G^+ \times \times G^+$ si et seulement si $r(G)=1$.

Si on note par $n \circ x$ l'hyperproduit $x_1 \circ x_2 \circ \ldots x_n$ où $x_j = x$, $\forall j$, on a: $2n \circ x = \{2qx | 0 \leqslant q \leqslant n\}$, $(2n+1) \circ x = \{(2q+1)x | 0 \leqslant q \leqslant n\}$ d'où: $h(x) = (x)^+$. Si on suppose $h(x) \cap h(y) = 0$ on a: $((x)+(y)) \otimes Q = ((x) \otimes Q) \otimes ((y) \otimes Q)$, mais l'homomorphisme canonique $i : ((x)+(y) \otimes Q \rightarrow G \otimes Q$ est une injection, donc

$$r(G) = \dim . G \otimes Q \geqslant 2.$$

Vice-versa, supposons $r(G) \geqslant 2$. Alors: $G \otimes Q = V_1 \oplus V_2$ où V_1 et V_2 sont des espaces vectoriels sur Q et $\dim V_1 \geqslant 1$, $i \in \{1, 2\}$. Soient a, V_1, b, V_2, il existe $q \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $g_1 \in G$, $g_2 \in G$ tels que $a = g_1 \otimes \frac{1}{q}$, $b = g_2 \otimes \frac{1}{q}$. G sans torsion entraîne $(g_1) \cap (g_2) = 0$ et par conséquent ils existent deux elements de $\mathcal{H}(G)$, $x = |g_1|$, $y = |g_2|$ tels que $h(x) \cap h(y) = 0$.

6. REMARQUE. Si Gt est la categorie de groupes abéliens totalement ordonnés, et sd-$\mathcal{H}$ la categorie dont les objets sont les sd-hypergroupes et les morphismes, les homomorphismes d'hypergroupes, la fonction $h : Gt \rightarrow$ sd-$\mathcal{H}$ définie $h(G) = \mathcal{H}(G)$, est un foncteur bijectif sur Ob(Gt), il est un mono-epi-foncteur fidèle, mais il n'est pas une équivalence comme il s'en suit des exemples suivants.

(1) Soit $G_1 \times G_2$ le produit lexicographique des groupes G_1, G_2 et $p : \mathcal{H}(G_1 \times G_2) \rightarrow \mathcal{H}(G_2)$, soit définit $p((g_1, g_2)) = |g_2|$. On vérifie facilement $p(x \circ y) = p(x) \circ p(y)$, $\forall \{x, y\} \in \mathcal{H}(G_1 \times G_2)$, mais il n'est pas vrai en général que $p(x+y) = p(x) + p(y)$.

(2) Soit $f : \mathcal{H}(G_1 \times G_2) \mapsto \mathcal{H}(G_2 \times G_1)$ définit $f((g_1, g_2)) = (|g_2|, g_1(-1)^u)$ où $g_2 = |g_2|(-1)^u)$. Ici aussi on peut verifier qu'on a toujours $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ mais il existe évidemment $\{x, y\} \in \mathcal{H}(G_1 \times G_2)$ tels que $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$.

CHAPITRE II

Un problème se pose naturellement, c'est le suivant: trouver des conditions necessaires et suffisantes sur un ensemble H, pourqu'il soit un sd-hypergroupe. Examinons le:

Soit H un ensemble doué d'une loi multivoque du type

$$x \circ y = \{p(x,y),\ q(x,y)\}$$

où p et q sont deux fonctions qui satisfont aux conditions suivantes

(1) $p(x,y)=p(y,x) \quad \forall (x,y) \in H \times H$

(2) il existe un élément 0 dans H tel que $p(x,\ 0)=q(x,\ 0)=x$ $\forall x \in H$

(3) $q(x,x)=0 \quad \forall x \in H$

(4) $p(x,x)=0$ entraîne $x=0$

D) Si on pose $x<y \Leftrightarrow \forall u \in H,\ p(u,q(x,y))=q(p(u.\,y),x)$, soient verifiées:

(5) $\left.\begin{matrix} x<y \\ z<y \end{matrix}\right\}$ entraîne $\left\{\begin{matrix} \text{(a)}\ \ q(q(x,y),z)=q(x,q(y,z)) \\ \text{(b)}\ \ q(x,q(x,z))=q(p(x,z),y) \end{matrix}\right.$

(6) $x<y<z$ entraîne: $p(q(z,y),x)=q(z,q(y,x))$

(7) $\forall x \in H,\ \ \forall y \in H,\ \ \forall z \in H \quad p(x,p(y,z))=p(p(x,y),z)$

De (1), ... (7) on déduit plusieurs conséquences:

(1′) $0<x<x$, $\forall x \in H$. Il s'en suit immédiatement de (2), (D) et (5b)

(2′) si $x<y$, $q(x,\ y)=q(y,\ x)\cdot$ Il suffit de poser $u=0$ dans (D)

(3′) $x<y$ entraîne $x<p(y,\ z)$, $\forall z$

En effet:

(D) entraîne:

$$x<p(y,z) \Leftrightarrow p(u,q(x,p(y,z))=q(p(u,p(y,z)),x), \quad \forall u$$

et encore $q(x,p(y,z))=p(z,q(x,y))$; on en déduit

$$p(u,q(x,p(y,z)))=p(u,p(z,q(x,y)))=(\text{par } (7))=p(p(u,z),q(x,y));$$

d'autre part (7) et (D) impliquent

$$q(x,\ p(u,\ p(y,\ z)))=p(p(u,z),q(x,y))$$

(4′) $x<y$ entraîne $q(x,y)<y$

Il faut montrer que si $h=p(u,q(q(x,y)),y))$ et $k=q(p(u,y),q(x,y))$, on a $h=k$.

Par $(5a)$, $h=p(u,q(x,q(y,y)))=p(u,x)$

Par (6) et (3′), $k=p(q(p(u,y),y),x)=(\text{par } (D) \text{ et } (1'))$,

$$p(x,\ p(u,\ q(y,\ y)))=p(x,\ u)=h.$$

(5′) $x<y<z$ entraîne $x<z$.

Par hypothèse, $\forall u$, on a:

(i) $p(u,q(x,y))=q(p(u,y),x)$

$p(u,q(y,z))=q(p(u,z),y)$.

Soit $s=p(p(u,q(x,y))),p(u,q(y,z))$.

Par (7) on a: $s=p(u,p(u,p(q(x,y),q(y,z))))$ et on a aussi $q(x,y)<y$, $y<z$; on en déduit par (6): $p(q(x,y),q(y,z))=q(z,q(q(x,y),y))=(\text{par}$ $(5a))$, $=q(z,q(x,q(y,y)))=q(z,x)$. Il s'en suit $s=p(u,\ p(u,\ q(x,\ z))))$. De (i) on déduit aussi: $s=p(p(u,q(x,y)),\ q(y,p(u,z)))=(\text{par } (7))$, $=$ $=p(u,p(q\,(x,\ y)q(y,p(u,z))))$.

Mais (3′) et (4′) entraînent par (6) : $p(q(x,y),q(y,p(u,z)))=$ $=q(p(u,z),q(y,q(x,y)))=(\text{par } (5a)),=q(p(u,z)q(x,q(y,y)))=q(p(u,z),x)$; donc on a démontré $s=p(u,\ q(p(u,\ z),\ x))$.

Avant de conclure (5′), il nous faut prouver le suivant

LEMMA. $p(u,k)=p(u,h)$ entraîne $k=h$. En effet de l'hypothèse il s'en suit $q(p(u,k),u)=q(p(u,h),u))$, alors: $p(k,q(u,u))=p(h,q(u,u))$ donc $k=h$.

Du lemme et de l'identité: $p(u,p(u,q(x,z)))=p(u,q(p(u,z),x))$ on déduit enfin: $p(u,q(x,z))=q(p(u,z),x)$, $\forall u$, c'est à dire $x<z$.

(6') $x<y$ entraîne $p(x,z)<p(y,z)$, $\forall z$.

Soient $e=p(u,q(p(x,z),p(y,z)))$.
$f=q(p(u,p(y,z)),\ p(x,z))$. Il s'agit de démontrer $e=f$. De (3') il s'en suit $x<p(y,z)$ et $z<p(y,z)$; alors par (5*b*) on a:

$q(p(x,z),\ p(y,z))=q(x,\ q(p(y,z),z))=$(par (D))$=q(x,\ p(y,(z,z)))=q(x,y)$, donc: $e=p(u,\ q(x,y))=q(p(u,y),x)$. Voyons maintenant f. Par (7) $f=q(p(p(u,y),z),\ p(x,z))$. Posons $p(u,y)=k$. Par. (3') et (5') on a alors $x<p(k,z)$, $z<p(k,z)$. Il s'en suit par (5*b*)

$f=q(p(k,z),\ p(z,x))=q(x,\ q(p(k,z),z))=$par $(D)=q(x,\ p(k,\ q(z,z)))=$
$=q(x,k)=q(x,\ p(u,y))$.

(7') $x>y<z$ entraîne $p(q(x,y),z))=p(x,\ q(y,z))$.

De l'hypothèse $y<x$, il s'en suit par (D):

$p(q(x,y),z)=q(p(x,z),y)$ et de l'autre: $y<z$, on déduit $p(x,\ q(y,z))=$
$=q(p(x,z),y)$ d'où la thèse

(8') $x<y<z$ entraîne $q(x,y)<q(x,z)$. Soient $h=p(u,\ q(q(x,y),\ q(x,z)))$ et $k=q(p(u,\ q(x,z)),\ q(x,y))$. Il faut démontrer évidemment: $h=k$.

On a par (5*b*):

$q(q(x,y)q(x,z))=q(p(q(x,y),x),z)$. De (7') il s'en suit $p(x,\ q(x,y))=$
$=p(y,\ q(x,x))=y$ d'où $q(p(q(x,y),x),z)=q(x,z)$ et alors $h=$
$=p(u,q(y,z))=$(par (D)), $=q(p(u,z),y)$. Par (D) et (5'), on a: $p(u,q(x,z))=$
$=q(p(u,z),x)$ d'où $k=q(q(p(u,z),x),\ q(x,y))$. Posons $p(u,z)=s$, alors: $x<y<s$, $q(x,y)<y<s$, $h=q(s,y)$ et $k=q(q(s,x),\ q(x,y))$.

Par (6), $p(q(s,y),y)=q(s,\ q(y,y))=s$ d'où $s=p(h,y)$. Il s'en suit $k=q(q(p(h,y),x),\ q(x,y))$. Par (D) on a: $q(p(h,y),x)=p(h,\ q(x,y))$ d'où $k=q(p(h,\ q(x,y)),\ q(x,y))$. Si on pose $q(x,y)=t$ on a enfin: $k=q(p(h,t),t)=p(h,\ q(t,t))=h$.

(9′) $x<y<z$ entraîne $q(y, z)<q(x, z)$. Soient $g=p(u, q(q(y, z), q(x, z)))$, $f=q(p(u, q(x, z)), q(y, z))$.

L'hypothèse $y<z$, (4′) et (5*a*) entraînent $q(q(y, z), q(x, z))= =q(y,q(z, q(x, z)))$, mais par (6) on a $q(z, q(x, z))=p(x, q(z, z))=x$ d'où $g=p(u, q(x, y))$.

D'autre part $f=$(par (D)) $=q(q(p(u, z), x), q(y, z))=$(par (5*a*)), $= q(x, q(p(u, z), q(y, z))) = q(x, p(u, q(z, q(y, z)))) =$ (par (5*a*)), $=q(x, p(u, y)) = p(u, q(x, y))$, donc $f = g$.

(10′) La relation $<$ est antisymétrique donc est un ordre total. Supposons les hypothèses I: $x<y$, II: $x>y$ soient toutes les deux vérifiées.

On a alors, par (D) et I: $p(q(x, y), q(x, y))=q(p(q(x, y), y), x)= =$(par II et (7′))$=q(p(x, 0), x)=0$; il s'en suit par (4), $q(x, y)=0$. On en déduit: $y=p(y, q(x, y))=$(par II), $=q(p(x, y), y)=$(par 5*b*) et I), $=q(x, q(yy))=x$.

(11′) Si $x<y$, $z<y$, *on* a:

$$z>q(x, y) \Leftrightarrow x>q(y, z) \Leftrightarrow y<p(x, z).$$

Soit $x>q(y, z)$, il s'en suit par (6′), $p(x, z)>p(q(y, z), z)=$(par (7′)),$= p(y, q(z, z))=y$.

En outre, (D) entraîne: $q(x, p(x, z))=q(z, q(x, x))=z$, mais on a démontré $y<p(x, z)$, alors, par (9′), $z>q(x, y)$. Soit maitenant $z>q(x, y)$, il s'en suit: $p(x, z)>p(x, q(x, y))=$(par (7′)), $=p(q(x,x), y)=y$, d'où par (8′) on obtient $q(z, y)<q(z, p(z, x))=x$.

Soient maintenant H_1 una partie fermée par rapport aux lois p, q et totalement ordonnée de H. On peut démontrer qu'il y a un groupe abélien totalement ordonné G tel que $H_1=\mathcal{H}(G)$.

Soient K une copie de $H_1-\{0\}$ tel que $K\cap H_1=\Phi$ et φ une bijection de $H_1-\{0\}$ sur K; prolongeons φ à une permutation ψ de $H_1\cup K$ définie de la façon suivante: si $x\in H-\{0\}$, $\psi(x)=\varphi(x)$, $\psi(0)=0$, si $y\in K$, $\psi(y)=\varphi^{-1}(y)$. On veut douer $\tilde{H}_1=H_1\cup K$ d'une structure de groupe tel que $\mathcal{H}(\tilde{H}_1)=H_1$. Désignons par x', l'élément $\psi(x)$ pour tout $x\in\tilde{H}_1$. On prolonge l'ordre $<$ sur H_1, à un ordre sur $\tilde{H}_1$ en posant pour $\{x, y\}\subset K\cup\{0\}$

(0) $x<y \Leftrightarrow x'>y'$

Il s'en suit $x<0$, $\forall x \in K$, d'où

$$x<y, \ \forall (x, y) \in K \times H$$

On pose enfin pour $x \in H$, $y \in H$.

(S) $x+y=p(x+y)$, $x'+y'=(x+y)'$

si $x>y$, $x+y'=q(x, y)$;

si $x<y$, $x+y'=(x'+y)'$.

On va vérifier maintenant que par cett'opération, H_1 est un groupe abélien. On remarque d'abord que 0 est l'identité de $(\tilde{H}_1+)$ et que tout élément $x \in \tilde{H}_1$ a comme inverse x'.

Soit $\{x, y, z\} \subset H_1$.

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ descende tout de suite de (7).

2) $a=(x+y')+z=b=x+(y'+z)=c=(x+z)+y'$.

I) si $x>y<z$ on a: $a=b$ par (7'), $a=c$ par (D).

II) si $z<y<x$ on a: $a=c$ par (D),

$a=b$ par (4') et (5').

III$_1$) si $x<y>z$, $z<q(x, y)$, on a:

$a=(q(x, y))'+z=(q(q(x, y), z))'$.

$b=$(par (11')), $=(q(x, q(y, z)))'$ d'où, par ($5a$), $a=b$. Le même raisonnement et ($5b$) entraînent $b=c$.

III$_2$) si $x<y>z$, $z>q(x, y)$ on raisonne comme avant pour prouver $a=b$, $b=c$.

Les identités: $(x'+y)+z'=x'+(y+z')=(x'+z')+y$ et $(x'+y')+z'= =x'+(y'+z')$ descendent tout de souite des cas précédentes.

Pour montrer que H_1 est un groupe ordonné il reste à prouver, $\forall x \in \tilde{H}_1$, $\forall y \in \tilde{H}_1$, $\forall z \in \tilde{H}_1$, (e): $x<y$ entraîne $x+z<y+z$.

Il faut distinguer plusieurs cas

1) $x>0$, $y>0$, $z>0$ (e) découle de (6').

2) $x>0,\ y>0,\ z<0$.

a) $z'<x<y$, (e) découle de (8′).

b) $x<z'<y$, découle de $x+z<0<y+z$.

c) $x<y<z'$, il suffit de rappeler (0) et (9′).

3) $x<0,\ y>0,\ z>0$ on a: $x+z<z<y+z$.

4) $x<0,\ y<0,\ z>0$.

5) $x<0,\ y<0,\ z<0$.

4) et 5) sont ramenes par (0) aux cas 2) et 1).

Enfin, on vérifie tout de suite: $\mathcal{H}(\tilde{H}_1)=H_1$, donc H_1 est un sd-hypergroupe. D'autre part tout sd-hypergroupe est un ensemble satisfaisant (1), ..., (7) et totalement ordonné par rapport à $<$.

CHAPITRE III

1. On appelle hyperanneau un ensemble A doué d'une loi (notée $x \circ y$) d'hypergroupe commutatif et d'une opération multiplicative (notée $x \circ y$) satisfaisant les conditions suivantes:

1) $(ab)c=a(bc)$.

2) $a(b \circ c)=ab \circ ac$, $(b \circ c)a=ba \circ ca$ pour $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$. Soit $A(0)$ l'ensemble des identités de A.

Si $A-A(0)$ est un groupe par rapport au produit on dit que A est un hypercorps. Soit A un hyperanneau, on appelle hypermodule a gauche sur A la donnée d'n hypergroupe commutatif M et d'une opération extérieure (notée ax pour $a \in A$, $x \in M$) qui satisfait le conditions suivantes:

1) $a(x \circ y)=ax \circ ay$.

2) $(a \circ b)x=ax \circ bx$.

3) $(ab)x=a(bx)$. $\forall \{a, b\} \subset A$, $\forall \{x, y\} \subset M$

On vérifie sans difficulté la

PROPOSITION. Soient A un anneau totalement ordonné, M un A-module a gauche, totalement ordonné, $\mathcal{H}(A)$, et $\mathcal{H}(M)$ les hypergroupes associés aux structures additiles de A et M. Par rapport à l'hyperopération $x \circ y = \{x+y, \mid x-y \mid\}$ et respectivement au produit de A et à la multication extérieure $A \times M \rightarrow M$, $\mathcal{H}(A)$ est un hyperanneau, et $\mathcal{H}(M)$ est un $\mathcal{H}(A)$ -hypermodule. On dit que $\mathcal{H}(A)$ est un sd-hyperanneau et $\mathcal{H}(M)$ est un sd-hypermodule. On a de plus, que, tout sd-hypergroupe est un $\mathcal{H}(\boldsymbol{Z})$-hypermodule [1]).

2. Soit $\mathcal{H}(G_1)$ un sous-hypergroupe (d'où un sd-hypergroupe) d'un sd-hypergroupe $\mathcal{H}(G)$; $\mathcal{H}(G_1)$ est alors réversible comme sous-hypergroupe [7], et le quotient $\mathcal{H}(G)/\mathcal{H}(G_1)$ est un hypergroupe. Évidemment $\mathcal{H}(G)/\mathcal{H}(G_1)$ n'est pas en général un sd-hypergroupe.

PROPOSITION. $\mathcal{H}(G)/\mathcal{H}(G_1)$ est un *sd-h* si et seulement si G_1 est un sous-groupe convex de G.

On remarque d'abord que dans le quotient $\mathcal{H}(G)/\mathcal{H}(G_1)$, $x \circ G^+{}_1 = {}$ $= y \circ G^+{}_1$ dans les cas suivants:

$$(1)\ x \in y + G_1\,,\quad (2)\ x \in G^+{}_1 - y.$$

Si G_1 est convex et $x \notin G^+{}_1$, (2) ne peut pas exister. On en déduit $x \circ G^+{}_1 = x + G_1$, $\forall x \in G^+{}_1$, d'où on obtient que $\mathcal{H}(G)/(G_1)$ est un ensemble totalement ordonné:

$$x \circ G^+{}_1 > y \circ G^+{}_1 \Leftrightarrow x > y \Leftrightarrow \forall u \in (x \circ G^+{}_1), \qquad \forall v \in (y \circ G^+{}_1),\ u > v,$$

On a:

$$(x \circ G^+{}_1) \circ (y \circ G^+{}_1) = x \circ y \circ G^+{}_1 = \{x+y+G^+{}_1\,,\ \mid x-y \mid + G^+{}_1\} =$$
$$= \{x \circ G^+{}_1 + y \circ G^+{}_1\,,\ \mid x \circ G^+{}_1 - y \circ G^+{}_1 \mid\}$$

et par conséquent $\mathcal{H}(G)/\mathcal{H}(G_1) = \mathcal{H}(G/G_1)$.

---

[1]) La définition d'hyperanneau qu'on a donné, en vue de résultats ultérieurs, est plus générale, que celles, données par Krasner, Mittas (voir par exemple [18]) mais les sd-hyperanneaux vérifient aussi les conditions de Krasner.

Vice-versa si G_1 n'est pas convex, ils existent deux elements $g \in G^+{}_1$ $x \in G^+ - G^+ - G^+{}_1$ tels que $0 < x < g$, alors $g - x \in G^+$ et $(x \circ G^+{}_1) + (g-x) \circ G_1{}^+ = G_1{}^+$ c'est à dire $p(x \circ G_1{}^+, (g-x) \circ G_1{}^+) = 0$; où $x \circ G_1{}^+ \neq 0$; il s'en suit que $\mathcal{H}(G)/\mathcal{H}(G_1$ n'est pas un $sd-h$.

3. Voyons un cas interessant dans lequel la condition de convexité n'est pas vérifiée.

Proposition. A tout entier $n > 1$ on peut associer un hypergroupe $C(n)$ commutatif d'ordre $k+1$ où $k = \frac{n}{2}$ si n'est pair, $k = \frac{n-1}{2}$ si n est impair. On pose $C(n) = \mathcal{H}(\boldsymbol{Z})/\mathcal{H}(n\boldsymbol{Z})$, étudions en la structure. Soit $x = a \circ n\boldsymbol{Z}^+$, $a = hn + s$, $s < n$; évidemment $a \circ n\boldsymbol{Z}^+ = s \circ n\boldsymbol{Z}^+$, de plus si $s + t = n$, on a: $t \in s \circ n\boldsymbol{Z}^+$ d'où $s \circ n\boldsymbol{Z}^+ = t \circ n\boldsymbol{Z}^+$.

D'autre part si $n = 2k$, où $n = 2k+1$, $\{s, t\} \subset \{0, 1, 2, \ldots k\}$ et $s \neq t$, on trouve facilement $s \circ n\boldsymbol{Z}^+ \neq t \circ n\boldsymbol{Z}^+$. Donc $C(n) = \{0 \circ n\boldsymbol{Z}^+, 1 \circ n\boldsymbol{Z}^+, \ldots k \circ n\boldsymbol{Z}^+\}$.

Dans tous les cas $(s \circ n\boldsymbol{Z}^+) \circ (t \circ n\boldsymbol{Z}^+) = \{(s+t) \circ n\boldsymbol{Z}^+, |s-t| \circ n\boldsymbol{Z}^+\}$.

Si $s + t > k$,

$$(s+t) \circ n\boldsymbol{Z}^+ = (n - (s+t)) \circ n\boldsymbol{Z}^+.$$

On pourrait alors, écrire de la façon suivante

$$C(n) = \{e_0, e_1, e_2 \ldots e_k\}$$

pour $s \leqslant k$, $t \leqslant k$

$$e_s \circ e_t = \{e_\mu, e_\nu\}$$

où

$$\mu = \min \{s+t, n-(s+t)\}$$

$$\nu = |s-t|$$

On a obtenu une suite d'hypergroupes commutatifs finis dont aucun, sauf $C(1)$ et $G(2)$, n'est un groupe.

Remarque. $C(n)$ pourrait être definit aussi comme le quotient de $\boldsymbol{Z}^+$ par l'equivalence E: $xEy \Leftrightarrow x \in [(y + n\boldsymbol{Z}) \cup (-y + n\boldsymbol{Z})] \cap \boldsymbol{Z}^+$.

Par analogie on écrirà $C(\infty)$ au lieu de $\mathcal{H}(\boldsymbol{Z})$.

PROPOSITION. Si on pose dans $C(n), \bar{h}\bar{k}=\overline{hk}$ (où $\bar{h}=h \circ n\boldsymbol{Z}^+$) on lui donne une structure de sd-hyperanneau commutatif; de plus $C(n)$ est un hypercorps si et seulement si n est prime. Enfin si on pose $h\bar{k}=\overline{hk}$ on donne a $C(n)$, $\forall n$ une structure de $C(\infty)$-sd-hypermodule.

4. Si A est un anneau (ou un corps) on notera par $\mathcal{H}[A]$ la famille des sd-hyperanneaux (où des sd-hypercorps) qu'on peut associer à A pour tout ordre total de A. Du théorem de Artin-Schreier [1] on déduit:

COROLLAIRE. Soit F un corps commutatif, alors $\mathcal{H}[F]\neq\emptyset$ si et seulement si F est formellement réel. Soient A un domaine intègre, commutatif, Q son corps de fractions; alors on a le

COROLLAIRE. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) A contient au moins un cône symétrique S.

(2) $\mathcal{H}[A]\neq\emptyset$.

(3) $\mathcal{H}[Q]\neq\emptyset$.

(4) Il existe un idéal premier p de A tel que $\mathcal{H}[A/p]\neq\emptyset$.

Les equivalences $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$ s'en suivent tout de suite de [20], $(1)\Leftrightarrow(4)$ s'en suit de [12] e du suivant.

LEMME. Soit A un anneau totalement ordonné, I un ideal de A. Alors si I est convex, on a: $\mathcal{H}(A)/\mathcal{H}_{(I)}=\mathcal{H}(A/_I)$ (où l'ordre de $A/_I$ est induit par l'ordre de A), vice-versa si $\mathcal{H}(A)/\mathcal{H}_{(I)}$ est un sd-hyperanneau, I est convex et on a $\mathcal{H}(A)/\mathcal{H}_{(I)}=\mathcal{H}(A/_I)$.

COROLLAIRE. Soient X un espace discret de cardinalité $\alpha\geqslant\aleph_0 C(X)$ l'anneau des fonctions réelles continues sur X, doué de son ordre naturel.

Alors: (a) il existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $C(X)$ tel que $\mathcal{H}(C(X))/\mathcal{H}_{(\mathfrak{m})}$ soit un sd-hypercorps et sa cardinalité soit plus grande que α. De plus, (b) on a $\mathcal{H}[C(X)/_{\mathfrak{m}}]=\{\mathcal{H}(C(X))/\mathcal{H}_{(\mathfrak{m})}\}$.

(a) suit du théorème page 166 de [11], pour (b) il faut remarquer que $C(X)/_{\mathfrak{m}}$ est un corps réel fermé, donc il admet un seul ordre total.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN - SCHREIER: *Algebraische konstruktion reeller Körper,* Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5 (1926).

[2] BAER R.: *The subgroup of elements of finite order of an abelian subgroup,* Ann. Math. 37 (1936).

[3] BRUCK R.: *A survey of binary systems,* Springer (1958).

[4] CLIFFORD A. H.: *Partially ordered abelian groups,* Annals of Math. vol. 41, n. 3 (1940).

[5] CORSINI P.: *Sur les homomorphismes d'hypergroupes,* en preparation.

[6] CORSINI et MICALI: *Torsion dans les algèbres universelles,* Journ. of Math. Tokushima University, vol. 3 (1969).

[7] DRESHER and ORE: *Theory of multigroups,* Amer. J. Math. 60 (1938).

[8] DUBREIL P.: *Algèbre,* Gauthier Villars, Paris, 3 èmédition.

[9] EATON and ORE: *Remarks on multigroups,* Amer. J. Math. 62 (1940).

[10] FUCHS L.: *Partially ordered algebraic systems,* Pergamon Press (1963).

[11] GILLMAN and JERISON: *Rings of Continuous Functions,* Von Nostrand.

[12] KOHLS C. W. and REID J. O.: *Orders on commutative rings,* Duke Math. J. (1966).

[13] KOSKAS M.: *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes,* J. Math. pures et appl. 49 (1970).

[14] KRASNER M.: *La loi de Jordan-Holder dans génératrices des corps de nombres p-adiques,* Duke Math J., t. 6 (1940).

[15] KUNTZMAN J.: *Operations multiformes, Hypergroupes,* G. R. Acad. Sc., t. 204 (1937).

[16] LEVI F.: *Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen,* Rend. Palermo, t. 5 (1913).

[17] MARTY F.: *Sur une généralisation de la notion de groupe,* VIII Congres de Math. Scandinaves Stockholm (1934).

[18] MITTAS J.: *Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés,* G. R. Acad. Sc. t. 269 (1969).

[19] ORSATTI A.: *Equivalenze regolari a destra dentro un ipergruppo Sottogruppi F-reversibili,* Rend. Sem. Mat. Padova (1963).

[20] PIZZARELLO G.: *Prolungamenti di coni simmetrici su un dominio di integrità,* Rend. Istit. Mat. Trieste, II (1971).

[21] TEH H. H.: *Construction of orders in abelian groups,* Proc. Cambridge Philos. Soc., 57 (1961).

[22] WALL H. S.: *Hypergroups,* Amer, J. of Math. (1937).

[23] ZAPPA A.: *Sugli ipergruppi di corrispondenze ad indici limitati sopra una curva algebrica*, Ann. Mat. Pura e Appl., 20 (1941).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 maggio 1972.