RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

VALENTINO CRISTANTE

Iperalgebre dei gruppi abeliani localmente compatti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 48 (1972), p. 171-180

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__171_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 48 (1973)

IPERALGEBRE DEI GRUPPI ABELIANI LOCALMENTE COMPATTI

VALENTINO CRISTANTE *)

Sia G un gruppo compatto, ed $\mathfrak{R}$ (G) l'algebra delle funzioni rappresentative reali su G; allora $\mathfrak{R}$ (G) è ridotta e possiede un gauge: l'integrale di Haar normalizzato su G.

Queste due proprietà individuano, a meno di isomorfismi, una ed una sola iperalgebra nella classe di tutte quelle che ammettono G come gruppo canonicamente associato.

È noto infatti il seguente

TEOREMA (TANNAKA). Sia G un gruppo compatto (T_2); se con $\mathcal{G}(\mathfrak{R}(G))$ indichiamo il gruppo canonicamente associato ad $\mathfrak{R}(G))$, si ha $\mathcal{G}(\mathfrak{R}(G)) \cong G$. Viceversa sia A un'iperalgebra su $\boldsymbol{R}$ ridotta e con gauge. Se con $\mathcal{G}(A)$ indichiamo il gruppo canonicamente associato ad A, risulta $\mathcal{G}(A)$ compatto (con la topologia della convergenza semplice) e $\mathfrak{R}(\mathcal{G}(A)) \cong A$ (cfr. [3]).

Lo scopo del presente lavoro è di generalizzare il risultato di TANNAKA alla categoria dei gruppi abeliani localmente compatti. L'idea per la costruzione dell'iperalgebra di un gruppo a.l.c. prende le mosse dal ben noto teorema di struttura, secondo il quale, ogni gruppo a.l.c. G è estensione di un gruppo $H = V \times K$, dove V è gruppo vettoriale e K gruppo compatto, mediante un gruppo discreto (cfr. [1]). Precisamente una volta costruita l'iperalgebra di H, $\mathcal{H}(H)$, l'iperalgebra di G si ottiene

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Università - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

prolungando gli elementi di $\mathcal{H}(H)$ mediante i loro traslati sulle classi laterali di G modulo H.

Infine si caratterizza la categoria delle iperalgebre costruite, in modo tale che essa appaia come sovracategoria di quella delle iperalgebre ridotte e con gauge.

NOTAZIONI. Iper. Significherà sempre iperalgebra reale commutativa e cocommutativa. Se A è iper, con μ_A, i_A, $\boldsymbol{P}_A$, ε_A, ρ_A, indicheremo il prodotto, l'indentità, il coprodotto, la coidentità e l'inversione di A rispettivamente. Con $\mathcal{G}(A)$ indicheremo il gruppo canonicamente associato ad A, cioè l'insieme degli elementi invertibili canonici moltiplicativi del duale di A, munito della topologia della convergenza semplice. Se in A vi è una topologia determinata dal sistema fondamentale $\mathcal{U}$ di intorni dello O, indicheremo con $A \overline{\times} A$ il completamento di $A \otimes A$ nella topologia data dal sistema fondamentale d'intorni dello zero $\mathcal{V} = \{A \otimes U + V \otimes \otimes A : U,\ V \in \mathcal{U}\}$. In questo caso modificheremo la definizione di iper. sostituendo $A \otimes A$ *con* $A \overline{\times} A$ e richiedendo che le applicazioni siano continue.

1. In questo numero, in cui ci si occuperà delle iper. dei gruppi del tipo $V \times K$, con V vettoriale e K compatto, compariranno unicamente iper. discrete.

1.1. DEFINIZIONE. Sia A una $\boldsymbol{R}$-algebra; diremo che una iper. $B = A[X_1, \dots, X_n]$, $X_1, \dots, X_n$ indeterminante su$A$, è un'iper. di polinomi su A, se $\boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n]$ è sottoiper. di B.

1.2. PROPOSIZIONE. La categoria dei gruppi vettoriali è equivalente alla categoria delle algebre di polinomi su $\boldsymbol{R}$.

Dim. Sia V un gruppo vettoriale di dimensione n su $\boldsymbol{R}$, ed $A = \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n]$ l'iper. additiva usuale; è chiaro che $\mathcal{G}(A)$ è isomorfo algebricamente a V. Ora gli elementi di un sistema fondamentale di intorni di 0 in $\mathcal{G}(A)$ (si usa notazione additiva) sono gli $N(F, r)$, al variare di F nelle parti finite di A e di r nei reali positivi, definiti nel modo seguente:

$$N(F, r) = \{s : s \in \mathcal{G}(A),\ |s(f) - \varepsilon_A(f)| < r, \text{ per ogni } f \in F\}.$$

Ne consegue che la topologia di $\mathcal{G}(A)$ coincide con quella di V. Viceversa, sia $A=\boldsymbol{R}[X_1,\dots, X_n]$ un'iper.; per il teorema 3.3. di [2] risulta che $\mathcal{G}(A)$, in quanto varietà razionale, è prodotto di un gruppo vettoriale e di un gruppo logaritmico. In questo caso però la componente logaritmica manca dato che gli elementi trascendenti su $\boldsymbol{R}$ non sono invertibili. Ne consegue che A è generata su $\boldsymbol{R}$ dai suoi elementi canonici additivi; ciò basta per concludere.

1.3. Corollario. La categoria dei gruppi di tipo $V \times K$ è equivalente alla categoria delle iper. di polinomi su iper. ridotte e con gauge.

Dimostrazione. Notando che se A e B sono iper., allora $\mathcal{G}(A\otimes B)\cong\mathcal{G}(A)\times\mathcal{G}(B)$, si vede che il corollario è conseguenza di 1.2. e del teorema di Tannaka.

D'ora in avanti ci riferiremo all'iper. costruita in questo numero come all'iper. canonicamente associata a $V \times K$, e la indicheremo con $\mathcal{H}(V \times K)$.

2. Siano, $0\to V \times K\to G\to D\to 0$ un'estensione di $V \times K$ mediante il gruppo discreto D, $(\pi_\sigma)_{\sigma\in D}$ una sezione di G, ed $(\alpha_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in D\times D}$ *il* sistema di fattori ad essa associato. Ora partendo da $\mathcal{H}(V \times K)$ e da $(\alpha_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau)\in D\times D}$ costruiremo un'iper. B tale che $\mathcal{G}(B)\cong G$.

In questo numero useremo per i gruppi notazione moltiplicativa. Sia $A=\mathcal{H}(V \times K)$; poniamo $A_\sigma=A$ per ogni $\sigma\in D$, ed indichiamo con B e C rispettivamente gli $\boldsymbol{R}$-moduli $\prod_{\sigma\in D} A_\sigma$, e $\prod_{(\sigma,\tau)\in D\times D}(A_\sigma \times A_\tau)$, entrambi muniti della topologia prodotto.

Per atteggiare B ad iper. è essenziale il fatto seguente:

2.1. Proposizione. $B \mathbin{\overline{\times}} B\cong C$.

Dimostrazione. L'asserto è conseguenza dei fatti seguenti:

a) $\varphi: B\otimes B\to C$ definita da $\varphi((a_\sigma)_{\sigma\in D}\otimes(b_\sigma)_{\sigma\in D})=(a_\sigma\otimes b_\tau)_{(\sigma,\tau)\in D\times D}$ è iniettiva;

b) $\operatorname{im}\varphi$ è densa in C;

c) $\operatorname{im}\varphi$ con la topologia indotta è omeomorfa a $B\otimes B$;

d) C è completo;

i quali sono di verifica immediata.

Consideriamo ora le seguenti applicazioni $\boldsymbol{R}$-lineari, continue (su $\boldsymbol{R}$ si considera la topologia discreta):

i) $\mu : C \to B$ definita da $[\mu((a_\sigma \otimes b_\tau)_{(\sigma,\tau)\in D\times D})]_\eta = \mu_A(a_\eta \otimes b_\eta)$.

ii) $\boldsymbol{P} : B \to C$ definita da $[\boldsymbol{P}((a_\sigma)_{\sigma\in D})]_{(\tau,\rho)} = (\iota_A \otimes \alpha_{\tau,\rho})\boldsymbol{P}_A(a_{\tau\rho})$

iii) $i : \boldsymbol{R} \to B$ definita da $i((r))_\sigma = i_A(r)$.

iv) $\varepsilon : B \to \boldsymbol{R}$ definita da $\varepsilon((a_\sigma)_{\sigma\in D}) = \varepsilon_A(a_1)$.

v) $\rho : B \to B$ definita da $[\rho((a_\sigma)_{\sigma\in D})]_\tau = \rho_A(a_{\tau^{-1}})$.

vi) $\iota : B \to B$ definita da $\iota((a_\sigma)_{\sigma\in D}) = (a_\sigma)_{\sigma\in D}$.

2.2. PROPOSIZIONE. *B con le applicazioni appena definite è iper. Inoltre* $\mathcal{G}(B) \cong G$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda il primo asserto, basta verificare le seguenti eguaglianze:

1) $\mu(\iota \mathbin{\overline{\times}} \mu) = \mu(\mu \mathbin{\overline{\times}} \iota)$.

2) $\mu(i \otimes \iota) = \mu(\iota \otimes i) = \iota$.

3) $(\iota \mathbin{\overline{\times}} \boldsymbol{P})\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P} \mathbin{\overline{\times}} \iota)\boldsymbol{P}$.

4) $(\iota \mathbin{\overline{\times}} \varepsilon)\boldsymbol{P} = (\varepsilon \mathbin{\overline{\times}} \iota)\boldsymbol{P} = \iota$.

5) $\boldsymbol{P}\mu = (\mu \mathbin{\overline{\times}} \mu)(\iota \mathbin{\overline{\times}} sc \mathbin{\overline{\times}} \iota)(\boldsymbol{P} \mathbin{\overline{\times}} \boldsymbol{P})$.

6) $\boldsymbol{P}i = i \otimes i$.

7) $\varepsilon\mu = \varepsilon \mathbin{\overline{\times}} \varepsilon$.

8) $\varepsilon i = \iota_{\boldsymbol{R}}$

9) $\mu(\rho \mathbin{\overline{\times}} \iota)\boldsymbol{P} = \mu(\iota \otimes \rho)\boldsymbol{P} = i\varepsilon$.

Infatti 1, 2 dicono che (B, μ, i) *è* algebra; 3, 4 che $(B, \boldsymbol{P}, \varepsilon)$ è coalgebra; 5, 6 e 7, 8 che $\boldsymbol{P}$ ed ε sono omomorfismi di algebre; infine 9 dice che ρ è inversione.

Per semplificare i calcoli scegliamo la sezione col seguente criterio: $\pi_1 = 1$ e $\pi_{\sigma^{-1}} = \pi_\sigma^{-1}$; ne consegue allora che $\alpha_{1,\sigma} = \alpha_{\sigma,1} = \alpha_{\sigma,\sigma^{-1}} = 1$.

Se $b \in B$, indicheremo con b_σ la sua componente di indice σ. 1, 2, 6, 7, 8 sono di verifica immediata.

Verifica di 3: $((\iota \overline{\times} \boldsymbol{P})\boldsymbol{P}(b))_{(\sigma,\tau,\rho)}=(\iota_A\otimes(\iota_A\otimes\alpha_{\tau,\rho})\boldsymbol{P}_A)((\boldsymbol{P}b)_{\sigma,\tau\rho})=(\iota_A\otimes \otimes(\iota_A\otimes\alpha_{\tau,\rho})\boldsymbol{P}_A)(\iota_A\otimes\alpha_{\sigma,\tau\rho})\boldsymbol{P}_A(b_{\sigma\tau\rho})=(\iota_A\otimes\iota_A\otimes\alpha_{\tau,\rho}\alpha_{\sigma,\tau\rho})(\iota_A\otimes\boldsymbol{P}_A)\boldsymbol{P}_A(b_{\sigma\tau\rho})$; con passaggi analoghi si ottiene:

$$((\boldsymbol{P} \overline{\times} \iota)\boldsymbol{P}(b))_{(\sigma,\tau,\rho)}=(\alpha_{\sigma,\tau}\alpha_{\sigma\tau,\rho}\otimes\iota_A\otimes\iota_A)(\boldsymbol{P}_A\otimes\iota_A)\boldsymbol{P}_A(b_{\sigma\tau\rho});$$

da cui, tenendo conto che A è iper., ed $(\alpha_{\sigma,\tau})$ un sistema di fattori, l'uguaglianza dei due membri di 3.

Verifica di 4: $((\iota\otimes\varepsilon)\boldsymbol{P}(b))_\sigma=(\iota_A\otimes\varepsilon_A)((\boldsymbol{P}(b))_{(\sigma,1)})=(\iota_A\otimes\varepsilon_A)(\iota_A\otimes \otimes\alpha_{\sigma,1})\boldsymbol{P}_A(b_\sigma)=b_\sigma$ passaggi analoghi mostrano che anche il secondo membro è b_σ.

Verifica di 5: sia $c\in C$, $c_{(\sigma,\tau)}=b_\sigma\otimes b'_\tau$, e $sc: C\to C$ l'applicazione definita da $(sc(c))_{(\sigma,\tau)}=b'_\tau\otimes b_\sigma$; si ha

$$\boldsymbol{P}(\mu(c))_{(\sigma,\tau)}=(\iota_A\otimes\alpha_{\sigma,\tau})\boldsymbol{P}\mu_A(b_{\sigma\tau}\otimes b'_{\sigma\tau}),$$

$$(\mu \overline{\times} \mu)(\iota \overline{\times} sc \overline{\times} \iota)(\boldsymbol{P} \overline{\times} \boldsymbol{P})(c)=(\mu_A\otimes\mu_A)(\iota_A\otimes sc\otimes$$

$$\otimes\iota_A)((\boldsymbol{P} \overline{\times} \boldsymbol{P})(c))_{(\sigma,\tau,\sigma,\tau)}=(\mu_A\otimes\mu_A)(\iota_A\otimes sc\otimes\iota_A)((\iota_A\otimes\alpha_{\sigma,\tau})\boldsymbol{P}_A\otimes(\iota_A\otimes$$

$$\otimes\alpha_{\sigma,\tau})\boldsymbol{P}_A)(b_{\sigma\tau}\otimes b'_{\sigma\tau})=(\mu_A\otimes\mu_A)((\iota_A\otimes\iota_A)\otimes(\alpha_{\sigma,\tau}\otimes\alpha_{\sigma,\tau}))(\iota_A\otimes sc\otimes\iota_A)(\boldsymbol{P}_A\otimes$$

$$\otimes\boldsymbol{P}_A)(b_{\sigma\tau}\otimes b'_{\sigma\tau})=(\iota_A\otimes\alpha_{\sigma,\tau})(\mu_A\otimes\mu_A)(\iota_A\otimes sc\otimes\iota_A)(\boldsymbol{P}_A\otimes\boldsymbol{P}_A)(b_{\sigma\tau}\otimes b'_{\sigma\tau}).$$

Verifica di 9: si ha $(\mu(\rho \overline{\times} \iota)\boldsymbol{P}(b))_\sigma=\mu_A(((\rho \overline{\times} \iota)(\boldsymbol{P}(b))_{(\sigma,\sigma)})= =\mu_A(\rho_A\otimes\iota_A)((\boldsymbol{P}b)_{(\sigma^{-1},\sigma)})=\mu_A(\rho_A\otimes\iota_A)(\iota_A\otimes\alpha_{\sigma^{-1},\sigma})(\boldsymbol{P}_Ab_1)=i_A(\varepsilon_A(b_1))=i(\varepsilon(b))_\sigma$; quindi il primo e l'ultimo membro di 9 sono uguali. L'uguaglianza tra il secondo e l'ultimo si verifica in modo perfettamente analogo. Il primo asserto è ora completamente dimostrato.

Sia $(e_\sigma)_{\sigma\in D}$ la pseudo-A-base canonica di B, relativamente alla scomposizione $B=\Pi A_\sigma$. Vogliamo, per prima cosa, mostrare che per ogni $s\in\mathcal{G}(B)$ esiste $\tau\in D$ tale che $s(b)=s(e_\tau b)$ per ogni $b\in B$. Dato che s è continua, ed in $\boldsymbol{R}$ vi è la topologia discreta, esiste un sottoinsieme finito $D'\subseteq D$ tale che $s(e_\tau b)=0$ se $\tau\notin D'$. Ne consegue che $s(b)=\sum_{\tau\in D'} s(e_\tau b)$. Supponiamo ora che esista $\tau\in D$ tale che $s(e_\tau b)\neq 0$; allora, tenuto conto che $e_\sigma e_\tau=\delta_{\sigma,\tau}$, risulta $s(e_\sigma b)=0$ se $\sigma\neq\tau$.

Definiamo per ogni $\tau\in D$ l'insieme $E_\tau=\{s: s(b)=s(e_\tau b)$ per ogni $b\in B\}$ ed indichiamo con ι_τ la biiezione naturale di E_τ su E_1.

E_1 in base alle osservazioni precedenti è un sottogruppo aperto di $\mathcal{G}(B)$ isomorfo a $\mathcal{G}(A)$; quindi per 1.3. isomorfo a $V \times K$.

Identifichiamo E_1 con $V \times K$, e definiamo $\varphi : \mathcal{G}(B) \to G$ mediante $\varphi(s) = \Pi_\sigma \iota_\sigma(s)$, se $s \in E_\sigma$. Le osservazioni precedenti mostrano che φ è un'applicazione biiettiva che estende la precedente identificazione. Siano ora $s_1 \in E_\sigma$, $s_2 \in E_\tau$, $b = \sum_{\sigma \in D} e_\sigma b_\sigma \in B$; si ha $(s_1 s_2)b = (s_1 \overline{\times} s_2)\boldsymbol{P}b = (s_1 \overline{\times} s_2)(\mu \overline{\times} \overline{\times}\, \mu)((e_\sigma \otimes e_\tau) \overline{\times}\, \boldsymbol{P}b) = (\iota_\sigma(s_1) \otimes \iota_\tau(s_2))(\iota \otimes \alpha_{\sigma,\tau})\boldsymbol{P}(b_{\sigma\tau})$; quindi $(s_1 s_2)b = (\iota_\sigma(s_1)\iota_\tau(s_2)\alpha_{\sigma,\tau})(b_{\sigma\tau})$; da cui $\iota_{\sigma\tau}(s_1 s_2) = \alpha_{\sigma,\tau}\iota_\sigma(s_1)\iota_\tau(s_2)$, ed infine $\varphi(s_1 s_2) = \pi_{\sigma\tau}\alpha_{\sigma,\tau}\iota_\sigma(s_1)\iota_\tau(s_2 = \varphi(s_1)\varphi(s_2)$.

L'applicazione φ è dunque isomorfismo di gruppi topologici.

C.V.D.

D'ora in avanti indicheremo con $\mathcal{H}(G)$ l'iper. costruita.

È chiaro che $J = \prod_{\substack{\sigma \in D \\ \sigma \neq 1}} A$ è biideale di $\mathcal{H}(G)$ e che $\mathcal{H}(G) = A_1 \oplus J$, la somma essendo ortogonale. Questa proprietà, insieme con la completezza, caratterizza la categoria delle iper. di 2.2.

2.3. Proposizione. Sia B un'iper. che ammette la seguente decomposizione ortogonale: $A \oplus J = B$, con J biideale.

Allor $G' = \{s : s \in \mathcal{G}(B),\ s(j) = o$ per ogni $j \in J\}$ è sottogruppo aperto (e chiuso) di $\mathcal{G}(B)$ isomorfo a $\mathcal{G}(A)$.

Dimostrazione. È noto che G' è sottogruppo di$\mathcal{G}(B)$, isomorfo a $\mathcal{G}(B/J)$.

Rimane da dimostrare che G' è aperto.

Scegliamo $b \in A$ tale che $\varepsilon_A(b) = r > o$; allora $s \in N(b^2, r^2)$ implica $s(b) \neq o$. Ora qualunque sia $j \in J$ risulta $bj = o$, e quindi $s(j) = o$.

Da 2.3. ed 1.3. segue

2.4. Corollario. Se B soddisfa le ipotesi di 2.3. ed inoltre B/J è isomorfa all'iper. di polinomi $\mathcal{R}(K)[X_1, \ldots, X_n]$ per qualche gruppo compatto K e qualche naturale n, allora $\mathcal{G}(B)$ è localmente compatto.

Se D è un insieme ed A un'algebra, le scritture $\bigoplus_{\sigma \in D} A_\sigma$ e $\prod_{\sigma \in D} A_\sigma$ indicano le algebre somma e prodotto ortogonale rispettivamente; esse sottointendono $A_\sigma = A$ per ogni $\sigma \in D$.

2.5. PROPOSIZIONE. Se B soddisfa le ipotesi di 2.4. ed inoltre è ridotta, allora esistono un insieme D e due iniezioni di algebre $\varphi_1 : \bigoplus_{\sigma\in D} A \to B$ e $\varphi_2 : B \to \prod_{\sigma\in D} A_\sigma$, tali che $\varphi_2\varphi_1$ sia l'immersione canonica.

DIMOSTRAZIONE. Se $b\in B$, indicheremo con b_1 la sua proiezione in A.

Per 2.4., $\mathcal{G}(B)$ è estensione di $\mathcal{G}(A)$ tramite un gruppo discreto D. Sia $(\pi_\sigma)_{\sigma\in D}$ una sezione di $\mathcal{G}(B)$; allora risulta che $s((\iota_B\otimes\pi_{\sigma^{-1}})\boldsymbol{P}b_1)= =o$ se $s\notin\pi_\sigma\mathcal{G}(A)$. Ora per un qualunque sottoinsieme finito $D'\subseteq D$ ed una qualunque famiglia $(b_\sigma)_{\sigma\in D'}$ di elementi di A, definiamo l'elemento c di B nel modo seguente: $c_\sigma=(\iota_A\otimes\pi_{\sigma^{-1}})\boldsymbol{P}_A(b_\sigma)$ se $\sigma\in D'$, $c_\sigma=o$ se $\sigma\notin D'$. Tenendo conto che A è ridotta si vede che l'applicazione così ottenuta è iniettiva. Essa è la φ_1 dell'enunciato.

La φ_2 si definisce nel modo seguente:

$$(\varphi_2(b))_\sigma=(\iota\otimes\pi_{\sigma^{-1}})\boldsymbol{P}((\iota\,\overline{\times}\,\pi_\sigma)\boldsymbol{P}(b))_1\,.$$

Ragionamenti analoghi al precedente mostrano che φ_2 è iniettiva. Che $\varphi_2\varphi_1$ sia l'immersione canonica è immediato. C.V.D.

La 2.5 mostra che le iper. che soddisfano 2.4, posseggono una topologia naturale: quella indotta dalla topologia prodotto di ΠA_σ. È con riferimento a questa che per esse si parla di completezza.

2.6. PROPOSIZIONE. Sia B un'iper. che soddisfa le ipotesi di 2.5; se B è completa si ha $\mathcal{H}(G(B))\cong B$.

DIMOSTRAZIONE. Per 2.5, la completezza implica che come algebra B è isomorfa a ΠA_σ, l'isomorfismo essendo il φ_2 di 2.5.

D'altra parte $\mathcal{H}(G(B))$ è la ΠA_σ con le applicazioni definite dalla 2.2. Il φ_2 si può scrivere più brevemente in questo modo:

$$\varphi_2(b)=(b_\sigma)_{\sigma\in D}\,,$$

b_σ essendo determinato da $\Pi_\sigma s(b)=s(b_\sigma)$ per ogni $s\in\mathcal{G}(A)$. Ora $\varphi_2\,|_A$ è isomorfismo di iper. tra A e A_1; dunque per conoscere $b\in B$, basta conoscere $\Pi_\sigma s(b)$, per ogni $\sigma\in D$ ed ogni $s\in\mathcal{G}(A)$. Così da $(s_1\otimes s_2)((\varphi_2\,\overline{\times}\,\varphi_2)\boldsymbol{P}b)_{(\sigma,\tau)}= =(\pi_\sigma s_1\,\overline{\times}\,\pi_\tau s_2)\boldsymbol{P}b=(\alpha_{\sigma,\tau}s_1s_2)b_{\sigma\tau}=(s_1\otimes s_2)(\iota_A\otimes t_{\alpha_{\sigma,\tau}})\boldsymbol{P}b_{\sigma\tau}$, (qui si è scritto $t_{\alpha\sigma,\tau}$ per indicare la traslazione tramite $\alpha_{\sigma,\tau}$ e con confonderla con l'omomorfismo) si ha che$(\varphi_2 \overline{\times} \varphi_2)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\varphi_2$. Rimarrebbe da verificare che φ_2 commuta con ε, oppure con ρ, ma ciò è immediato. C.V.D.

La 2.6 insieme al secondo asserto di 2.2 dà il risultato voluto: Sia G un gruppo abeliano localmente compatto; allora $\mathcal{G}(\mathcal{H})(G)) \cong G$.

Viceversa se B è un'iper. su $\boldsymbol{R}$ che ammette una decomposizione ortogonale del tipo $B = A \oplus J$ con J biideale e B/J iper. di polinomi su un'iper. ridotta e con gauge, allora $\mathcal{G}(B)$ è localmente compatto. Se inoltre B è ridotta e completa $\mathcal{H}(\mathcal{G}(B) \cong B$.

APPENDICE *)

In questa appendice vogliamo dare una dimostrazione diretta di quella parte della prop. 1.2. che richiedeva il teorema 3.3 di [2].

Premesse:

$\boldsymbol{Q}$ = corpo dei razionali; $\boldsymbol{N}$ = monoide degli interi non negativi; $\boldsymbol{N}^n = \{(m_1, ..., m_n) \mid m_i \in \boldsymbol{N}\}$ con la struttura di monoide libero commutativo; $\{z_1, ..., z_n\}$ = base canonica di $\boldsymbol{N}^n$.

Se $l = (l_1, ..., l_n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \boldsymbol{N}^n$, definiamo $|m| = \sum_{1=i}^{n} m_i$; $m < l$, se $m_i \leqslant l_i$ per ogni i e $m_i < l_i$ per qualche i; se $m \leqslant l$, $\binom{l}{m} = \prod_{1=i}^{n} \binom{l_i}{m_i}$; se $t_1, ..., t_n$ sono lettere, $t^m = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$.

Sia A un'algebra, $x_1, ..., x_n$ indeterminante su A; diremo che $R = A[x_1, ..., x_n]$($L = A[x_1, ..., x_n]$) è un'iperalgebra di polinomi (una iperalgebra locale) di dimensione n, se l'algebra soggiacente è l'algebra dei polinomi (è l'algebra delle serie formali).

Le topologie su R ed L sono quelle lineari usuali.

TEOREMA. Sia A una $\boldsymbol{Q}$-algebra, $R = A[x_1, ..., x_n]$ una A-*iper*-algebra di polinomi cocommutativa di dimensione n; allora se $L = A\{y_1, ..., y_n]$ è l'iperalgebra locale additiva, esiste un isomorfismo (di iperalgebre) tra L e la duale D di R.

*) Aggiunta il 3 novembre 1972.

DIMOSTRAZIONE. Sia $P_R x_i = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \sum_{1<|h|<m_i} a_{i,h,k} x^h \otimes x^k$, e sia $m = \sup(m_1, \ldots, m_n)$. Indichiamo con $(d_k)_{k \in N^n}$ la pseudobase di D definita da $d_k \circ x^h = \delta_{h,k}$. Risulta allora:

$$\text{i)} \qquad \mu_D(d_k \mathbin{\overline{\times}} d_h) = \binom{k+h}{h} d_{k+h} + \sum_{\substack{l<k+h \\ |l| \geq |k+h|/m}} b_{l,k,h} d_l ,$$

ove $b_{l,h,k} \in A$.

Consideriamo ora la seguente applicazione a valori in D definita sulla pseudobase $(y^k)_{k \in N^n}$ di L:

$$y^k \to \mu_D^{n-1}(d_{z_1}^{k_1} \mathbin{\overline{\times}} \ldots \mathbin{\overline{\times}} d_{z_n}^{k_n}), \text{ per ogni } k \in \boldsymbol{N}^n.$$

La i) e facili considerazioni induttive, mostrano che

$$\mu_D^{n-1}(d_{z_1}^{k_1} \mathbin{\overline{\times}} \ldots \mathbin{\overline{\times}} d_{z_n}^{k_n}) = u_k d_k + \sum_{\substack{l<k \\ l \geq M_k}} b_{k,l} d_l ,$$

ove u_k è unità in A, $b_{k,l} \in A$, ed M_k è un intero positivo tale che la successione $(M_k)_{k \in N^n}$ diverge al divergere di $|k|$.

Queste proprietà bastano per poter asserire che $\mu_D^{n-1}(d_{z_1}^{k_1} \mathbin{\overline{\times}} \ldots \mathbin{\overline{\times}} d_{z_n}^{k_n})$ è pseudobase di D. L'applicazione appena definita è quindi estensibile ad una applicazione φ di L su D; φ isomorfismo di A-moduli linearmente compatti. Ora che φ sia isomorfismo di algebre discende dalla sua definizione stessa.

Mostriamo infine che

$$\text{ii)} \qquad \boldsymbol{P}_D \varphi(y^k) = (\varphi \mathbin{\overline{\times}} \varphi) \boldsymbol{P}_L(y^k).$$

La cosa è chiara per $|k| = 1$, perchè sia y_i che d_{z_i} sono canonici additivi. Conviene dunque procedere per induzione su $|k|$. Supponiamo vera ii) per ogni k tale che $|k| = n$; sia h tale che $|h| = n+1$, ed i tale che $y^h = \mu_L(y^{h-z_i} \mathbin{\overline{\times}} y_i)$; risulta:

$$\boldsymbol{P}_D \varphi(y^h) = \boldsymbol{P}_D \varphi(\mu_L(y^{h-z_i} \mathbin{\overline{\times}} y_i) = \boldsymbol{P}_D(\mu_D(\varphi(y^{h-z_i}) \mathbin{\overline{\times}} d_{z_i})) =$$

$$(\mu_D \mathbin{\overline{\times}} \mu_D)(\iota \mathbin{\overline{\times}} sc \mathbin{\overline{\times}} \iota)((\boldsymbol{P}_D(\varphi(y^{h-z_i}) \mathbin{\overline{\times}} \boldsymbol{P}_D d_z) = \text{(per ipotesi induttiva)}$$

$$=(\varphi \overline{\times} \varphi)(\mu_L \overline{\times} \mu_L)(\iota \overline{\times} sc \overline{\times} \iota)(\boldsymbol{P}_L(y^{h-z_i}) \overline{\times} \boldsymbol{P}_L y_i)=$$
$$=(\varphi \overline{\times} \varphi)\boldsymbol{P}_L\mu_L(y^{h-z_i} \overline{\times} y_i)=(\varphi \overline{\times} \varphi)\boldsymbol{P}_L(y^h).$$

Le altre verifiche sono pressochè immediate, C.V.D.

COROLLARIO. Sia A una Q-algebra; allora ogni A-iperalgebra di polinomi cocommutativa è additiva.

DIM. Ovvia.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. WEIL: *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications*, II edit., Paris 1965.

[2] I. BARSOTTI: *Structure theorems for group-varieties* (Ann. Mat. Pura e Appl., 38, p. 77).

[3] G. HOCHSCHILD: *The structure of Lie groups*, San Francisco, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 maggio 1972.