

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO TROILO

Una classe di moti dinamicamente possibili per il corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 48 (1972), p. 15-22

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__15_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNA CLASSE DI MOTI DINAMICAMENTE POSSIBILI
PER IL CORPO RIGIDO SOGGETTO
A FORZE DI POTENZA NULLA

RENATO TROILO *)

Il problema dinamico del moto, attorno a un suo punto, O , fisso o coincidente con il baricentro, di un corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla non è, in generale, riconducibile alle quadrature. Lo studio di tale problema si è quindi indirizzato verso la ricerca di movimenti suscettibili di certe caratterizzazioni cinematiche¹.

Di recente mi sono occupato di una classe di precessioni generalizzate provandone l'impossibilità dinamica². In questa nota considero un tipo di precessioni generalizzate di vettore $\sigma\omega$ ³ (che dirò semiregolari), provo che sono dinamicamente possibili e ne determino l'intera classe.

1. Il problema dinamico della determinazione di movimenti di un solido pesante asimmetrico \mathcal{C} attorno a un suo punto fisso (costituente vincolo liscio) oppure coincidente col baricentro, soggetto a forze di potenza nulla, si traduce nella determinazione di soluzioni del sistema⁴

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Università - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova. Lavoro svolto nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

¹) Ad es. in [2] si sono determinate tutte le possibili rotazioni (che risultano necessariamente uniformi) e si è provata l'impossibilità dinamica di precessioni regolari. In [3] si è invece provata la possibilità dinamica di precessioni semiregolari e se ne è individuata una speciale classe. Altre caratterizzazioni cinematiche vengono presupposte in [1] e in [5].

²) Cfr. [7].

³) Con $\sigma\omega$ viene indicato il momento delle quantità di moto rispetto al punto O .

⁴) Cfr. [2], 2.

$$(1) \quad \sigma\omega + \omega \times \sigma\omega = \omega \times \lambda H - 2\omega \times \sigma H,$$

dove ω è la velocità angolare, σ indica la matrice d'inerzia rispetto a O , λ il suo invariante lineare e H il vettore costante da cui derivano le forze di potenza nulla⁵. Data l'invariabilità di H , accanto alla (1), si ha

$$(2) \quad \dot{H} + \omega \times H = 0$$

sussiste inoltre l'integrale dell'energia

$$\sigma\omega \cdot \omega = 2E_0.$$

In questa nota verranno determinati (trascurando il caso che \mathcal{C} abbia struttura giroscopica rispetto al punto O) tutti i moti di *precessione*⁶ *generalizzata* semiregolare di vettore $\sigma\omega$, ovverosia i moti per i quali si ha

$$(3) \quad \sigma\omega = \alpha c + \beta k,$$

essendo c e k versori, rispettivamente, fisso e solidale, α costante non nulla⁷ e $\beta \neq 0$.

2. Si fissi la terna solidale \mathcal{T} ($0, i_1, i_2, i_3$) in modo tale che il suo terzo asse sia parallelo a k e che, come è sempre possibile, la matrice d'inerzia risulti espressa da

$$(4) \quad \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}, \text{ con } B \geq A.$$

⁵) Sollecitazioni di questo tipo si incontrano nello studio del moto di un solido soggetto a forze centrifughe composte o anche a forze di Lorentz, in questo ultimo caso l'equazione (1) esprime il teorema del momento delle quantità di moto solo in corrispondenza a speciali distribuzioni delle cariche elettriche su \mathcal{C} .

⁶) Per l'introduzione generale allo studio delle precessioni generalizzate cfr. [4].

⁷) Risulta evidente che se $\alpha=0$ il moto è rotatorio, tale caso verrà, nel seguito, sistematicamente escluso.

Continuando a indicare con β lo scalare che compare nella espressione (3) quando a \mathbf{k} si sostituisca $\dot{\mathbf{i}}_3$:

$$(3') \quad \sigma \boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{c} + \beta \dot{\mathbf{i}}_3,$$

l'equazione (1) si scrive

$$(5) \quad \dot{\beta} \dot{\mathbf{i}}_3 + \beta \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{i}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times (\lambda - 2\sigma) \mathbf{H},$$

essendo

$$(6) \quad \lambda - 2\sigma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 2B' \\ 0 & a_2 & 2A' \\ 2B' & 2A' & a_3 \end{bmatrix}$$

con

$$(7) \quad a_1 = -A + B + C, \quad a_2 = A - B + C, \quad a_3 = A + B - C.$$

Dalla (5), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$, si ha

$$\dot{\beta} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{i}}_3 = \dot{\beta} w_3 = 0,$$

quest'ultima relazione, se si vogliono considerare precessioni generalizzate *effettivamente* semiregolari ($\dot{\beta} \neq 0$), fornisce

$$(8) \quad w_3 = 0.$$

Di conseguenza, tenuto conto di (6) e (7), la (5), per proiezione sugli assi della terna \mathcal{T} , fornisce:

$$(9) \quad \begin{aligned} \beta w_i &= w_i [2B'H_1 + 2A'H_2 + a_3 H_3] & (i=1, 2), \\ \dot{\beta} &= w_1 [a_2 H_2 + 2A'H_3] - w_2 [a_1 H_1 + 2B'H_3]. \end{aligned}$$

Dalla prima o dalla seconda delle (9) segue per derivazione, e tenuto conto delle (2),

$$\dot{\beta} = 2(A'w_1 - B'w_2)H_3 + a_3(H_1w_2 - H_2w_1).$$

Dal confronto di quest'ultima con la terza delle (9), si deduce

$$(10) \quad (a_1 + a_3)H_1 w_2 = (a_2 + a_3)H_2 w_1,$$

ossia, ricordando le (7),

$$(10)' \quad Bw_2 H_1 - Aw_1 H_2 = 0.$$

La (10)', tenuto conto della (8), può scriversi nel modo seguente

$$\sigma \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{i}}_3 = 0,$$

e quindi, accanto alla (4)', risulta

$$(11) \quad \sigma \boldsymbol{w} = \alpha' \boldsymbol{H} + \beta' \dot{\boldsymbol{i}}_3.$$

Ricordando la (8), dalla precedente si ottiene

$$(12) \quad \sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} = \alpha' \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{w} = 2E_0,$$

mentre l'equazione del momento delle quantità di moto, facendo uso della (11), diventa

$$\dot{\alpha}' \boldsymbol{H} + \beta' \dot{\boldsymbol{i}}_3 + \beta' \boldsymbol{w} \times \dot{\boldsymbol{i}}_3 = \boldsymbol{w} \times (\lambda - 26) \boldsymbol{H},$$

da cui, moltiplicando scalarmente per \boldsymbol{w} , si ottiene

$$(13) \quad \dot{\alpha}' \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{w} = 0.$$

Dalla (12) e dalla (13) si deduce quindi ⁸

$$(14) \quad \alpha' = \text{cost} \neq 0, \quad \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{w} = \frac{2E_0}{\alpha'}.$$

Vale quindi il seguente teorema:

I. *Ogni precessione generalizzata effettivamente semiregolare di*

⁸) $\alpha' \neq 0$, in caso contrario dalla (12) seguirebbe $E_0 = 0$.

vettore $\sigma\omega$ ha asse di precessione parallelo a \mathbf{H} , ossia nella (3)', si può ritenere

$$\mathbf{c} = \text{vers } \mathbf{H}$$

3. Tenuto conto di quanto ora provato, dalla (11) segue

$$(15) \quad w_1 = \frac{\alpha'}{A} H_1, \quad w_2 = \frac{\alpha'}{B} H_2.$$

Mediante le (15), la (2), per proiezione sugli assi fornisce

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{H}_1 = -\frac{\alpha'}{B} H_2 H_3, \\ \dot{H}_2 = \frac{\alpha'}{A} H_1 H_3, \\ \dot{H}_3 = \frac{\alpha'}{AB} (A-B) H_1 H_2. \end{cases}$$

Da (16) si ottiene facilmente

$$(17) \quad \begin{cases} H_1 = c_1 \text{cn} \frac{\alpha' c_3}{\sqrt{AB}} (t - c_2), \\ H_2 = c_1 \sqrt{\frac{B}{A}} \text{sn} \frac{\alpha' c_3}{\sqrt{AB}} (t - c_2), \\ H_3 = c_3 \text{dn} \frac{\alpha' c_3}{\sqrt{AB}} (t - c_2), \end{cases}$$

dove c_1, c_2, c_3 sono costanti d'integrazione da determinarsi in base alle condizioni iniziali e

$$(18) \quad K = \left| \frac{c_1}{c_3} \right| \sqrt{\frac{B-A}{A}}$$

esprime il modulo delle funzioni ellittiche⁹ (17).

Osservazione

Si esclude il caso $A=B$ in quanto in corrispondenza ad esso, stanti (16) e (15), risulta

$$H_3 = \text{cost}, \quad w_1^2 + w_2^2 = \frac{\alpha'}{A^2} (H_1^2 + H_2^2) = \text{cost},$$

ricordando, inoltre, che $w_3=0$, si deduce subito che si tratta di moti di precessione regolare¹⁰ e tali moti non sono dinamicamente possibili se, come si è assunto, \mathcal{C} è asimmetrico (Cfr. nota¹).

4. La (1), ricordando le (8) e le (15), si traduce nell'unica equazione

$$(19) \quad (\alpha' + a_3)H_3 + \frac{A'}{B} (2A + \alpha')H_2 + \frac{B'}{A} (2B + \alpha')H_1 = 0,$$

che risulta soddisfatta identicamente nei seguenti casi:

CASO I

$$(20) \quad \alpha' = -a_3, \quad A' = B' = 0,$$

⁹) È chiaro che, la condizione $0 \leq K < 1$ si traduce, in base alla (18), in una condizione sui valori iniziali di H_1, H_2, H_3 . Se tale condizione non è verificata si fa ricorso a soluzioni del tipo

$$(17') \quad \begin{cases} H_1 = c_1 \text{dna}'(t - c_2), \\ H_2 = R \text{sna}'(t - c_2), \\ H_3 = c_3 \text{cna}'(t - c_2), \end{cases}$$

con tale scelta risulta facilmente che il modulo K' delle funzioni ellittiche (17') risulta

$$K' = \left| \frac{c_3}{c_1} \right| \sqrt{\frac{A}{B-A}} = \frac{1}{K}$$

¹⁰) Cfr. [6], 4.

in tal caso si ha, ricordando le (15) e la (8),

$$(21) \quad w_1 = \frac{C-B-A}{A} H_1, \quad w_2 = \frac{C-B-A}{A} H_2, \quad w_3 = 0,$$

con H_1, H_2, H_3 forniti dalle (17) e risulta

$$\sigma\omega = (C-B-A)(\mathbf{H} - H_3\mathbf{i}_3).$$

CASO II

$$(22) \quad A' = 0, \quad B' \neq 0, \quad B = C + A^{11}),$$

in tal caso si ha

$$(23) \quad w_1 = -2H_1, \quad w_2 = \frac{2A}{B} H_2, \quad w_3 = 0.$$

È sufficiente ricordare le (17) per concludere che i casi precedenti sono i soli in cui la (19) risulta identicamente soddisfatta.

Riassumendo i risultati di questo n. e ricordando il Teorema I, si può concludere

II. Per \mathcal{C} sono dinamicamente possibili moti di precessione generalizzata effettivamente semiregolare di vettore $\sigma\omega$; essi hanno asse di precessione parallelo ad \mathbf{H} e la loro classe è costituita da tutti e soli i movimenti forniti dalle (21), (23) e (17).

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BENTSİK: *Una classe di moti del corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XXIX (1959).
 [2] G. GRIOLI: *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XXVII (1957).

¹¹⁾ Si esclude il caso $A' \neq 0, B' = 0$ in quanto risulterebbe $A = B + C$ contrariamente all'ipotesi $B \geq A$.

- [3] G. GRIOLI: *Movimenti dinamicamente possibili per un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Atti Acc. dei Lincei, vol. XXII, S. VIII (1957).
- [4] G. GRIOLI: *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, Atti Acc. dei Lincei, vol. XXXV, S. VIII (1963).
- [5] C. TOTARO: *Su una particolare classe di movimenti di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Atti Acc. dei Lincei, vol. XL, S. VIII (1966).
- [6] R. TROILO: *Alcuni teoremi sui moti di precessione e di precessione regolare*, Atti Ist. Veneto di Scienze lett., Arti, vol. CXXIX (1971).
- [7] R. TROILO: *Sulle precessioni generalizzate regolari del corpo rigido soggetto a forza di potenza*. Boll. U.M.I. (4)-6 (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 gennaio 1972.